

M1. Sciences de la Planète Terre

Dynamique du climat

Michaël Ghil et Bruno Deremble

1° Semestre, automne 2006

But du cours : Etudier le *changement climatique* à l'échelle du globe et des dizaines à des millions d'années, *ainsi que ses causes*.

Accent mis sur : Mécanismes *physiques* et modèles *mathématiques* (tous deux *non-linéaires*)

Deux thèmes :

- *Equilibres* climatiques — persistance
- *Oscillations* climatiques — changement

Format : Cours + TDs ;
les questions & commentaires sont fortement encouragés

Evaluations : 1) devoir à mi-chemin (40% de la note) et
2) examen à la fin (60% de la note).

Contenu du cours

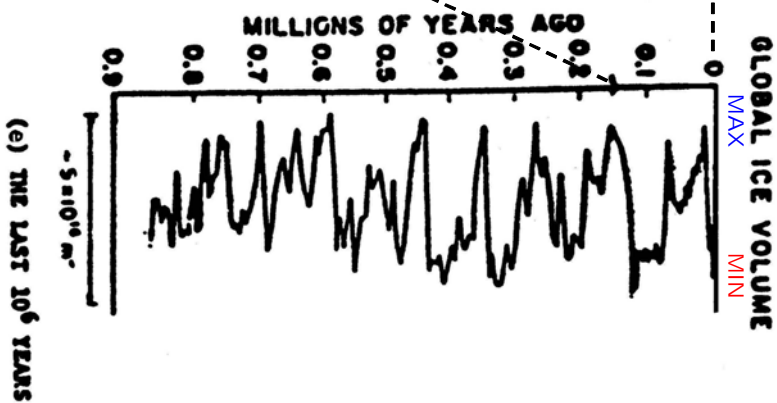
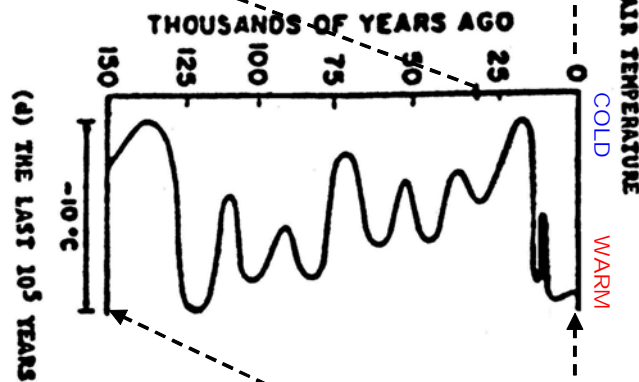
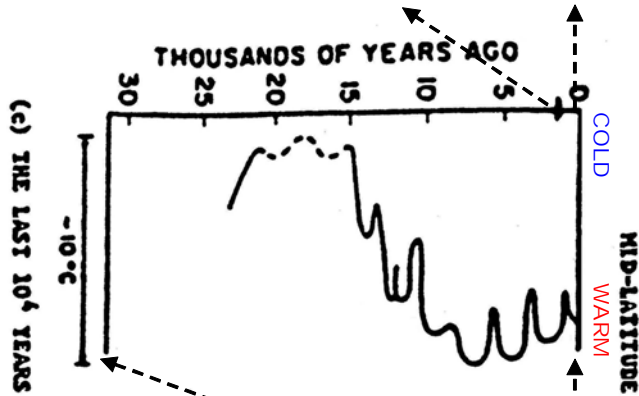
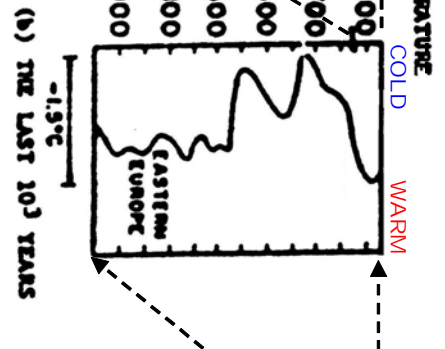
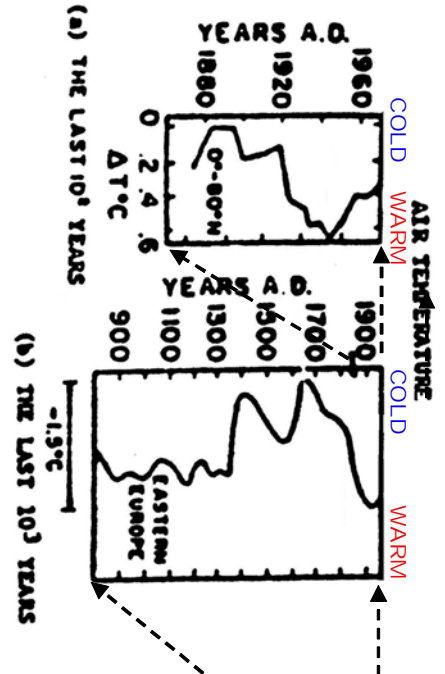
Dynamique Non-linéaire du Climat

- A. Equilibres climatiques.** L'équilibre radiatif de l'atmosphère, le rôle des nuages et de la couverture de surface (neige, glace et végétation) ; la rétroaction glace-albédo. Les modèles dits de « bilan énergétique » — energy balance models (EBMs). Leur formulation physique et mathématique : équilibres multiples, la stabilité du climat et la « sensibilité climatique ».
- B. Oscillations climatiques.** Les paléoclimats et leur modélisation : les glaciations du Quaternaire et les calottes glaciaires. Modèles couplés calottes-atmosphère-océan : le rôle de l'albédo et du cycle hydrologique. La variabilité paléoclimatique interne et forcée : modèles oscillatoires et le forçage astronomique.
- C. Modèles Climatiques Simples.** La circulation océanique sous l'effet des vents et des flux de masse : précipitation, évaporation, formation de glace de mer. Phénoménologie de la circulation dite thermohaline — thermohaline circulation (THC). Modèles « en boîtes » de la THC : équilibres multiples, avec eaux profondes formées en hautes ou basses latitudes. Variabilité climatique interne et forcée ; forçage naturel (insolation, volcans) et anthropique.

Bibliographie principale

1. M. Ghil and S. Childress, 1987. **Theoretical Climate Dynamics**; Part IV de *Topics in Geophysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics, Dynamo Theory and Climate Dynamics*. Springer-Verlag, New York (Part II: **Large-Scale Atmospheric Dynamics** contient aussi des sections qui portent sur le matériel de ce cours).
2. M. Ghil, 1994. **Cryothermodynamics**: The chaotic dynamics of paleoclimate. *Physica D*, **77**, 130–159.

Variabilité du climat: Différentes échelles de temps



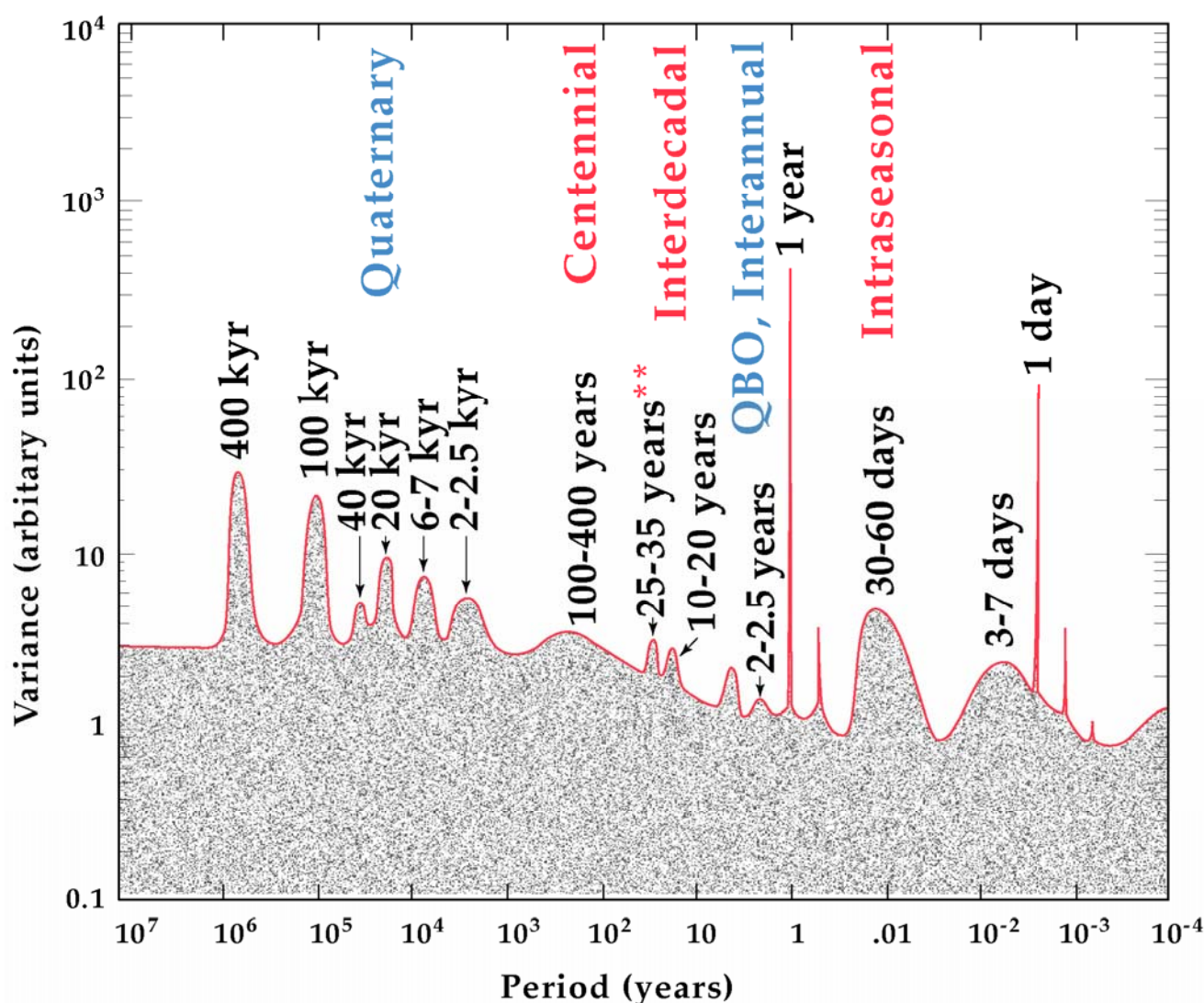
LEGEND:

1. Thermal Maximum of 1940s
2. Little Ice Age
3. Younger Dryas cold interval
4. Present interglacial (Holocene)
5. Last previous interglacial (Eemian)
6. Earlier Pleistocene Interglacial

Spectre composite de la variabilité du climat

Traitement standard des bandes de fréquences:

1. Hautes fréquences – bruit blanc (ou “coloré”)
2. Basses Fréquences – évolution lente de paramètres



D'après Ghil (2001, EGEC), tiré de Mitchell* (1976)

* “No known source of deterministic internal variability”

** 27 ans – Brier (1968, *Rev Geophys.*)

Modèles du climat (atmosphériques & couplés) : Une classification

□ Temps

- stationnaire, (quasi-)équilibre
- transitoire, variabilité du climat

□ Espace

- 0-D (dimension 0)
- 1-D

- vertical

- latitudinal

- 2-D

- horizontal

- plan méridien

- 3-D, MCGs (Modèle de Circulation Générale, *GCM*)

- horizontal

- plan méridien

- Modèles simples et intermédiaires 2-D & 3-D

□ Couplage

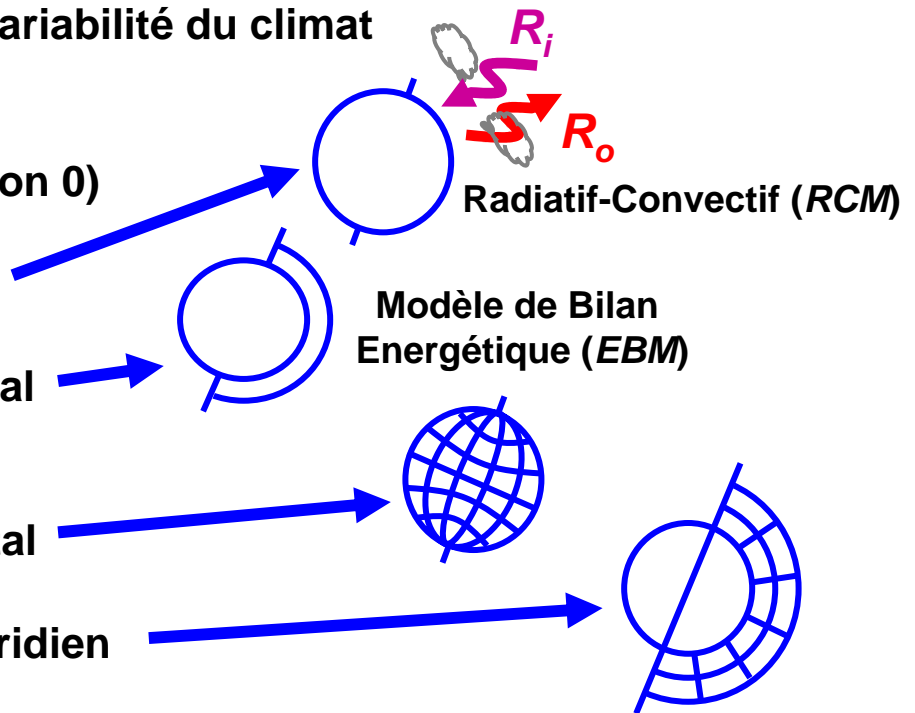
- Partiel

- unidirectionnel

- asynchrone

- hybride

- Complet



Hiérarchie: du plus simple au plus élaboré,
comparaison itérative avec les données

M. Ghil S. Childress

Topics in
Geophysical Fluid Dynamics:
Atmospheric Dynamics,
Dynamo Theory, and
Climate Dynamics

With 143 Illustrations



Springer-Verlag
New York Berlin Heidelberg
London Paris Tokyo

PART IV. THEORETICAL CLIMATE DYNAMICS	294
Chapter 10. RADIATION BALANCE AND EQUILIBRIUM MODELS	294
10.1. Radiation Budget of the Earth	295
10.2. Energy-Balance Models (EBMs): Multiple Equilibria	302
10.3. Nonlinear Stability and Stochastic Perturbations	320
10.4. Modified EBMs: Periodic and Chaotic	328
10.5. Bibliographic Notes	348
Chapter 11. GLACIATION CYCLES: PHENOMENOLOGY AND SLOW PROCESSES	356
11.1. Quaternary Glaciations, Paleoclimatological Evidence	356
11.2. Ice-sheet Dynamics	362
11.3. Geodynamics	376
11.4. Bibliographic Notes	387
Chapter 12. CLIMATIC OSCILLATORS	391
12.1. Free Oscillations of the Climatic System	393
12.2. Hopf Bifurcation	404
12.3. Orbital Changes and Their Climatic Effect	412
12.4. Forced Oscillations: Nonlinear Resonance	420
12.5. Entrainment, Combination Tones and Aperiodic Behavior	426
12.6. Periodicity and Predictability of Climate Evolution	435
12.7. Bibliographic Notes	441

Reprinted from

PHYSICA D

Physica D 77 (1994) 130–159

Cryothermodynamics: the chaotic dynamics of paleoclimate

Michael Ghil

*Climate Dynamics Center, Department of Atmospheric Sciences and Institute of Geophysics and Planetary Physics, University
of California, Los Angeles, CA 90024-1565, USA*



ITALIAN PHYSICAL SOCIETY

PROCEEDINGS
OF THE
INTERNATIONAL SCHOOL OF PHYSICS
«ENRICO FERMI»

COURSE LXXXVIII

edited by M. GHIL
Director of the Course
and by R. BENZI and G. PARISI
VARENNA ON LAKE COMO
VILLA MONASTERO
14 - 24 June 1983

*Turbulence and Predictability
in Geophysical Fluid Dynamics
and Climate Dynamics*

1985



NORTH-HOLLAND
AMSTERDAM · OXFORD · NEW YORK · TOKYO

Bibliographie supplémentaire

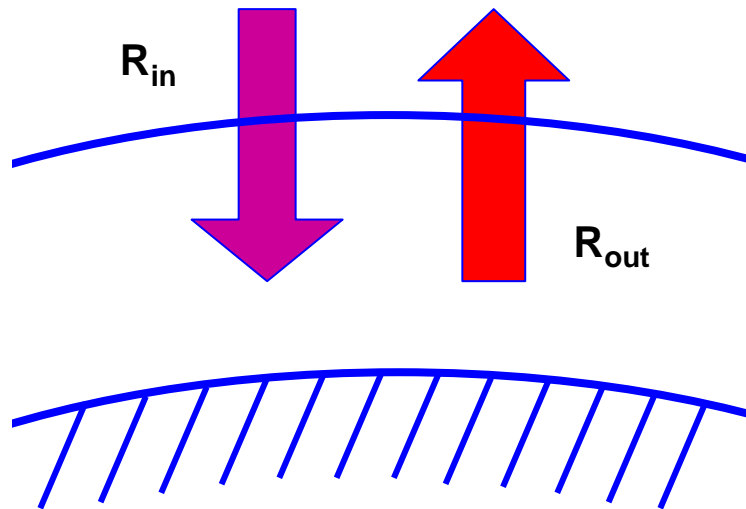
A & B. Bilan radiatif et paléoclimats

1. **Guckenheimer & Holmes, 1983**: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, 453 pp. (Springer-Verlag).
2. **Ghil et al. (Eds.), 1985**: *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, Part V (4 chapters), pp. 347-440 (North-Holland).
3. **Crowley & North, 1991**: *Paleoclimatology*, 339 pp. (Oxford Univ. Press).
4. **Saltzman, B., 2001**: *Dynamical Paleoclimatology: Generalized Theory of Global Climate Change*, 350 pp. (Academic Press).

C. Circulation thermohaline

5. **Pedlosky, J., 1996**: *Ocean Circulation Theory*, 453 pp. (Springer-Verlag).
6. **Dijkstra, H., 2005**: *Nonlinear Physical Oceanography: A Dynamical Systems Approach to the Large-Scale Ocean Circulation and El Niño*, 2nd Revised and Enlarged Edition. Springer - Atmospheric and Oceanographic Sciences Library, Vol. 28, 2005, 532 pp., ISBN: 1-4020-2262-X
7. **Dijkstra & Ghil, 2005**: Low-frequency variability of the large-scale ocean circulation: A dynamical systems approach, *Rev. Geophys.*, 43, RG3002, doi:10.1029/2002RG000122.

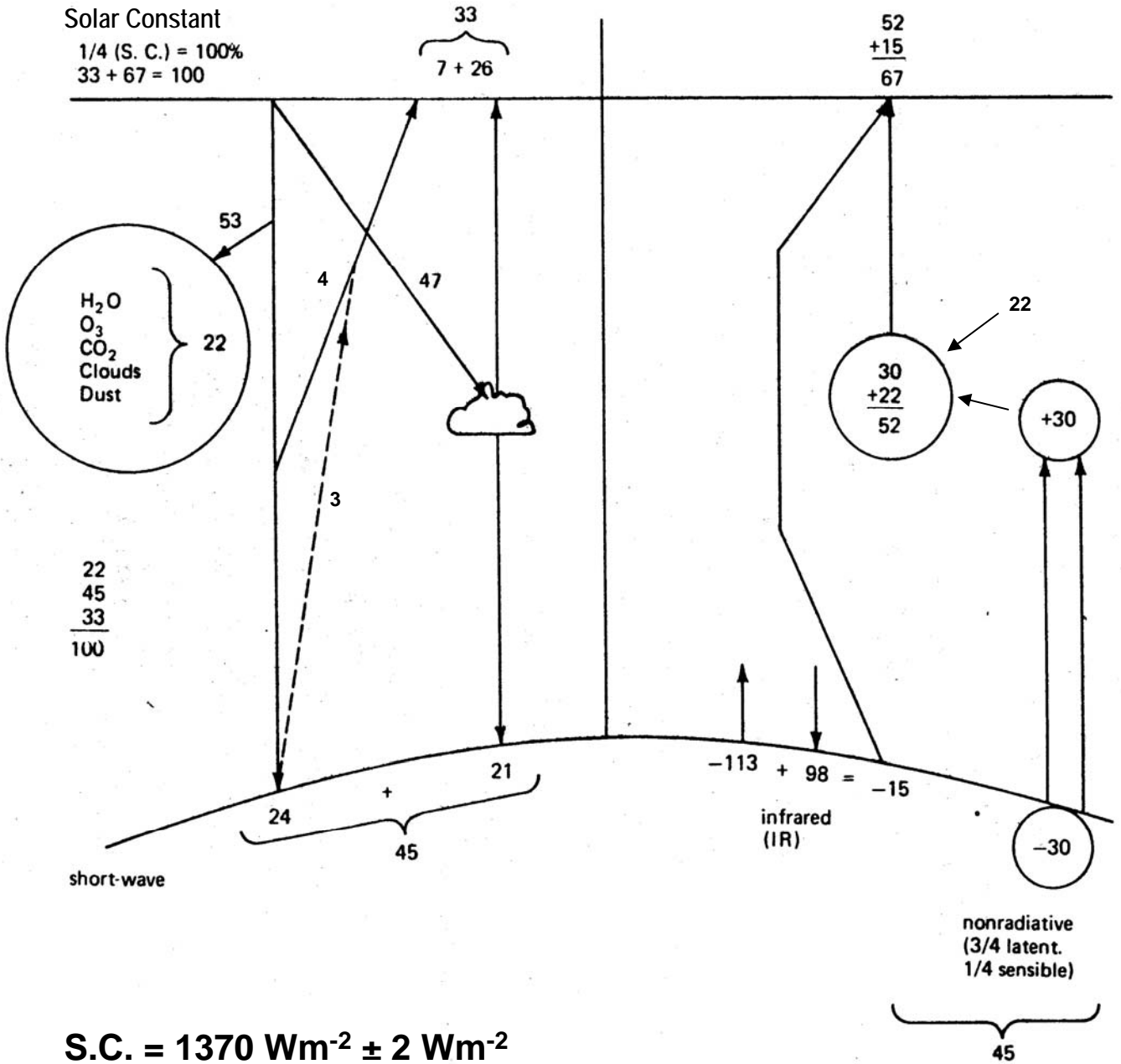
Bilan radiatif



L'équilibre à long terme entre le rayonnement incident (solaire, ultra-violet et visible) et le rayonnement émis vers l'espace (terrestre, infra-rouge) domine le climat.

Ref. Scribe égyptien, 3000 av. J.C. :
" Le Soleil chauffe la Terre ",
Pierre de Rosette, l. 13-17.

Bilan radiatif Moyenne annuelle



Modèles de bilan énergétique

(Energy-balance models, EBMs)

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = R_i - R_o + D$$

C — capacité calorifique locale

T — température de surface locale

R_i — rayonnement solaire incident

R_o — rayonnement terrestre vers l'espace

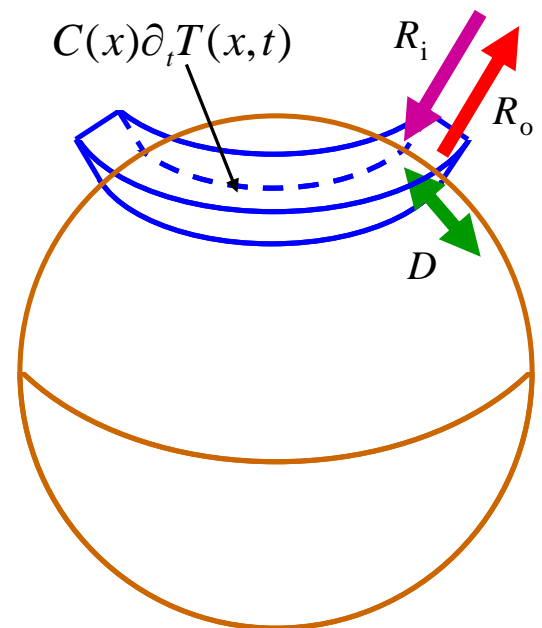
D — redistribution de la chaleur (“diffusion”)

Remarques :

1. une variable d'espace maximum (x)
2. C , R_i , R_o et D doivent être calculés (“paramétrés”) en fonction de $T=T(x,t)$
3. Principale caractéristique du modèle :

$$R_i = Q(x) \{1 - \alpha(x, T)\}$$

avec α l'albédo local



Energy-balance models (EBMs)

Version O-D (moyennée sur le globe)

$$\begin{aligned} C \frac{d\bar{T}}{dt} &= R_i - R_o \\ &= Q \{1 - \alpha(\bar{T})\} - \sigma \bar{T}^4 m(\bar{T}) \end{aligned}$$

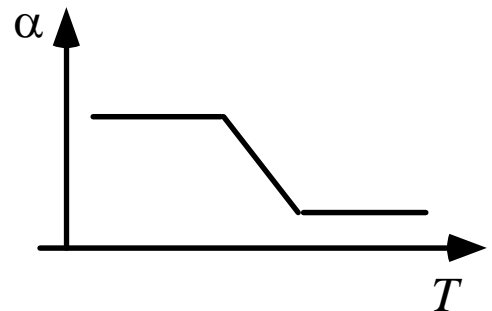
\bar{T} — température moyenne à la surface

t — temps (en milliers d'années)

Q — flux solaire incident

α — albédo

C — capacité calorifique



σ — constante de Stefan–Boltzmann

m — facteur d'effet de serre

Remarque: α est fonction de l'extension de la glace et de la neige, de la nébulosité, etc. (variables implicites), tout étant paramétré en fonction de la variable explicite \bar{T} .

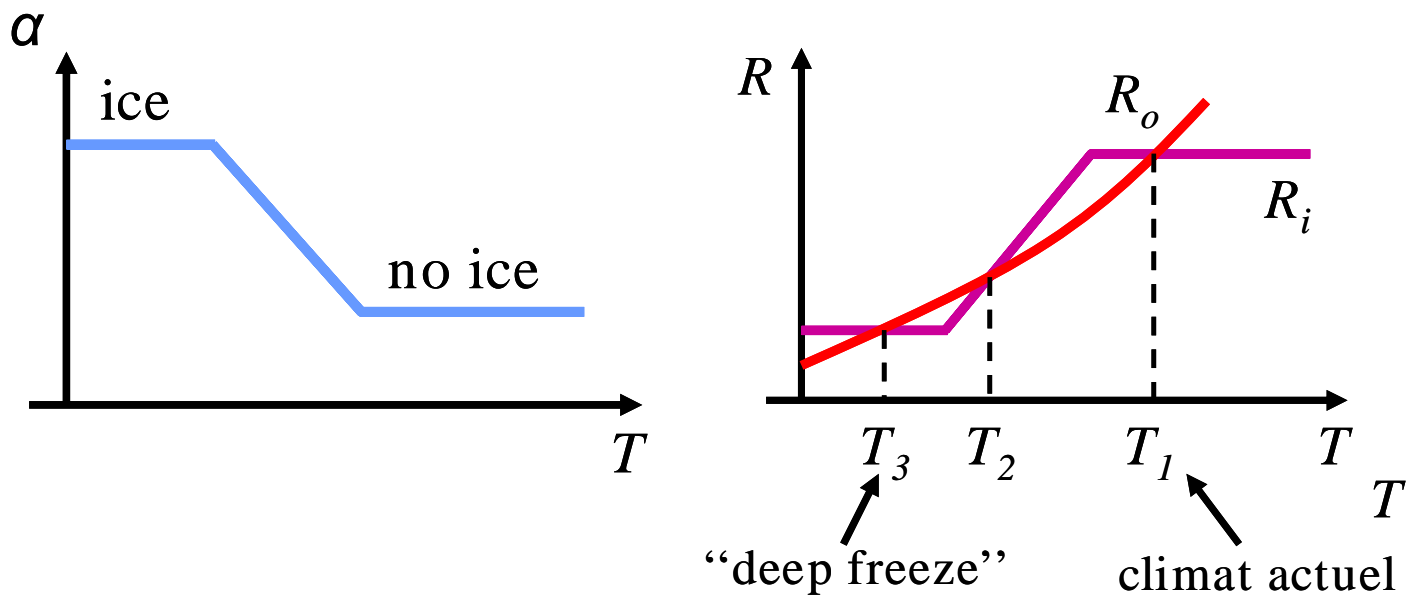
Solutions du modèle

On veut écrire T sous la forme:

$$T = T(t; T_0, Q, c, \dots)$$

Solutions stationnaires :

$$Q \{1 - \alpha(T)\} - \sigma T^4 = 0$$



Que se passe-t-il si le soleil « clignote » et $T = T_1 + \Delta T$?

Il faut reprendre l'équation d'origine, qui dépend du temps.

Condition de stabilité

$$C\partial_t T = R_i - R_o = f(T)$$

$$R_i = Q\{1 - \alpha(T)\}$$

$$R_o = A + BT$$

On pose $T = T_j + \theta$:

$$f(T_j) = 0,$$

$$f(T) = f(T_j) + f'(T_j)\theta + \dots$$

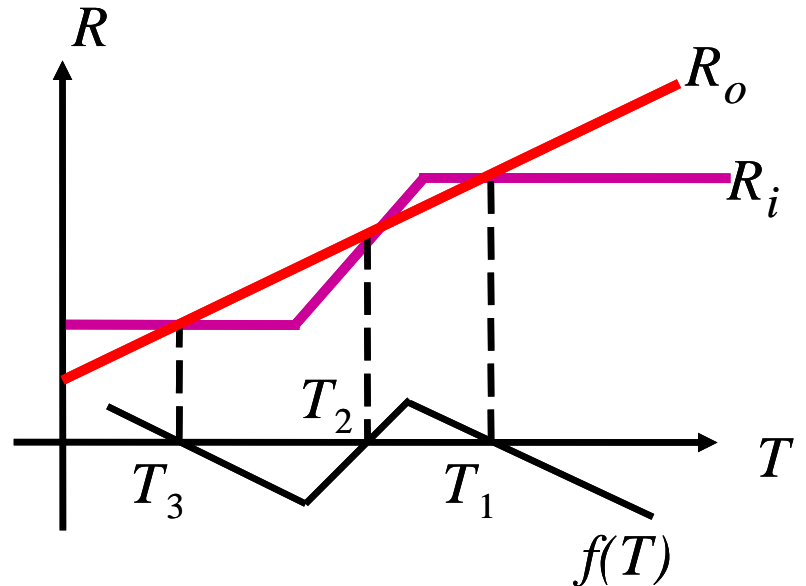
Soit $\lambda_j \equiv f'(T_j)/c$

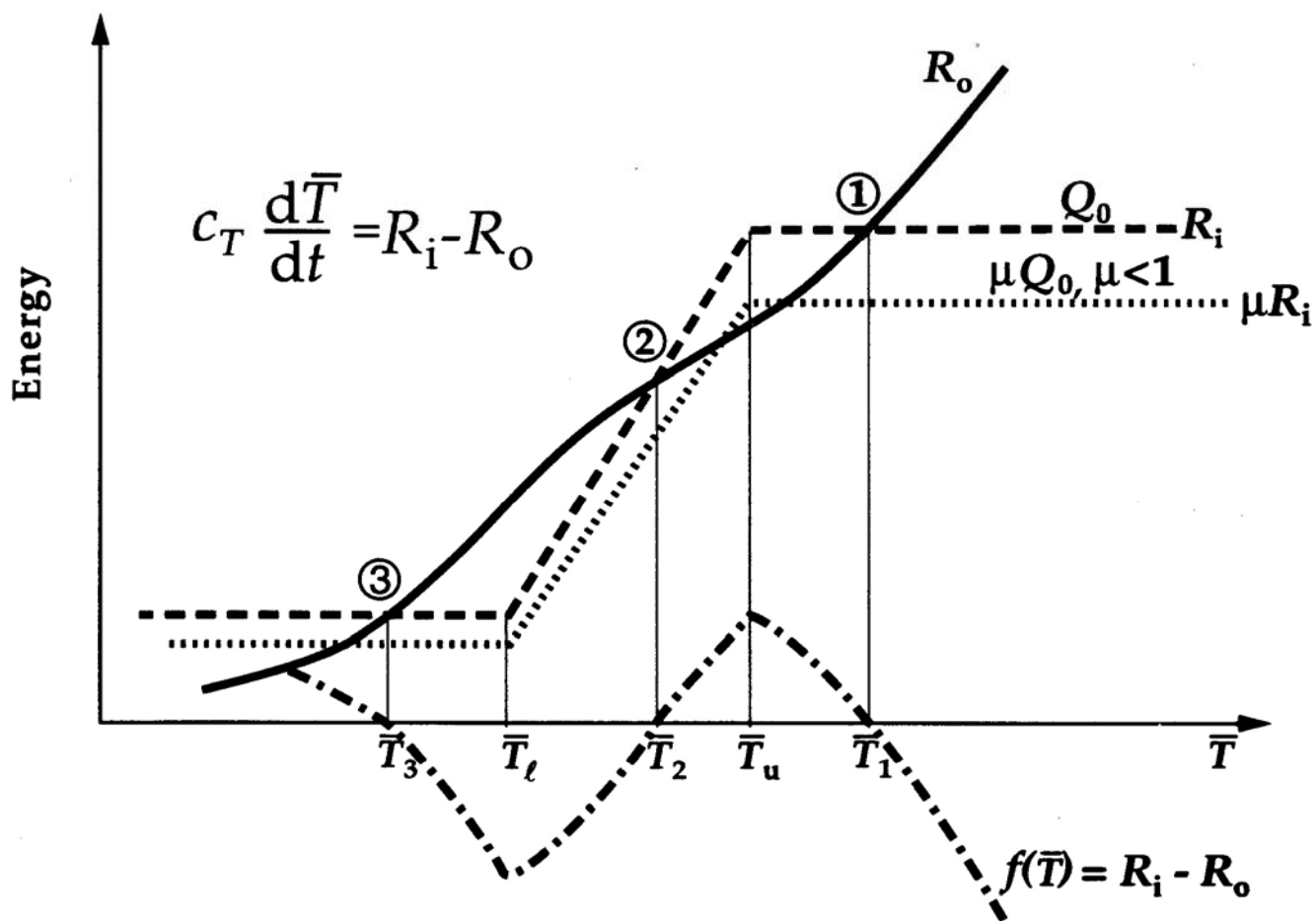
$$\partial_t \theta = \lambda_j \theta \Rightarrow \theta = e^{\lambda_j t} \theta_0.$$

Si $\lambda_j < 0$ stable

Si $\lambda_j > 0$ instable

Remarque: dans le cas 1-D, $\lambda_j \rightarrow \lambda_j^{(0)}$; $\lambda_j \sim 1/c$





M1. Sciences de la Planète Terre

Dynamique du climat

Cours II

vendredi 24 novembre 2006

A) Modèles de bilan énergétique (EBMs)

1. Modèles 1-D: Budyko, Sellers, & Held–Suarez–North
2. Diagramme de bifurcation et stabilité linéaire
3. Comparaison avec des résultats de MCG
4. EBMs avec effets de retard: solutions oscillatoires

B) Théorie élémentaire des bifurcations

1. Points fixes
2. Bifurcations de col
3. Bifurcations en 1D
4. Stabilité non-linéaire et principe variationnel
5. Bistabilité et hystérésis

Modèle 1-D (EBM "classique")

$$(1) C(x)T_t = R_i - R_o + D$$

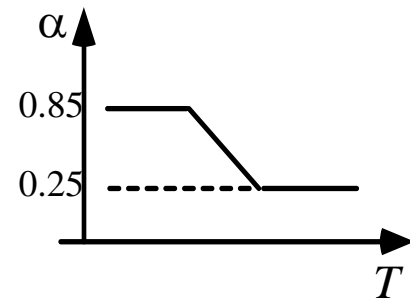
T – température

x – coordonnée latitudinale, $0 \leq x \leq 1$

$$R_i = Q(x)\{1 - \alpha\}$$

$$= Q(x)\{1 - b(x) + c_1 T\}_c$$

$$R_o = \sigma T^4 \{1 - m \tanh(c_3 T^6)\}$$



$\tilde{T}(x)$ – le climat observé

$$D = \frac{1}{\sin \frac{\pi x}{2}} \partial_x \sin \frac{\pi x}{2} \{k(x) + k_s(x)g(\tilde{T})\} T_x$$

$$\text{C.B. : } T_x(0) = T_x(1) = 0$$

$x = 0$ Pôle (Nord)

$x = 1$ Equateur

Questions: 1. Solutions stationnaires ("climats") ?

2. *Stabilité* ?

3. Perturbation & *bifurcation* ?

$$Q \rightarrow \mu Q \quad (\mu = 1)$$

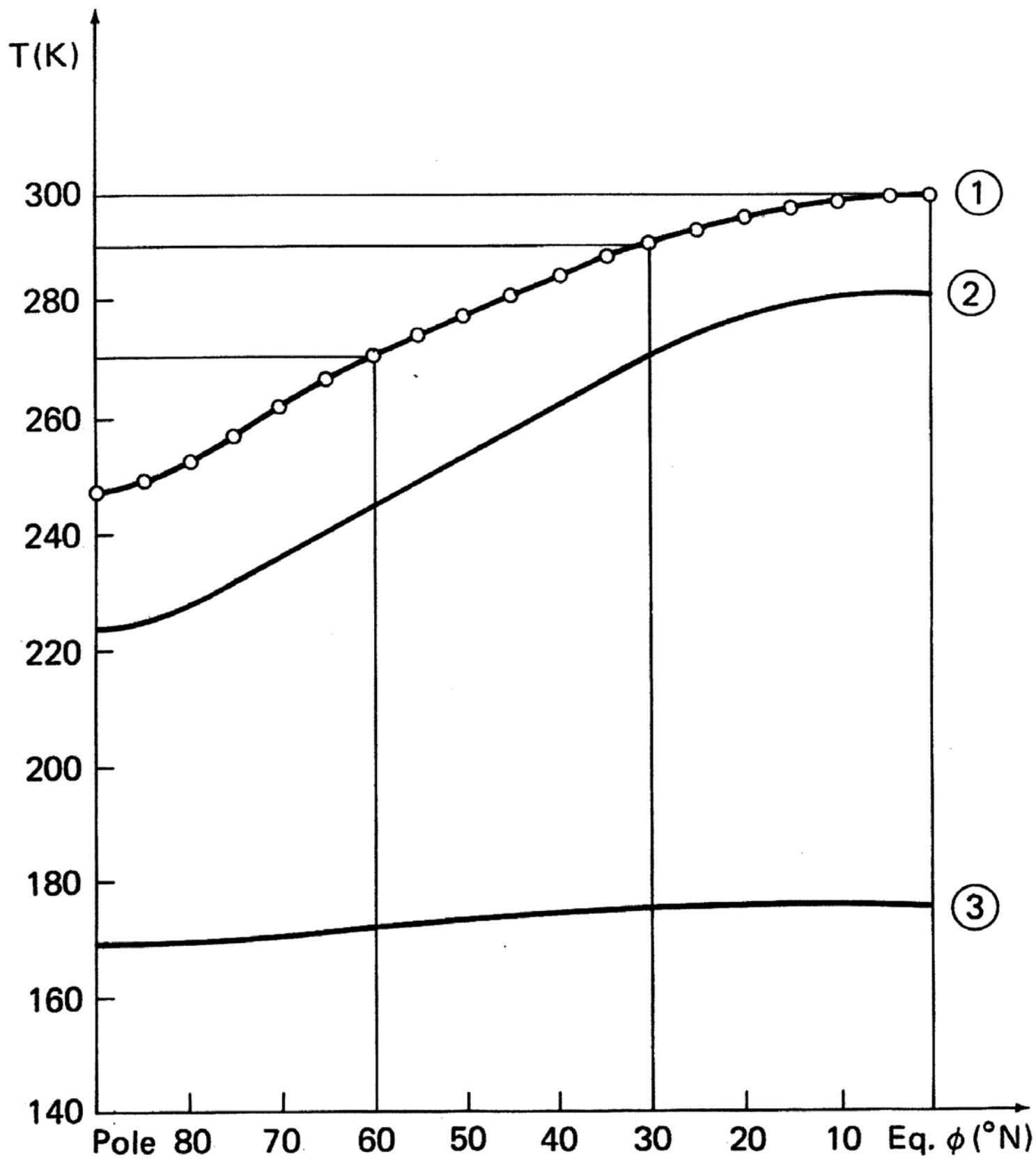
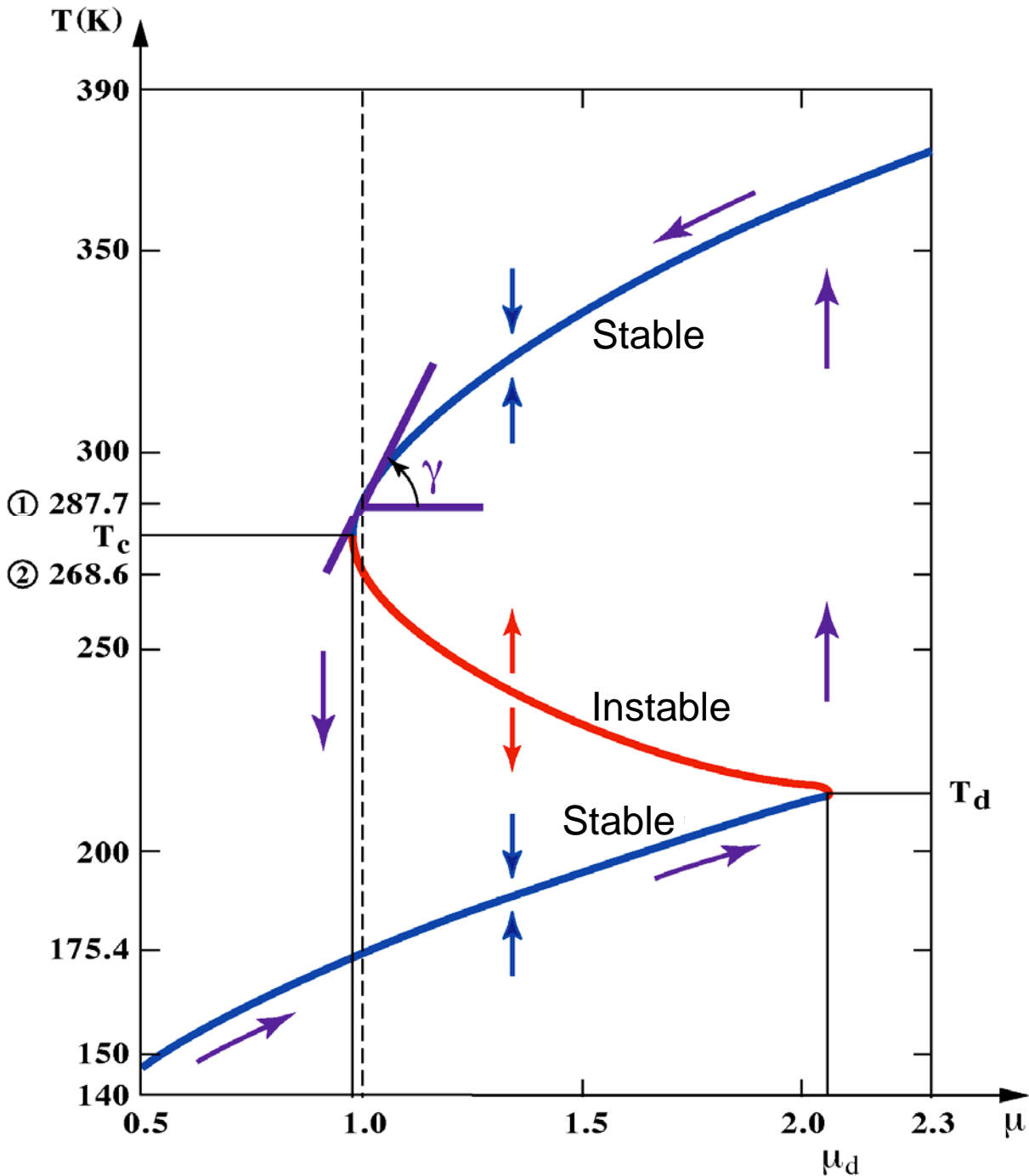


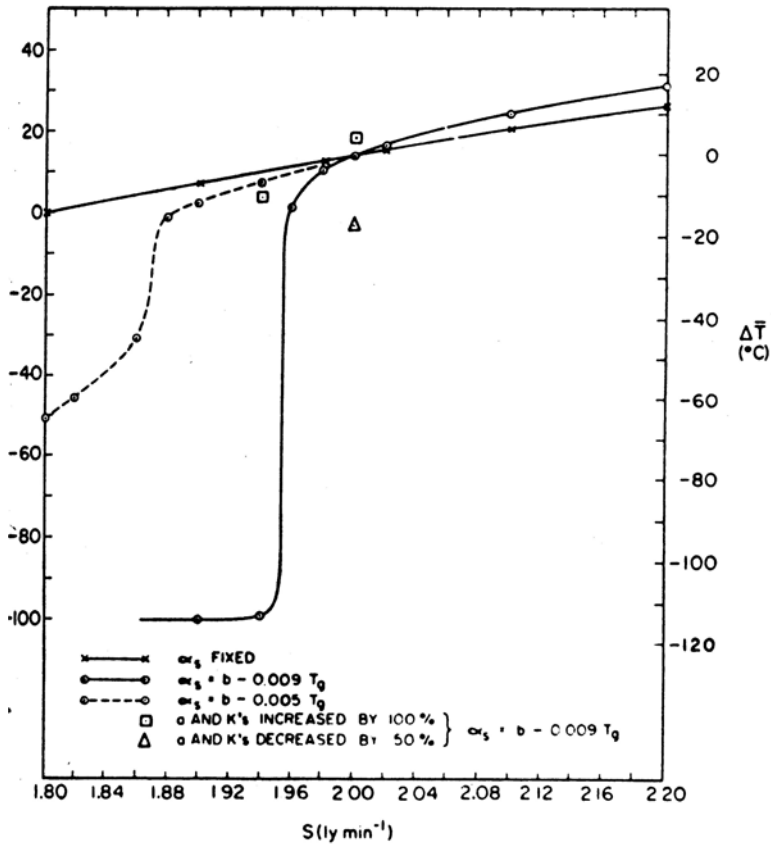
Diagramme de Bifurcation

EBM 1-D: $C(x)T_t = \{k(x,T)T_x\}_x + \mu Q_0 \{1 - \alpha(x,T)\} - g(T)\sigma T^4$
 $T_x = 0$ at $x = 0,1$



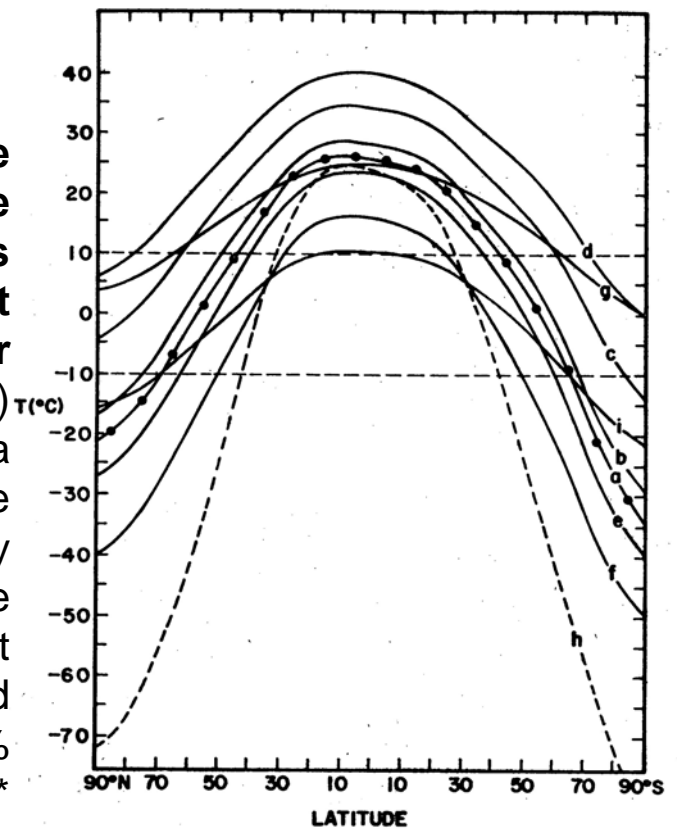
Sensibilité du climat: $\gamma = \frac{dT}{d\mu} \cong 0,01$ (1K par % de Q)

Sensibilité du climat à une variation de l'insolation



Mean global sea level temperature T as a function of the solar constant S for different responses of the planetary albedo α , and different values of the eddy diffusivities K_h , K_w and K_o .*

Predicted latitudinal distribution of the mean annual sea level temperature when the solar constant S is increased by (a) 0% (present conditions), (b) 1%, (c) 5%, (d) 10%, or reduced by (e) 1%, (f) 2%. Curve (i) shows the distribution of resulting from a 3% decrease of S and a 100% increase in the exchange coefficient and eddy diffusivities. In curves (g) and (h) the solar constant is kept fixed at its present value and the exchange coefficient and eddy diffusivities are increased by 100% and decreased by 50%, respectively.*

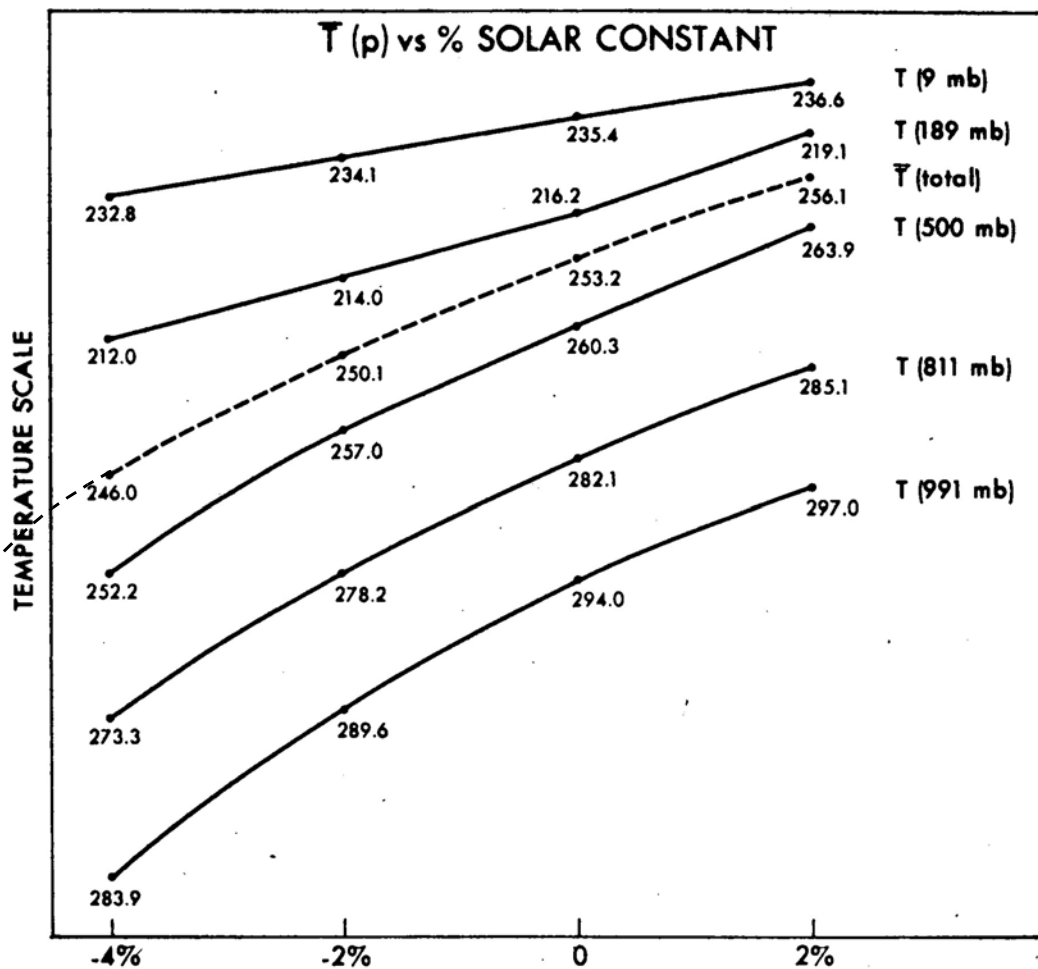


* D'après Sellers (1969), *J. Appl. Meteorol.*, 8, 392-400.

Sensibilité du climat à une variation de l'insolation dans un Modèle de Circulation Générale (MCG, GCM)

“As stated in the Introduction, it is not, however, reasonable to conclude that the present results are more reliable than the results from the one-dimensional studies mentioned above simply because our model treats the effect of transport explicitly rather than by parameterization.” *

“Nevertheless, it seems to be significant that both the one-dimensional and three-dimensional models yields qualitatively similar results in many respects.” *



Area-mean temperatures for various level of the model as well as a mass-weighted mean temperature for the total model atmosphere for each of the four cases. Vertical scale has been adjusted for each case separately and superimposed upon the others. Units are in K. *

* D'après Wetherald and Manabe (1975), *J. Atmos. Sci.*, 32, 2044-2059.

Conclusions sur les EBM (0-D et 1-D)

- 1) **Des solutions stationnaires multiples** existent pour **insolation constante** : « le climat actuel » + « le climat congelé » ("deep freeze") ; encore d'autres ?
- 2) **Deux** (ou plusieurs) de ces **équilibres** sont **stables** aux perturbations internes.
- 3) Toutes les solutions stationnaires dépendent de façon continue du paramètre d'insolation $\mu = Q/Q_0$; les branches de solution se raccordent l'une à l'autre à certaines valeurs critiques de μ → **bifurcation(s) de col**.
- 4) **Les EBM sont utiles** dans l'étude (qualitative et quantitative) de la **sensibilité climatique** aux variations du bilan énergétique (solaire ou atmosphérique : changements orbitaux, CO₂, aérosols).
- 5) **Les effets de retard ou les perturbations stochastiques** peuvent produire des comportements intéressants de non-équilibre → **oscillations régulières ou irrégulières**.

Bibliographie pour les EBMs

A. Les débuts (Prélude)

1. Adem (1962, 1964) – *Tellus, Mon. Weather Rev.*
2. Öpik (1965) – *Icarus*
3. Budyko (1969) – *Tellus*
4. Sellers (1969) – *J. Appl. Met.*

B. “Classiques” (Thème)

1. Held & Suarez (1974) – *Tellus*
2. North (1975a, b) – *J. Atmos. Sci.*
3. Ghil (1976) – *J. Atmos. Sci.*

C. Sommes (Episode)

1. North *et al.* (1981) – *Rev. Geophys. Space Phys.*
2. Ghil & Childress (1987) – *Topics in GFD*, Ch. 10

D. EBMs avec effets de retard (1ère variation)

1. Bhattacharya *et al.* (1982) – *J. Atmos. Sci.*
2. Bar-Eli & Field (1998) – *J. Geophys. Res.*

E. Résonance stochastique (2ème variation)

1. Benzi *et al.* (1982, 1983) – *Tellus, SIAM J. Appl. Math.*
2. Nicolis (1982) – *Tellus*
3. Matteucci (1989) – *Clim. Dyn.*

F. Observations et autres modèles (Coda)

1. Ghil (1994) – *Physica D*
2. Ghil and Childress (1987) – *Topics in GFD*, Ch. 11 and 12
3. Saltzman (1983, 2001) – *Adv. Geophys., book (Acad. Press)*

B) Théorie élémentaire des bifurcations

1. Points fixes

- Stabilité linéaire
- Stabilité non-linéaire et bassins d'attraction

2. Bifurcations de col

- Branches multiples de solutions stationnaires
- Stabilité linéaire

3. Bifurcations en 1-D

4. Stabilité non-linéaire et principe variationnel

- Principe variationnel en 0-D
- Principe variationnel en 1-D

5. Bistabilité et hystérésis

1. Points fixes

Nous avons étudié les solutions des *EBMs* en 0-D :

$$\dot{T} = f(T; \mu, c, \sigma, \dots)$$

La forme générale du problème scalaire s'écrit :

$$\dot{x} = f(x; \mu)$$

Stabilité — linéaire, $\mu = 1$

$$f(x_0) = 0$$



(2)

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow x \equiv x_0 \text{ — point fixe}$$

Perturbation initiale, $t = 0$

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 + \xi(0) \\ \dot{x} &\equiv \dot{x}_0 + \dot{\xi} = \dot{\xi} \\ &= f(x_0 + \xi) = f(x_0) + f'(x_0)\xi + O(\xi^2) \end{aligned}$$

Stabilité linéaire (~ « perturbations infinitésimales »)

$$\dot{\xi} = f'(x_0)\xi, \quad f'(x_0) \equiv \lambda, \quad \dot{\xi} = \lambda\xi \quad (3)$$

$$\xi(t) = e^{\lambda t} \xi_0, \quad \xi_0 \equiv \xi(0)$$

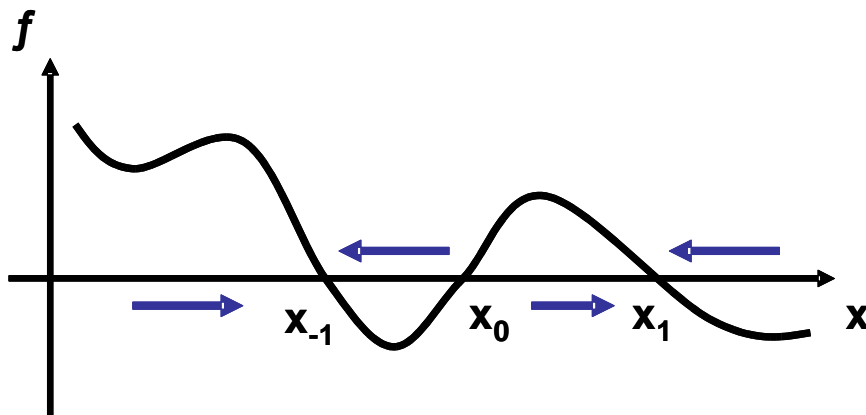
Si $\lambda < 0 \Rightarrow$ le point fixe (PF) est (linéairement) *stable*

Si $\lambda > 0 \Rightarrow$ le PF est " *instable*

Si $\lambda = 0 \Rightarrow$ la stabilité linéaire du PF est *neutre*

Quelques généralités sur les PFs

- 1) $f \in C^1$, $f \not\equiv 0$ sur tout sous-intervalle : les PFs sont isolés (propriété générique)
- 2) Les bassins d'attraction sont des intervalles ouverts (éventuellement semi-infinis)



2. Bifurcation de col

Comment change-t-elle la géométrie des solutions quand $\mu \neq \mu_0$, ç.a.d. comment changent le nombre et la stabilité des solutions stationnaires ? Nous commençons par l'étude du cas scalaire.

Le cas le plus simple : col ou point-limite

$$\dot{x} = \mu - x^2 \equiv f(x; \mu) \quad (4)$$

$$\text{PFs: } \mu - x^2 = 0$$

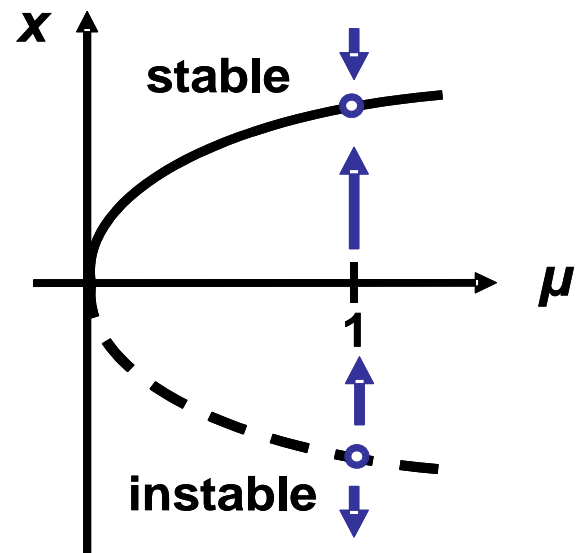
$$x = \pm\sqrt{\mu} \quad (5)$$

Stabilité des PFs :

$$x_1 = \sqrt{\mu}, \quad x_{-1} = -\sqrt{\mu}$$

$$x(0) = x_{\pm 1} + \xi(0)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \lambda_{\pm} \xi, \quad \lambda_{\pm} \equiv f'(x_{\pm 1}) = -2x_{\pm 1} \\ &= \mp 2\sqrt{\mu} \end{aligned} \quad (6)$$



∴ Branche supérieure – (linéairement) *stable*

Branche inférieure – (linéairement) *instable*

Nous passons maintenant à l'étude de la stabilité non-linéaire.

3. Bifurcations en n -D

Nous avons étudié le cas scalaire $n = 1$. De façon plus générale, on aura :

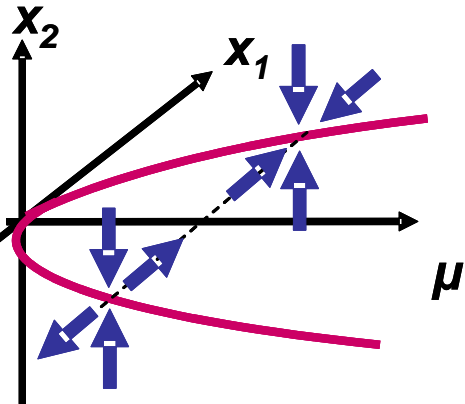
$$\vec{x} = \vec{f}(\vec{x}; \mu) , \quad \vec{f} \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

avec $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

Le comportement est “presque” linéaire partout dans l’espace de phase-paramètre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, sauf dans le voisinage de quelques points isolés (x_c, μ_c) : c’est les points de bifurcation, où la matrice jacobienne $L = (\partial f_i / \partial x_j)$ est singulière, c’est-à-dire $\det L = 0$.

Dans le cas $n = 2$, on peut réduire à la *forme normale* :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu - x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= -\lambda x_2, \lambda > 0. \end{aligned}$$



Ce schéma explique d’ailleurs l’appellation “bifurcation de col”.

Dans le cas général, la réduction donne :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu - x_1^2 \\ \dot{x}_i &= -\lambda_i x_i, \lambda_i > 0, i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

4. Stabilité non-linéaire et principe variationnel

Pour approfondir nos connaissances sur la stabilité, il faut étudier l'effet des perturbations plus importantes.

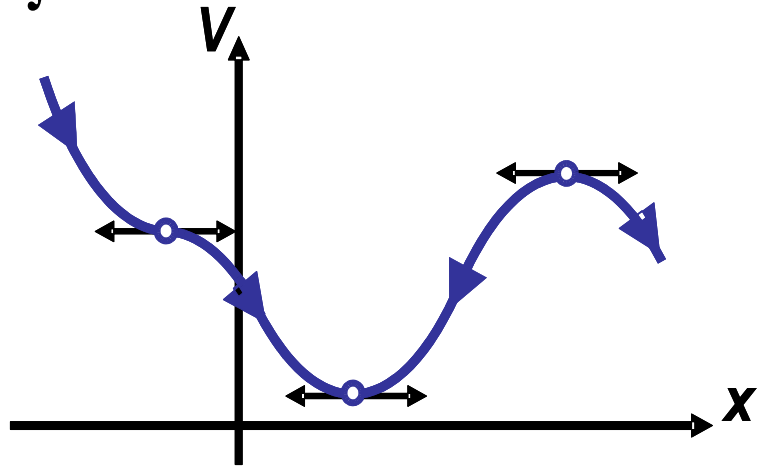
a) Principe variationnel en 0-D

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) & V(x) &= -\int^x f(\xi) d\xi \text{ -- pseudo-potentiel} \\ &= -V'(x) \\ \dot{x}^2 &= -\frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = -\dot{V} \end{aligned}$$

$\therefore V$ va décroître le long de la trajectoire de l'EDO tant que

$$\dot{x} \neq 0 \iff V' \neq 0$$

$\dot{x} = 0$ si V atteint un minimum, maximum ou col.

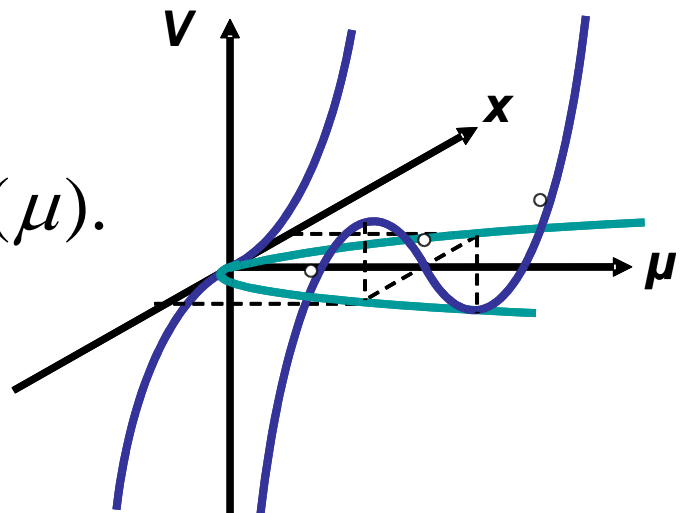


Evidemment, seulement $V = \min$ est *stable* – de façon non-linéaire.

Avec ce résultat, nous retournons à la bifurcation de col.

$$\dot{x} = \mu - x^2,$$

$$V(x; \mu) = -\mu x + x^3 / 3 + c(\mu).$$



b) Principe variationnel en 1-D

$$C(x)T_t = \frac{1}{r(x)} [p(x)T_x]_x - \tilde{q}(x, T),$$

$$\tilde{q} = \mu Q_0 S(x) [1 - \alpha(x, T)] - \sigma g(x, T) T^4,$$

$$G(x, T) = \int^T \tilde{q}(x, \theta) d\theta.$$

L'équivalent du pseudo-potentiel $V(\bar{T})$ dans un espace fonctionnel est :

$$J\{T(x)\} \equiv \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} p(x) T_x^2 - r(x) G(x, T(x)) \right\} dx,$$

où

$$p(x) = \frac{4}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{2} k(x),$$

$$r(x) = C(x) \sin \frac{\pi x}{2}.$$

Les solutions stationnaires sont les extrema de $J\{T\}$

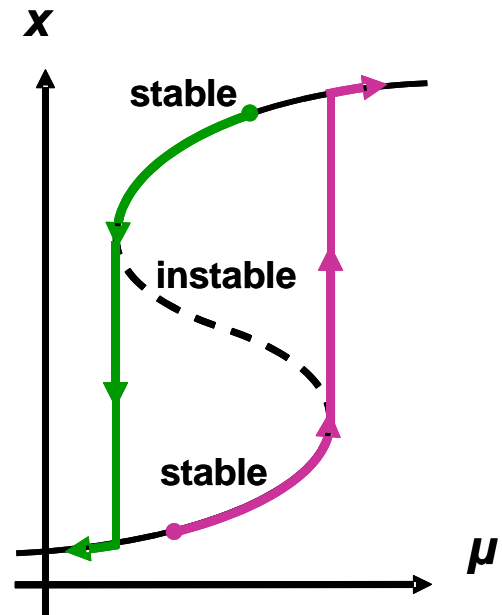
$$r(x)C(x)T_t = -\frac{\delta J\{T\}}{\delta T}(x),$$

où

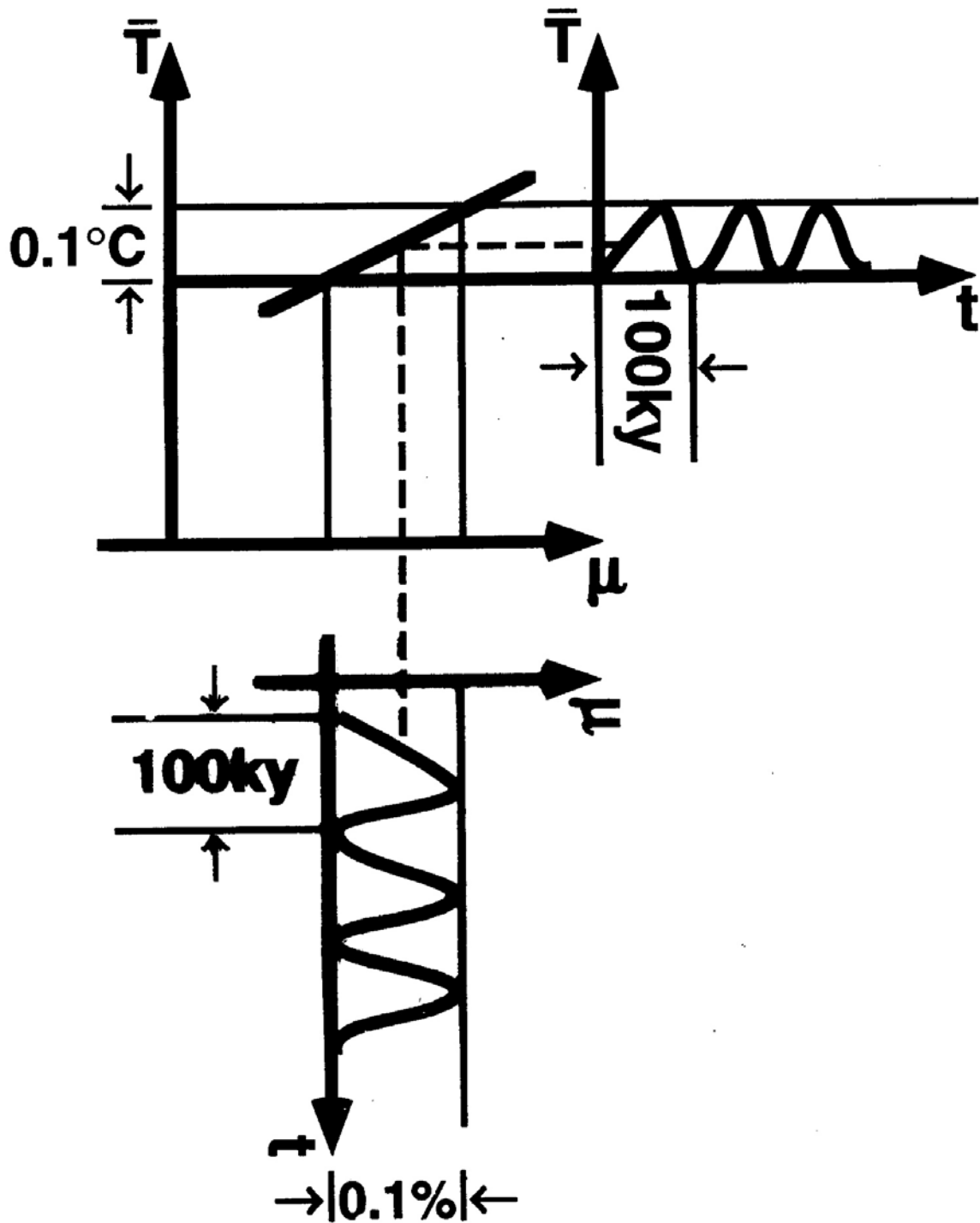
$$\int_0^1 \frac{\delta J}{\delta T} \theta(x) dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{J\{T(x) + \varepsilon \theta(x)\} - J\{T(x)\}}{\varepsilon}.$$

5. Bistabilité et hystérésis

L'association de deux bifurcations de col peut créer un phénomène d'hystérésis (courbe en forme de S):



Réponse du système climatique en quasi-équilibre



Oscillations:

Amplitude = $0,1^\circ\text{C}$ pour $0,1\%$

Phase = 1—10 milliers d'années

Les glaciations du Quaternaire

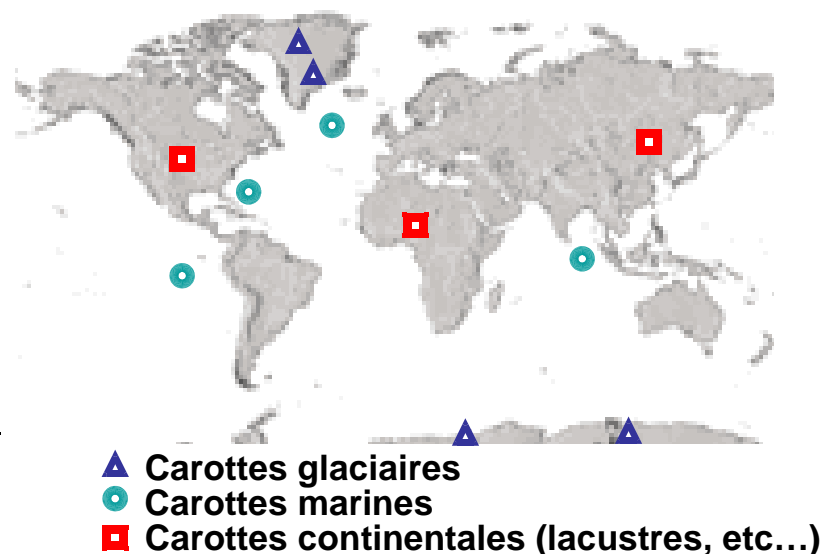
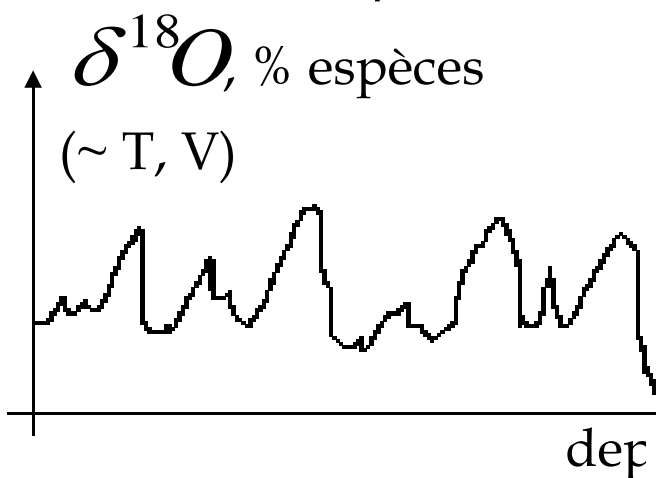
Une pierre d'achoppement pour notre approche

1. Données

- géochimiques, micropaléontologiques
- séries temporelles (*), sections (**)

2. Avancées théoriques

- météorologie dynamique, dynamique du climat
- océanographie physique & (biogéo)chimique
- glaciologie
- géodynamique
- théorie des systèmes dynamiques, mécanique céleste



Oscillations libres

et

Bifurcation de Hopf

1. Oscillations libres

- Amplitude, période et déphasage
- EDOs et espace des phases
- Effets des paramètres secondaires

2. Bifurcation de Hopf

- supercritique
- subcritique
- comportement général

Mécanisme de base des oscillations

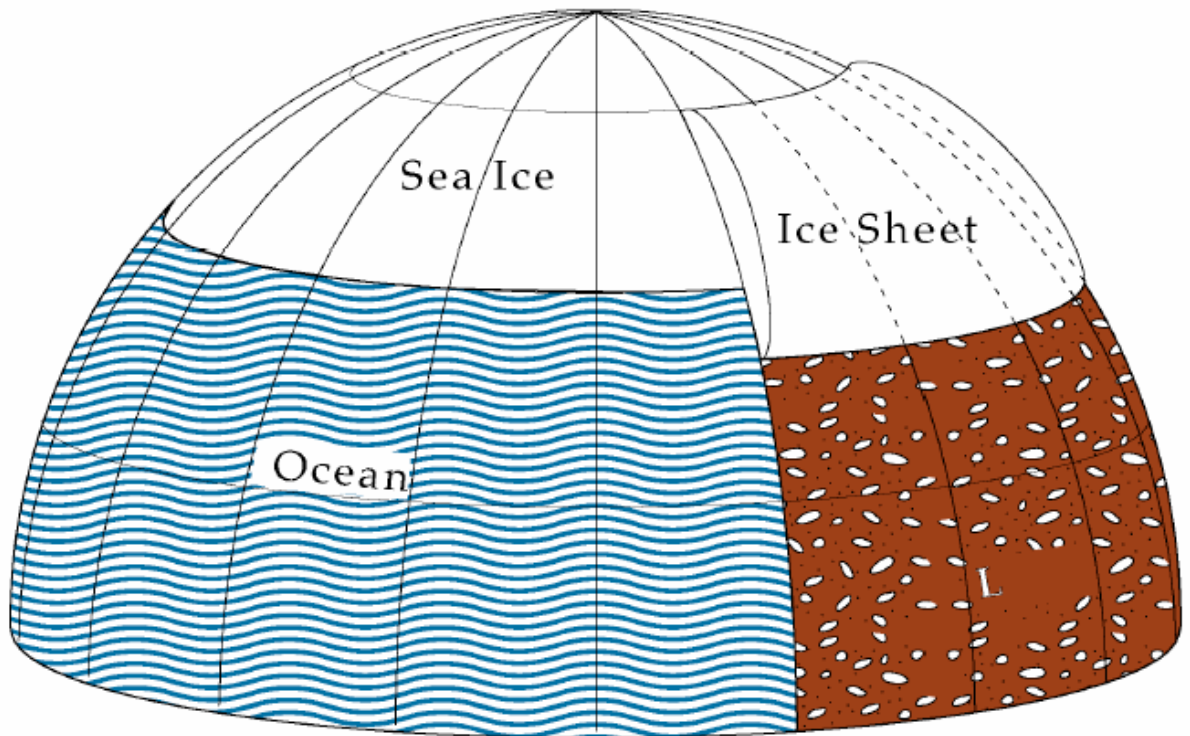
$$\dot{T} \cong -m$$

Rétroaction glace-albédo

⇒ Equilibres multiples;
Budyko (1968), Sellers (1969)

$$m \cong (1 - T)(T - 2)(3 - T)$$

stable instable stable



$$\dot{m} \cong T$$

Rétroaction température-précipitation

⇒ Variabilité interne : oscillations libres
Källen, Crafoord & Ghil (1979)

Équations du modèle

$$C_T \dot{T} = \underbrace{-k(T - T_0)}_{\text{Rayonnement IR}} + \underbrace{Q\{1 - \gamma(\alpha_0 + \alpha_1 \ell) - (1 - \gamma)\alpha_{mer}(T)\}}_{\text{Rayonnement solaire absorbé } Q(1-\alpha)}$$

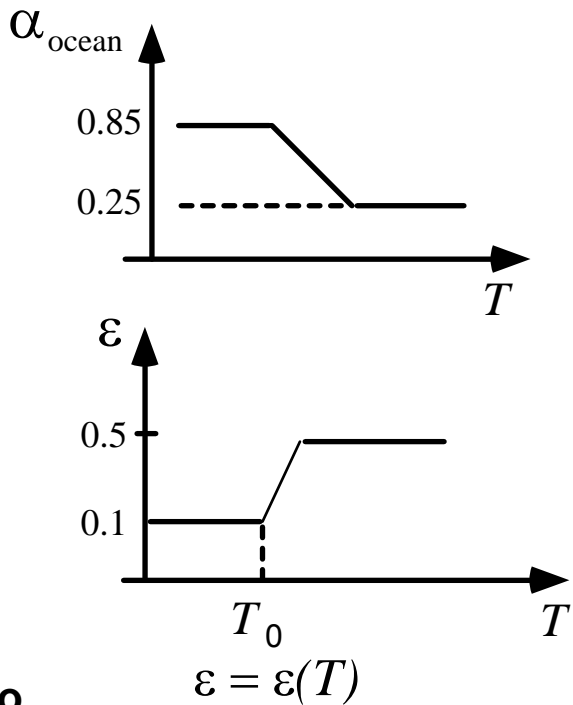
$$C_L \dot{\ell} = \ell^{-1/2} \{ [1 + \varepsilon(T)] \ell_T(T, l; s) - \ell \}$$

γ – fraction de la surface de la Terre occupée par les continents

$$\dot{T} \cong -\alpha, \quad \alpha \sim m$$

$$\dot{m} \cong p, \quad p \sim T$$

$$\begin{cases} \dot{T} \cong -m & \text{glace-albédo} \\ \dot{m} \cong T & \text{précipitation-température} \end{cases}$$

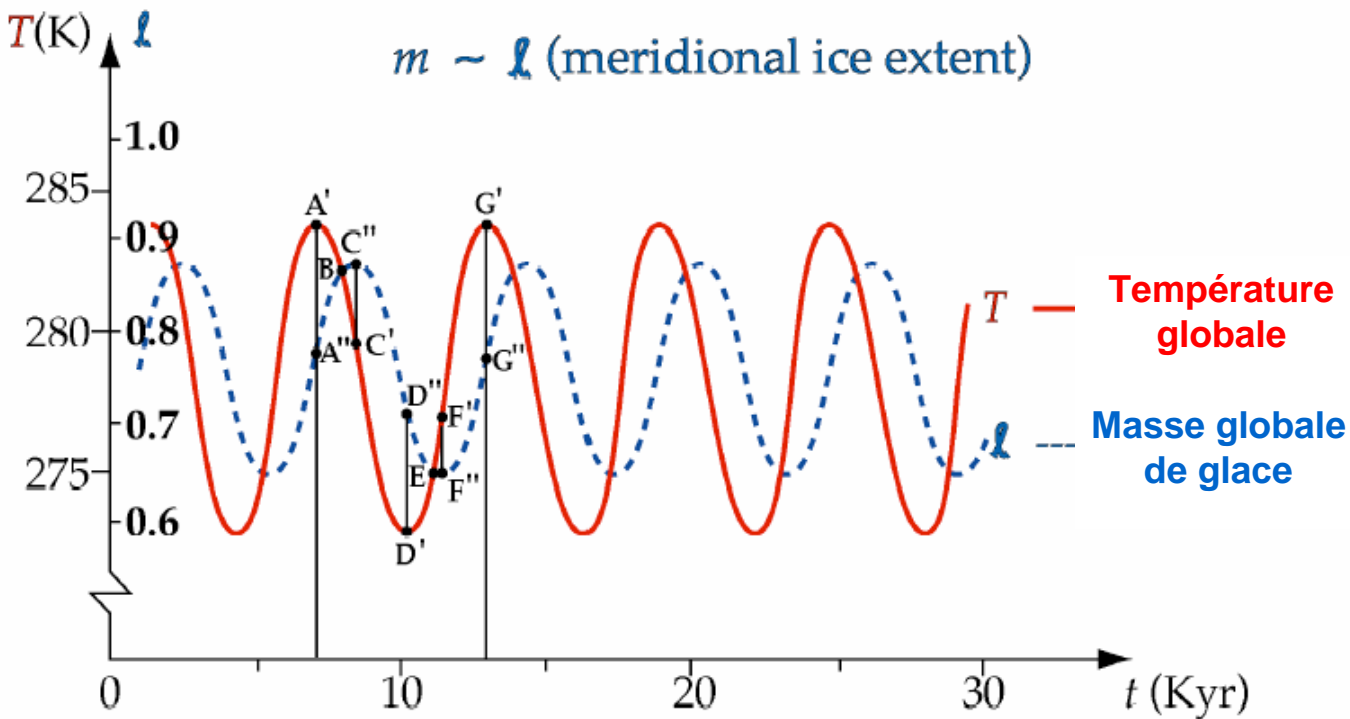


Oscillations libres dans un modèle couplé EBM-ISM

(ISM = Ice-Sheet Model, Modèle de calotte glaciaire)

Oscillations auto-entretenues à forçage constant *

$$\begin{aligned} \dot{T} &\cong -\alpha, & \alpha &\sim m & \alpha &- \text{albédo} \\ \dot{m} &\cong p, & p &\sim T & p &- \text{précipitation} \end{aligned}$$



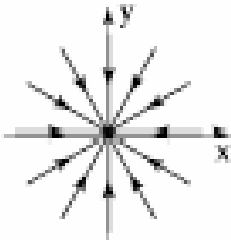
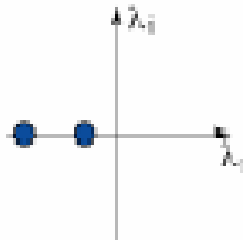
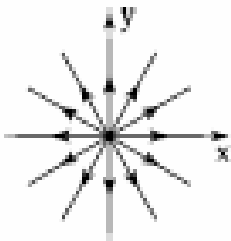
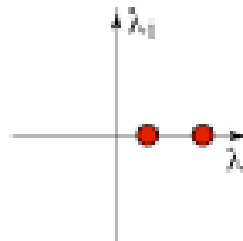
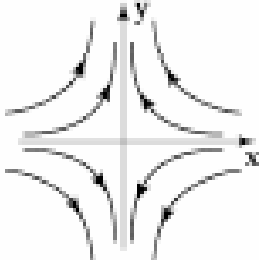
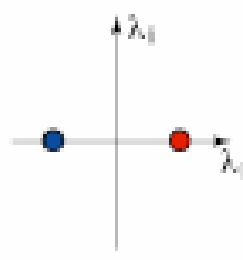
$$\begin{cases} \dot{T} \cong -m & \text{rétroaction glace-albédo} \\ \dot{m} \cong T & \text{rétroaction précipitation-température} \end{cases}$$

N.B. : Le déphasage entre T et l (m) est essentiel à l'oscillation ; la période est de 6 à 7000 ans sur une large gamme de paramètres.

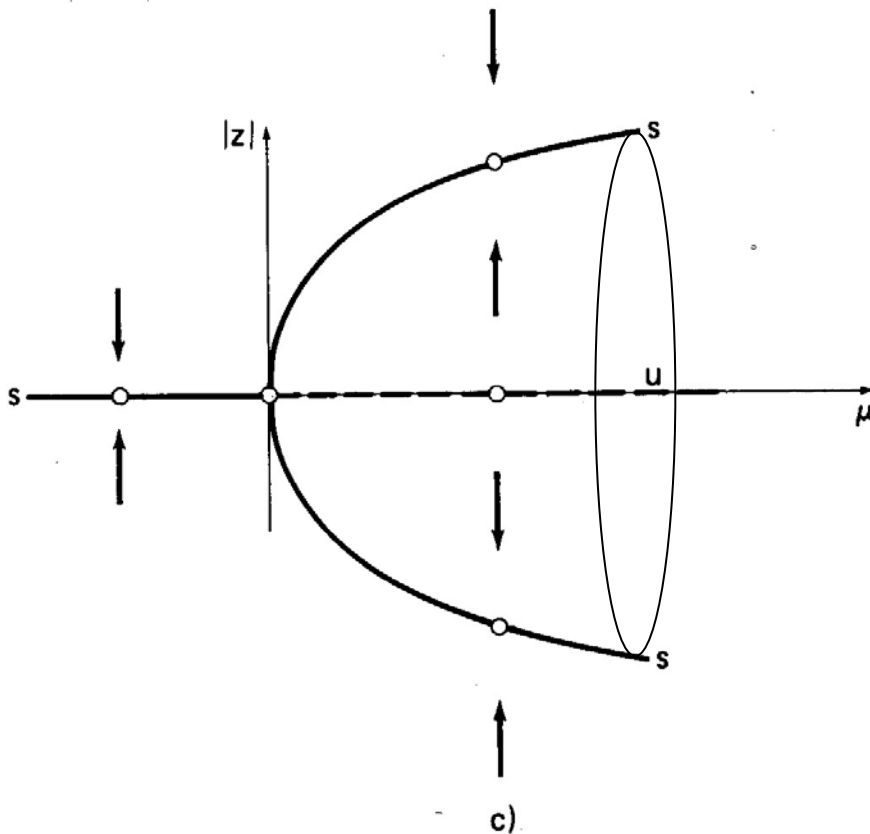
* Tiré de Ghil et Le Treut (1981, *J. Geophys. Res.*)
et Källén, Crafoord & Ghil (1979, *J. Atmos. Sci.*)

Points critiques

Trajectoires Valeurs propres Trajectoires Valeurs propres

 <p>Nœud stable</p>	 <p>Foyer stable</p>
 <p>Nœud instable</p>	 <p>Foyer instable</p>
 <p>Point de col</p>	 <p>Vortex</p>

Bifurcation de Hopf *



Théorème de la variété centrale :

Ces bifurcations se rencontrent dans des systèmes d'un nombre élevé de degrés de liberté, et même dans des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDPs).

* Poincaré – Andronov – Hopf

Bifurcation de Hopf locale

Équations

$$\dot{z} = (\mu + i\omega)z + c(z\bar{z})z$$

z – complexe

c, ω, μ – réels

$c, \omega \in R^* = R - \{0\}$, constantes

$\mu \in R$, paramètre

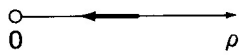
$$z = \rho^{1/2} e^{i\theta} \quad \rho = z\bar{z} > 0$$

$$\begin{cases} \dot{\rho} = 2\rho(\mu + c\rho) \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

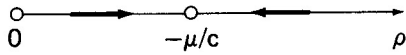
Bifurcations de Hopf (locales) Super- et subcritique

$$\begin{cases} \dot{\rho} = 2\rho(\mu + c\rho) \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

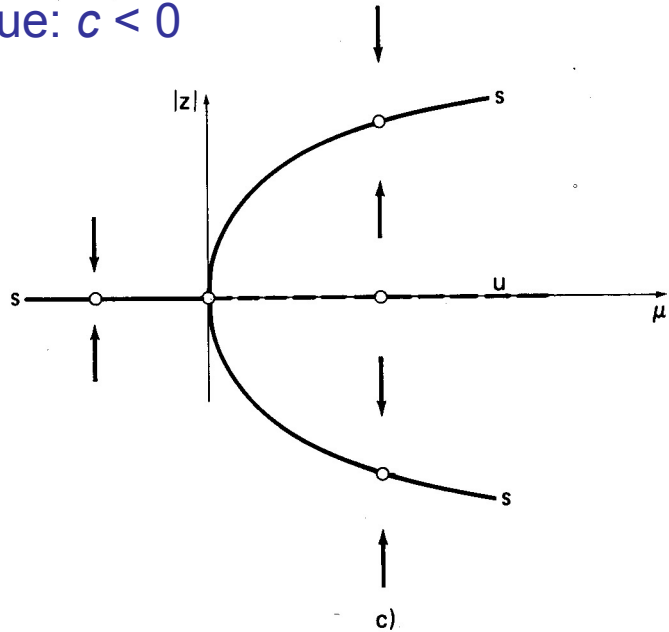
- Bifurcation supercritique: $c < 0$



a) $\mu < 0$.



b) $\mu > 0$.



c)

Bifurcation de Hopf "globale"

Équations

$$\dot{z} = (\mu + i\omega)z + c(z\bar{z})z + d(z\bar{z})^2 z$$

z – complexe
 c, d, ω, μ – réels

$c, d, \omega \in \mathbb{R}^*$, constantes
 $\mu \in \mathbb{R}$, paramètre

$$\begin{cases} \dot{\rho} = 2\rho(\mu + c\rho + d\rho^2) \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

Bifurcation subcritique ($c=1$)

Si $d > 0$, même cas que pour la bifurcation locale

Si $d < 0$, deux branches stables supplémentaires apparaissent

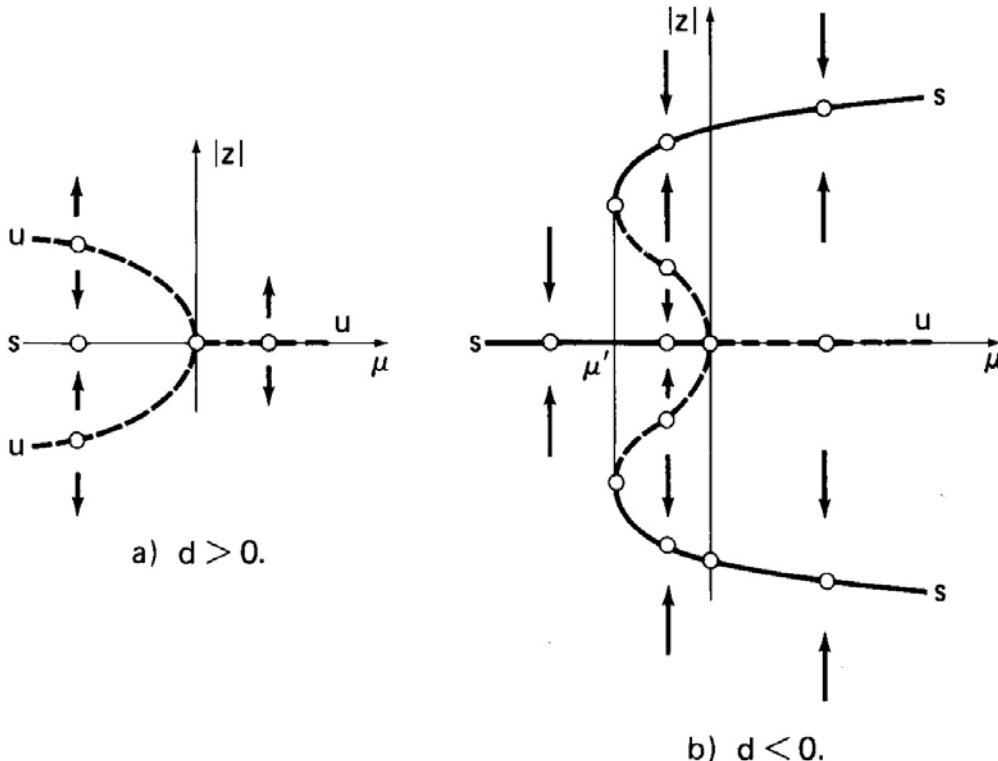
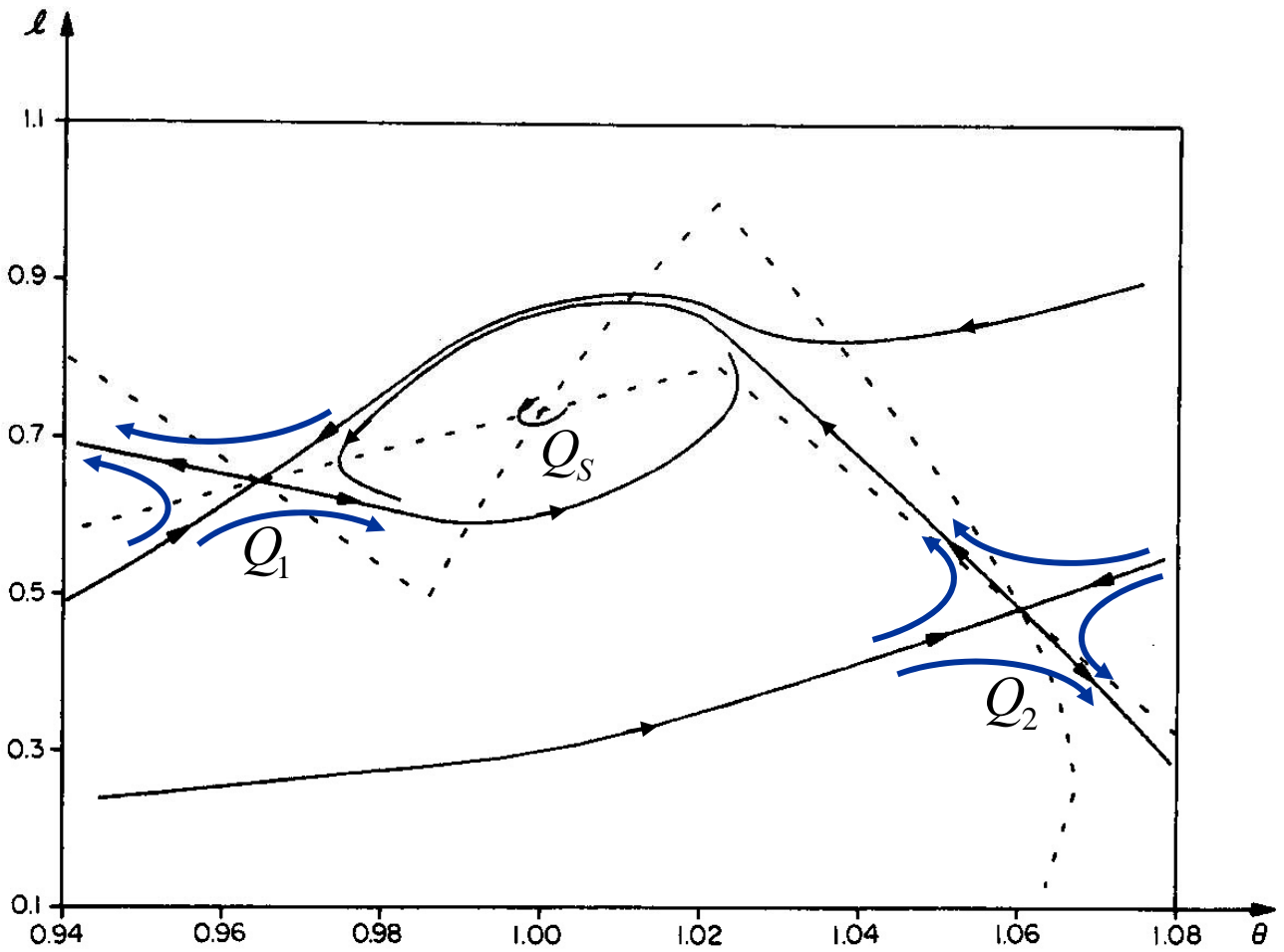
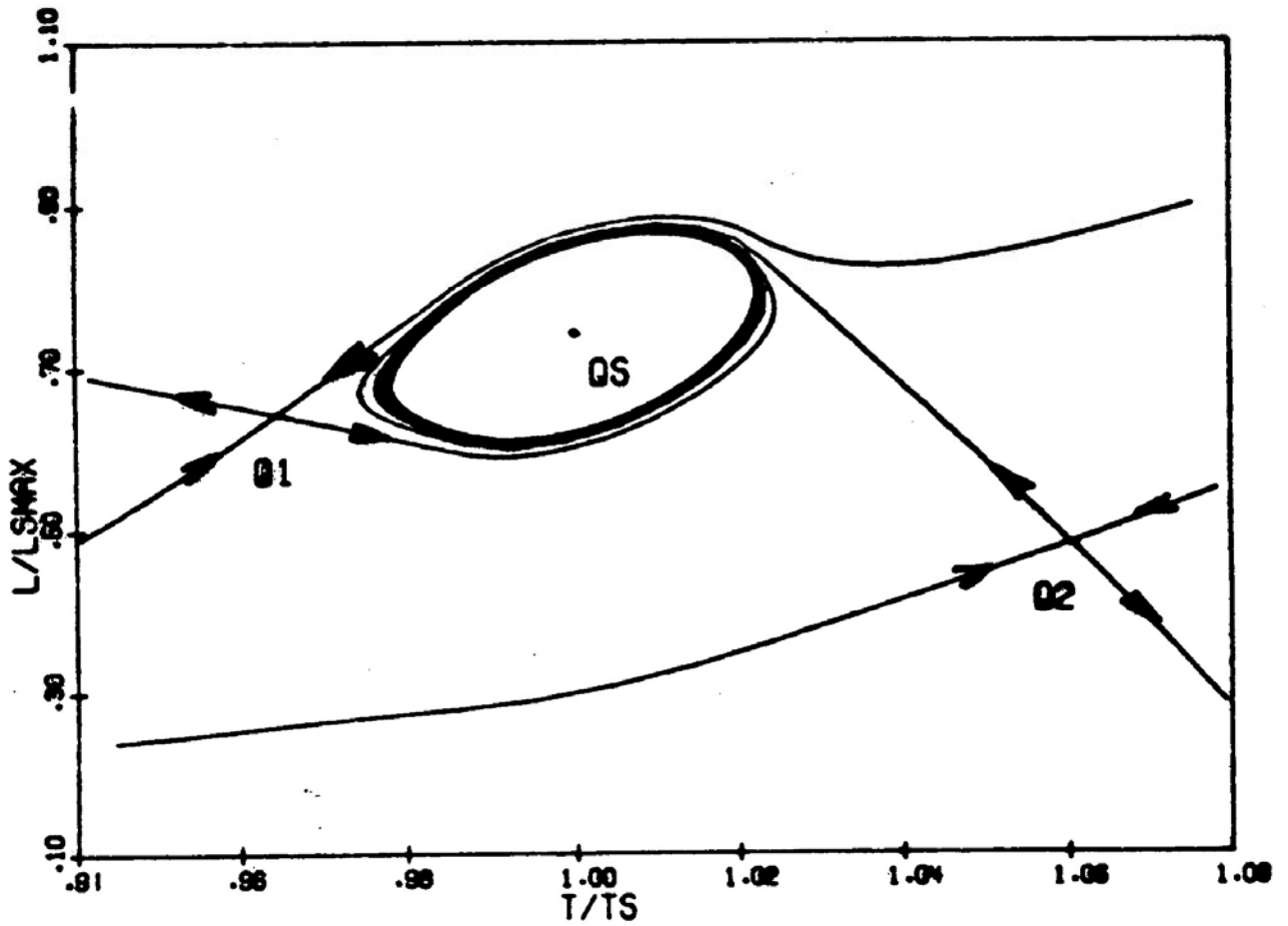


Image générale



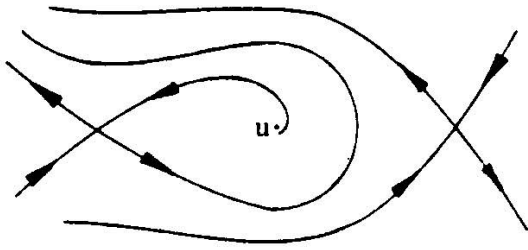
Variétés stable et instable. *

* Tiré de Ghil & Tavantzis (1983), *SIAM J. Appl. Math.*, 1019-1041.

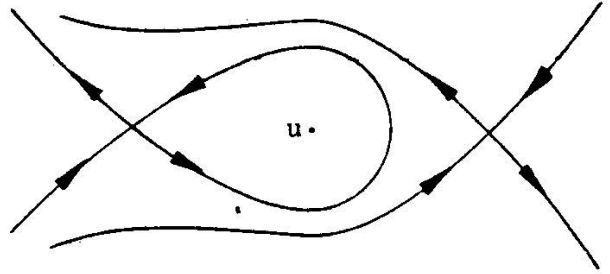


Variétés stable et instable pour $\mu = 1,76$. *

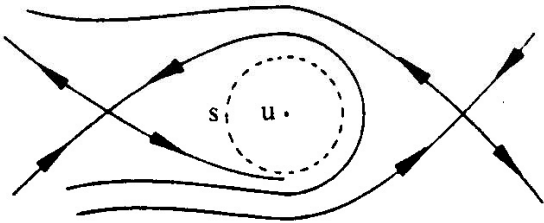
* Tiré de Ghil & Tavantzis (1983), *SIAM J. Appl. Math.*, 1019-1041.



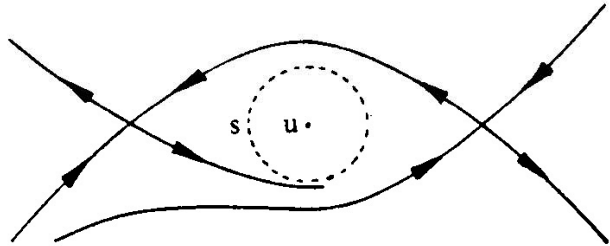
(a) $\mu < \mu_1 = 1.5790\dots$



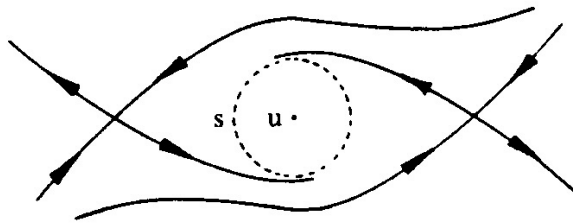
(b) $\mu = \mu_1 = 1.5790\dots$



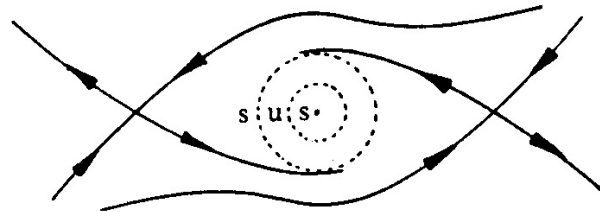
(c) $\mu_1 < \mu < \mu_2 = 1.6207\dots$



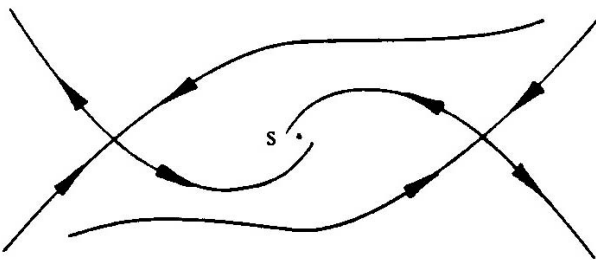
(d) $\mu = \mu_2 = 1.6207\dots$



(e) $\mu_2 < \mu < \mu_3 = 1.7583\dots$



(f) $\mu_3 < \mu < \mu_4 = 1.76735\dots$



(g) $\mu_4 < \mu$

