

# III. Ondes de Gravité

- Ondes de gravité barotrope
- Ondes de pure gravité baroclines
- Génération des ondes de gravité
- Ondes de montagnes
- Déferlement des ondes de gravité
- Ondes de Lee
- Ondes d'inertio gravité

# Exemples de *nuages lenticulaires* formés par des ondes de gravité



# Ondes de gravité barotropes

C'est le cas le plus simple qui se traite à partir des équations d'eau peu profonde linéarisées en ne prenant pas en compte le terme de Coriolis car la fréquence est supposée grande par rapport à  $f$ .

$$\partial_t u = -g \partial_x \eta$$

$$\partial_t v = -g \partial_y \eta$$

$$\partial_t \eta = H_1 \partial_z w = -H_1 (\partial_x u + \partial_y v)$$

d'où on tire  $\partial_{tt} \eta = g H_1 \nabla^2 \eta$

Cette équation possède des solutions ondulatoires avec une vitesse de phase  $c = \sqrt{g H_1}$

Application: propagation des vagues de surface et des tsunamis

# Ondes de pure gravité baroclines (1)

## LES EQUATIONS NON HYDROSTATIQUES

$$D_t \mathbf{u} + \partial_x \phi' = 0$$

$$D_t \mathbf{v} + \partial_y \phi' = 0$$

$$D_t \mathbf{w} + \partial_z \phi' - b = 0$$

$$D_t b + w N^2 = 0$$

$$\partial_x \mathbf{u} + \partial_y \mathbf{v} + \partial_z \mathbf{w} - \frac{w}{H_0} = 0$$

avec  $b = \frac{g}{\bar{\theta}} \theta'$  (flottaison),

$$\tilde{w} = D_t z,$$

et  $N^2 = \frac{g}{\bar{\theta}} d_z \bar{\theta}$

On a retiré les termes de Coriolis car l'échelle est supposée petite et on a ajouté l'accélération verticale [justifier sa forme dans ces équations].

Forme linéarisée des équations

$$\partial_t u + U \partial_x u = -\partial_x \phi$$

$$\partial_t v + U \partial_x v = -\partial_y \phi$$

$$\partial_t w + U \partial_x w + \partial_z \phi - b = 0$$

$$\partial_t b + U \partial_x b + w N^2 = 0$$

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w - \frac{w}{H_0} = 0$$

On écrit

$$(u, v, w, b, \phi) = e^{\frac{z}{2H_0}} (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{b}, \hat{\phi}) e^{i(kx + ly + mz - \omega t)}$$

d'où

$$\hat{u} = \frac{k}{\omega - U k} \hat{\phi}, \quad \hat{v} = \frac{l}{\omega - U k} \hat{\phi}$$

$$-i(\omega - U k) \hat{w} + \left( i m + \frac{1}{2 H_0} \right) \hat{\phi} - \hat{b} = 0$$

$$\hat{b} = i \frac{N^2}{\omega - U k} \hat{w}$$

$$i k \hat{u} + i l \hat{v} + \left( i m - \frac{1}{2 H_0} \right) \hat{w} = 0$$

## Rappel

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \frac{k}{\omega - U k} \hat{\phi}, & \hat{v} &= \frac{l}{\omega - U k} \hat{\phi} \\ -i(\omega - U k) \hat{w} + \left( i m + \frac{1}{2 H_0} \right) \hat{\phi} - \hat{b} &= 0 \\ \hat{b} &= i \frac{N^2}{\omega - U k} \hat{w} \\ i k \hat{u} + i l \hat{v} + \left( i m - \frac{1}{2 H_0} \right) \hat{w} &= 0\end{aligned}$$

Ondes de pure  
gravité baroclines (2)

En combinant, on obtient  $\left( (\omega - U k) - \frac{N^2}{\omega - U k} \right) \hat{w} = \left( m - \frac{i}{2 H_0} \right) \hat{\phi}$

puis  $\left( (\omega - U k) - \frac{N^2}{\omega - U k} \right) \frac{i(k^2 + l^2)}{(\omega - U k)} + \left( i m - \frac{1}{2 H_0} \right) \left( m - \frac{i}{2 H_0} \right) = 0$

d'où  $(k^2 + l^2) \left( 1 - \frac{N^2}{(\omega - U k)^2} \right) + \left( m^2 + \frac{1}{4 H_0^2} \right) = 0$

et finalement on obtient la relation de dispersion

$$(\omega - U k)^2 = N^2 \frac{k^2 + l^2}{m^2 + k^2 + l^2 + \frac{1}{4 H_0^2}}$$

En bleu, les termes provenant de la contribution non hydrostatique.

# Ondes de pure gravité baroclines (3)

Considérons pour simplifier le cas  $l=0$

La relation de dispersion vérifie alors  $\omega - U k = \pm N \frac{k}{\left(m^2 + k^2 + \frac{1}{4 H_0^2}\right)^{1/2}} < N$

Note: On suppose, sans perte de généralité, que  $\omega > 0$

Supposons  $k > 0$  et  $m < 0$ ,  $\Rightarrow$  les lignes de phase sont inclinées vers l'ouest.

On se place dans le référentiel du vent ( $U=0$ ).

On suppose  $|m|, k \gg 1/H_0$

d'où  $\omega = k N (m^2 + k^2)^{-1/2}$

$$\hat{u} = \frac{k}{\omega} \hat{\phi}, \quad \hat{w} \left( \omega - \frac{N^2}{\omega} \right) = m \hat{\phi}, \quad \hat{w} = -\frac{i \omega}{N^2} \hat{b}$$

Donc :  $u$  et  $w$  sont en phase avec  $\phi$ ,  
la température est en quadrature avec  $\phi$ .

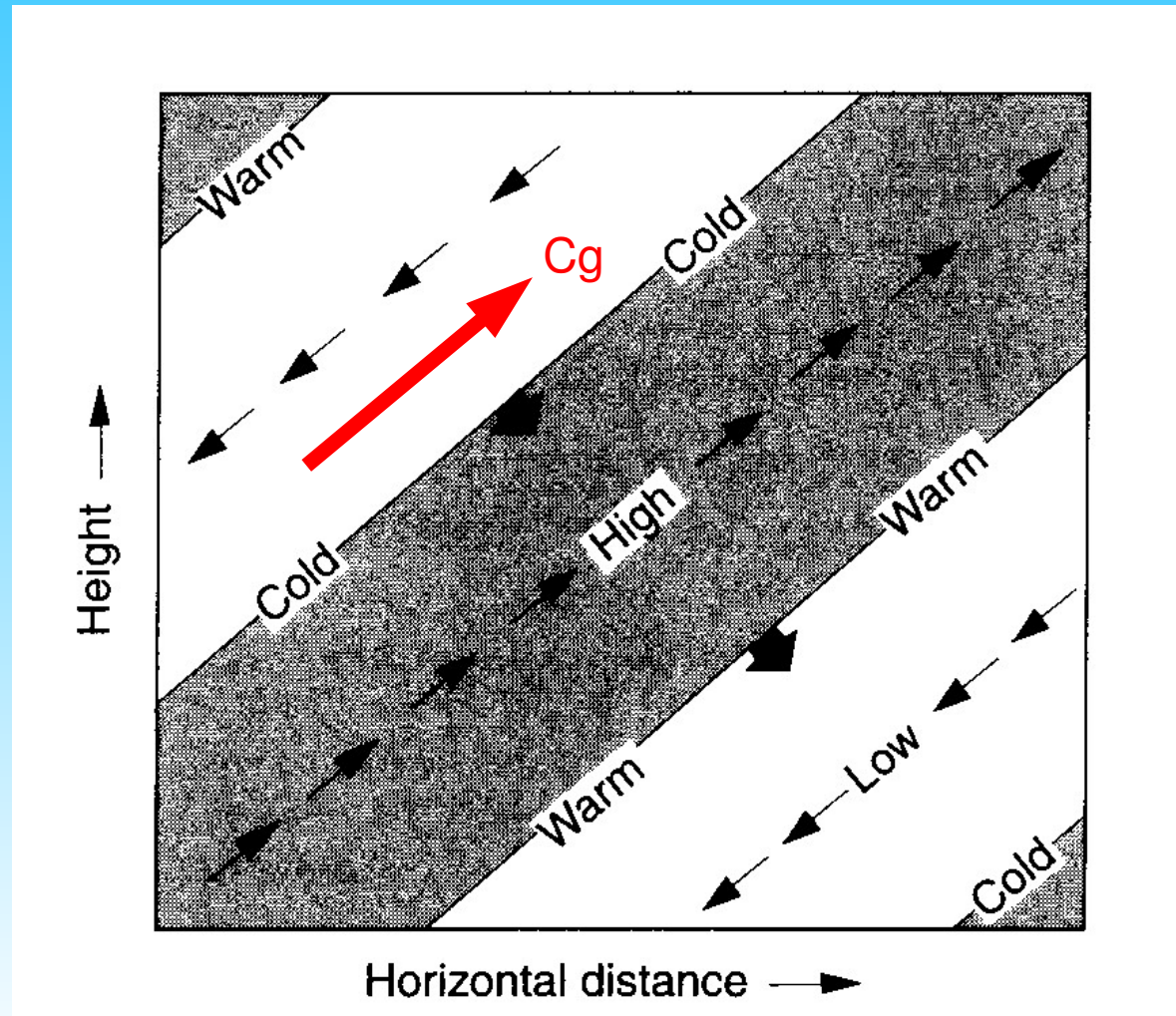
$$\vec{c} = \frac{N k}{(m^2 + k^2)^{3/2}} (k, m)$$

Elle est (par définition) parallèle au vecteur d'onde et il y a propagation vers le bas

La vitesse de groupe est

$$\vec{c}_g = \frac{N}{(k^2 + m^2)^{3/2}} (m^2, -k m)$$

Elle est orthogonale au vecteur d'onde et est dirigée vers le haut



# Sources des ondes de gravité

- Montagnes
- Convection
- Jets
- Instabilités de Kelvin-Helmholtz
- Ajustement géostrophique

# Ondes de gravité et relief

La relation de dispersion stationnaire est  $\left(k^2 + m^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)U^2 = N^2$

$$\text{soit } m^2 = \frac{N^2}{U^2} - k^2 - \frac{1}{4H_0^2}$$

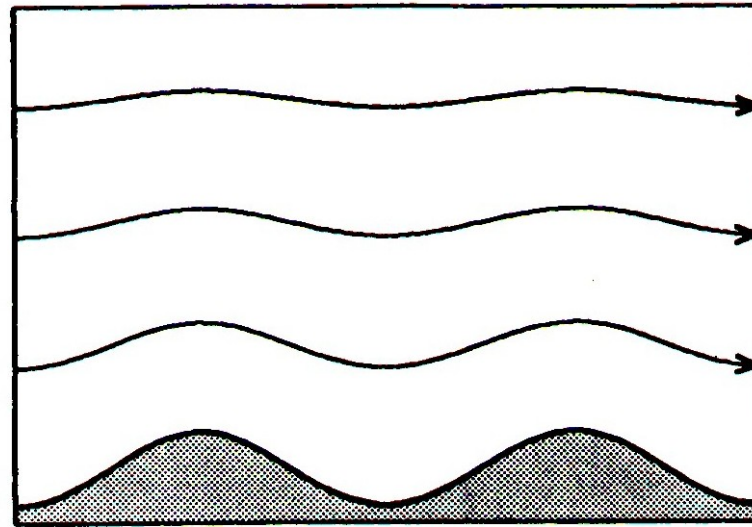
Il y a propagation verticale ( $m$  réel) si  $\frac{N^2}{U^2} - k^2 - \frac{1}{4H_0^2} > 0$ ,

sinon l'onde est évanescente.  $k$  étant fixé par l'orographie, pour  $N$  et  $U$  donnés, ce sont les reliefs de plus grande extension qui permettent la propagation vers le haut.

En supposant  $U > 0$ , sachant que la vitesse de groupe doit être dirigée vers le haut et que la vitesse de phase doit être dirigée vers l'ouest dans le référentiel du vent pour compenser l'advection, on obtient  $k < 0$  et  $m < 0$ . Plus précisément:

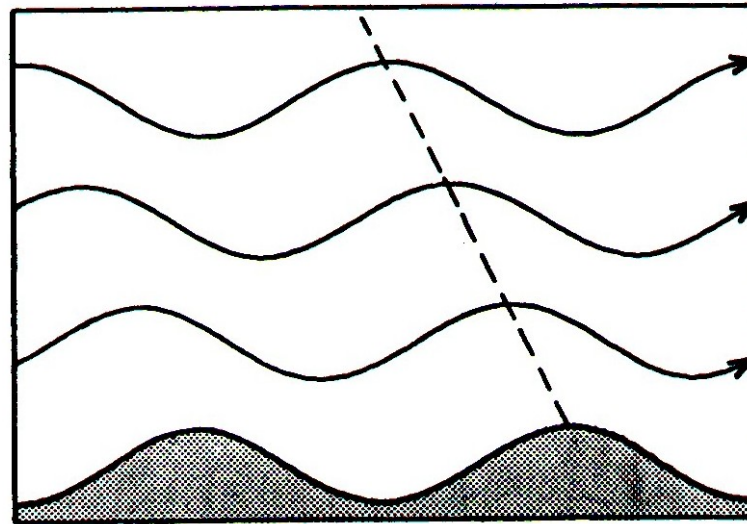
$$\omega = -\frac{kN}{K^{3/2}}, \quad c_{gx} = -N \frac{m^2}{K^{3/2}}, \quad c_{gz} = N \frac{km}{K^{3/2}}, \quad K^2 = k^2 + m^2 + \frac{1}{4H_0^2}$$





(a)

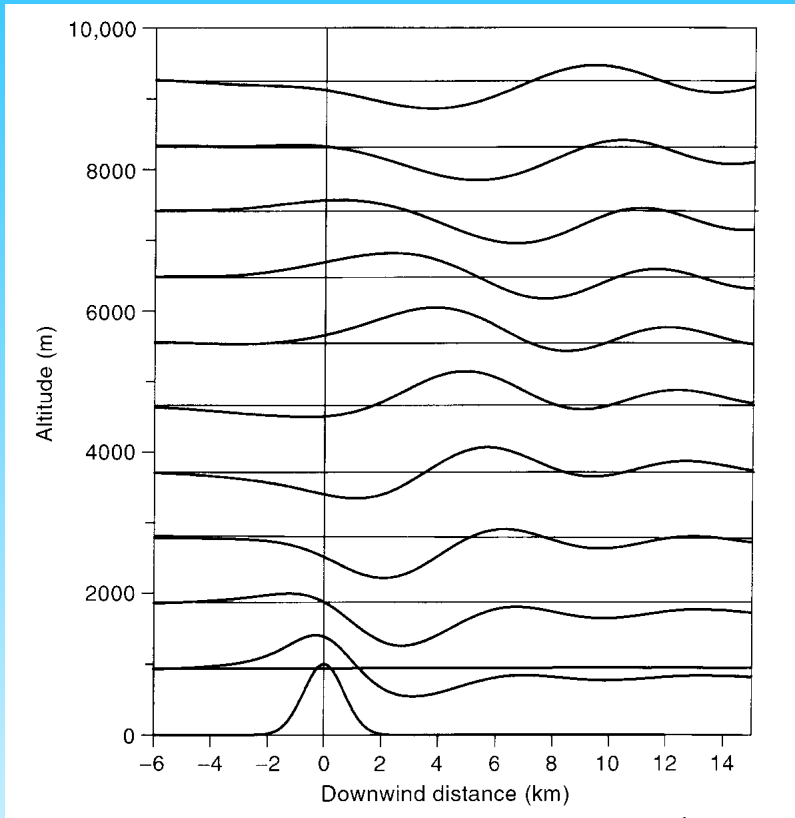
évanescent



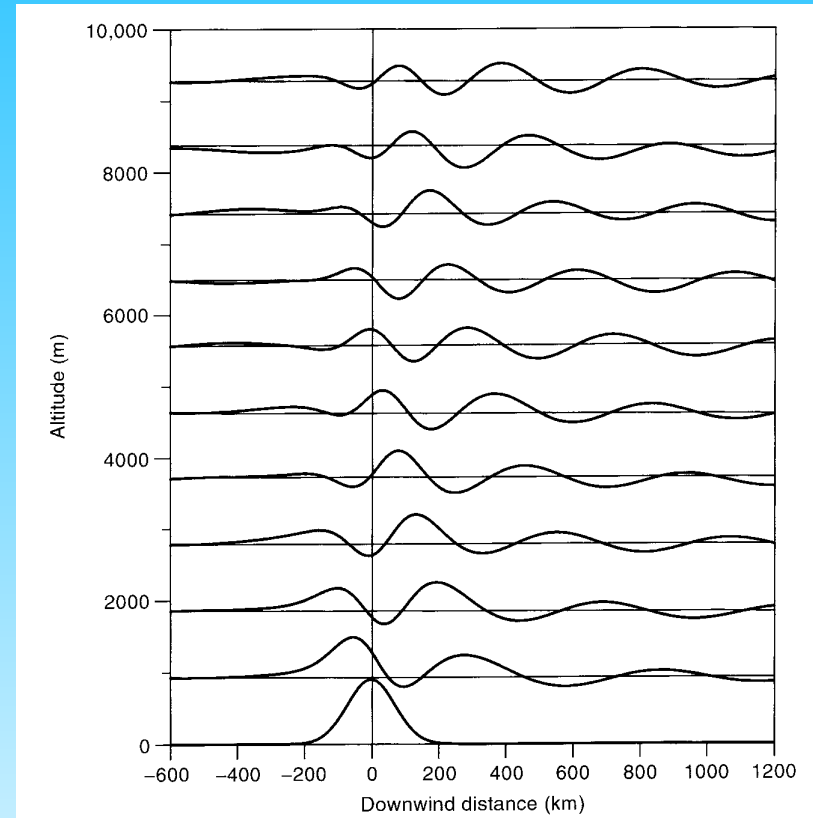
(b)

propagation

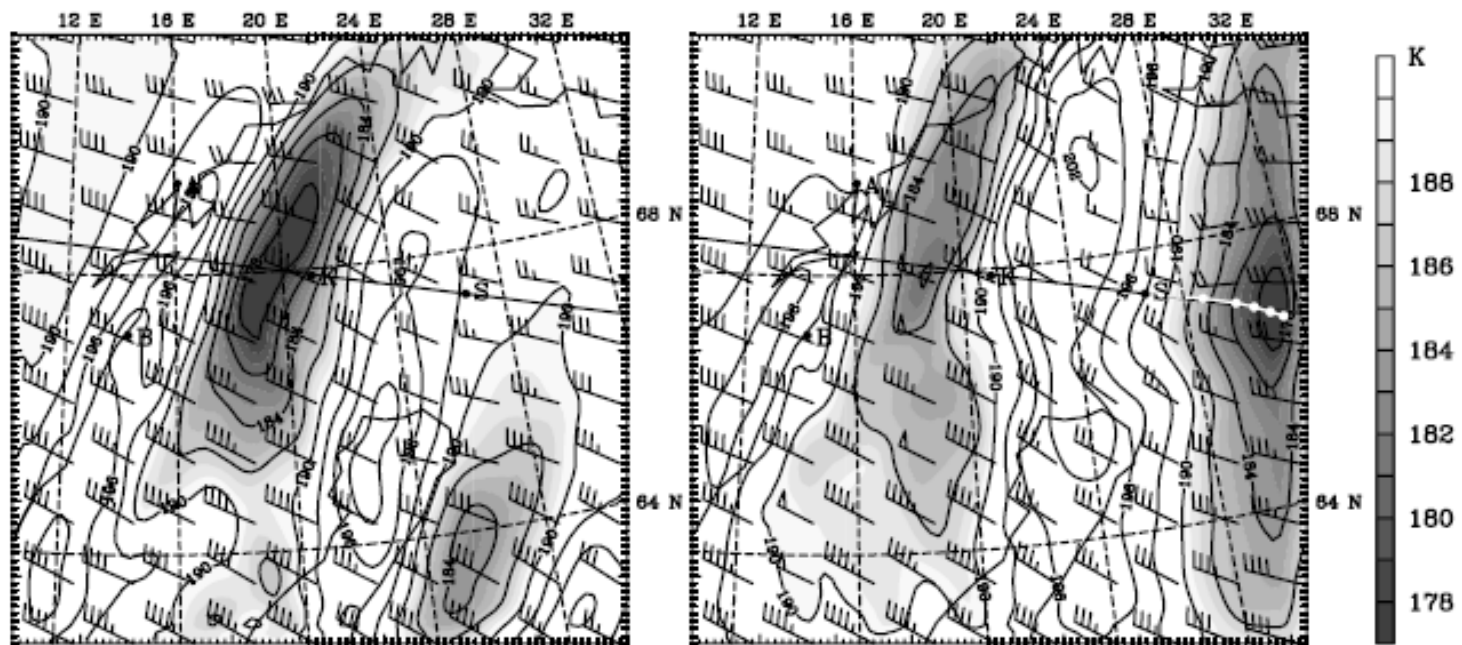
# Propagation d'un paquet d'onde stationnaire



Montagne gaussienne de largeur 1km



Montagne gaussienne de largeur 100km



température

vent horizontal

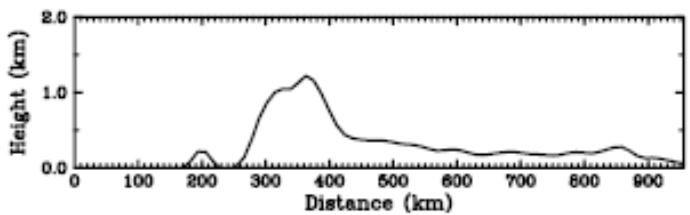
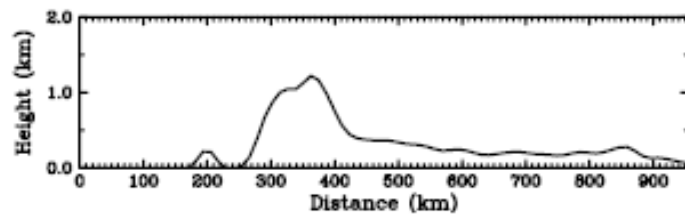
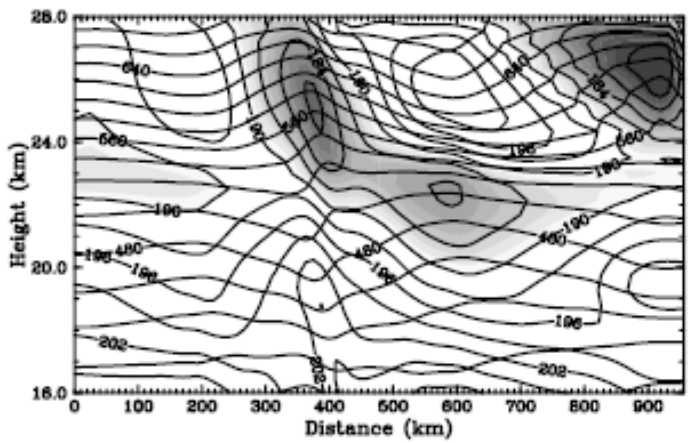
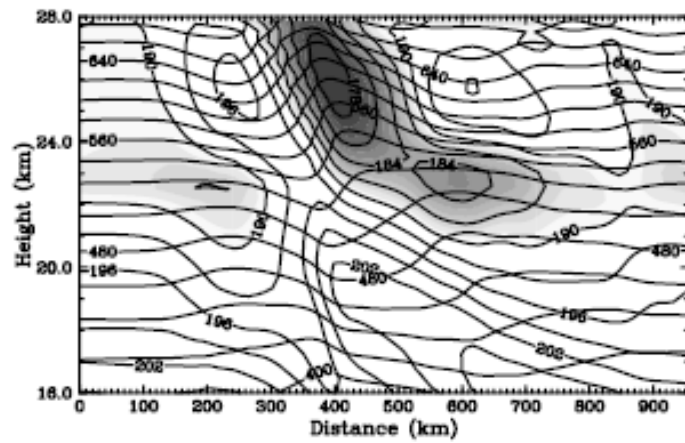
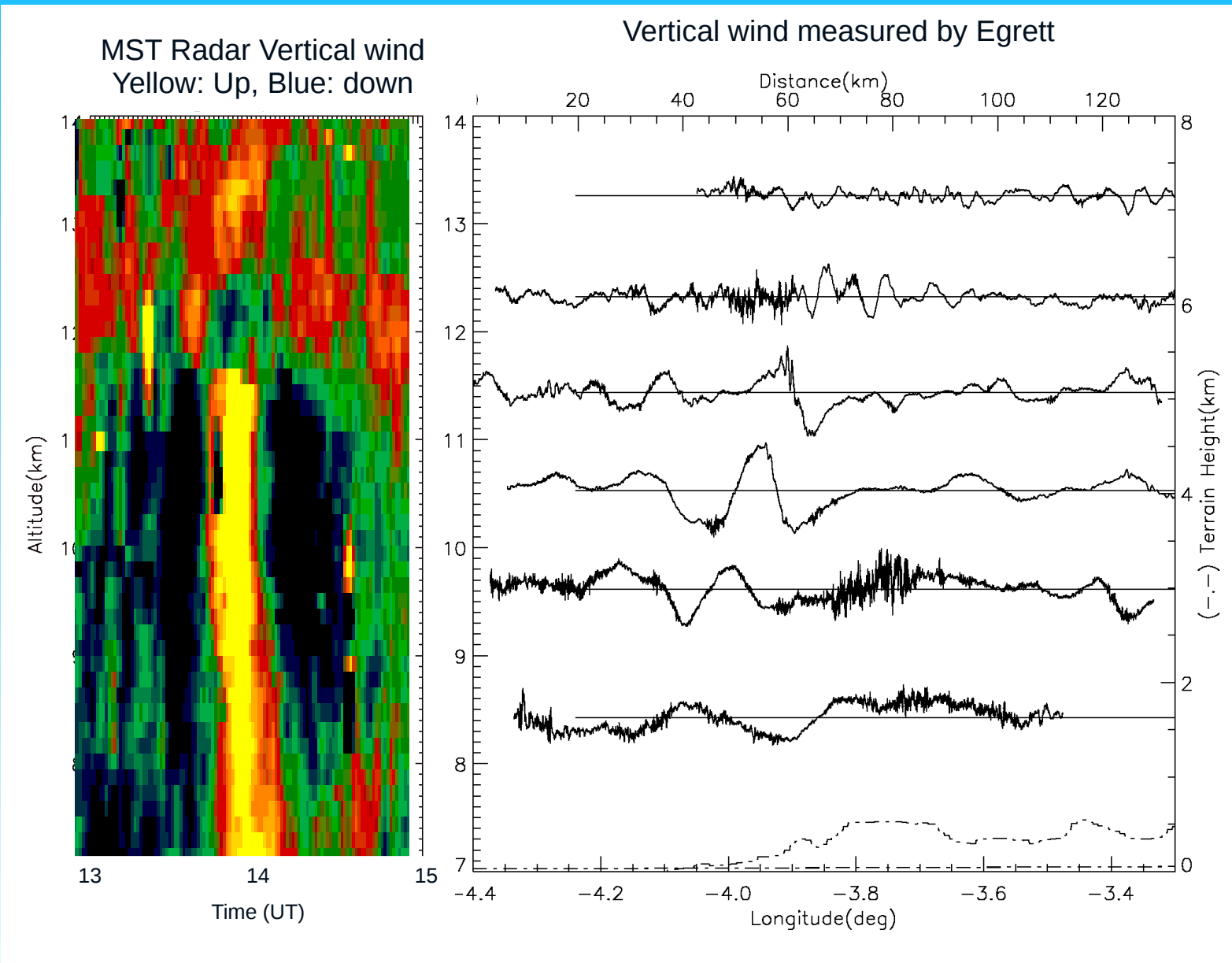


Figure 2. (top) Horizontal and (middle) vertical cross sections of temperature and horizontal wind in a 3-D mesoscale simulation of flow over northern Scandinavia. (bottom) Terrain height beneath the vertical cross section. Modified after *Dömbrack et al.* [1999].

Fritts &  
Alexander,  
*Rev. Geophys.*,  
2003

B.Legras, 2008

# Déferlement d'une onde de gravité



# Ondes de Lee pour un écoulement variant verticalement et piégeage

On se place ici dans le cadre de l'approximation de Boussinesq avec  $v=0$ , pour lequel les équations stationnaires sont

$$\begin{aligned}U \partial_x u + \partial_z U w &= -\partial_x \phi \\U \partial_x w + \partial_z \phi - b &= 0 \\U \partial_x b + w N^2 &= 0 \\\partial_x u + \partial_z w &= 0\end{aligned}$$

Dès lors, en éliminant  $\phi$  entre la première et la deuxième équation

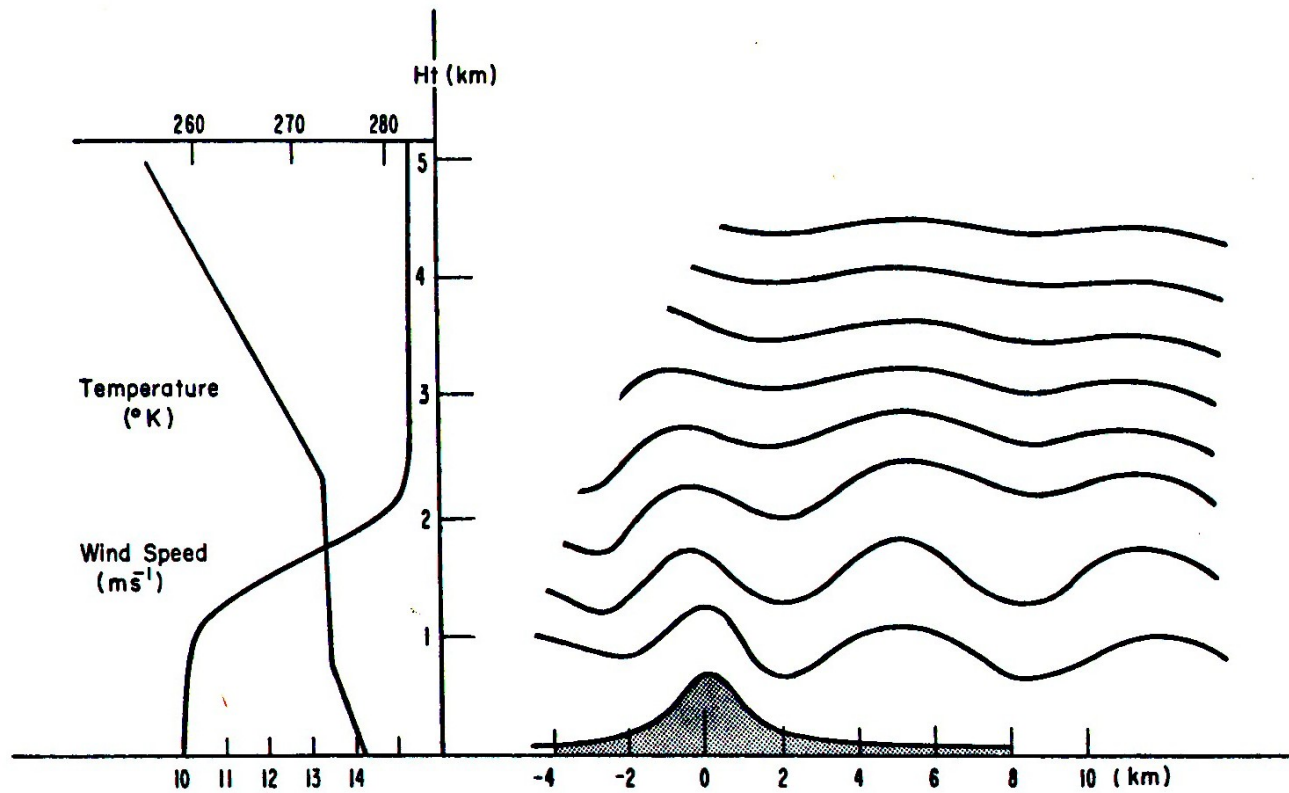
$$U \partial_{xx} w - \partial_x b - \partial_z U \partial_x u - U \partial_{zx} u - \partial_{zz} U w - \partial_z U \partial_z w = 0$$

En utilisant les deux dernières équations

$$U \left( \partial_{xx} w + \partial_{zz} w \right) + p^2 w = 0 \quad \text{avec} \quad p^2 = \frac{N^2}{U^2} - \partial_{zz} U$$

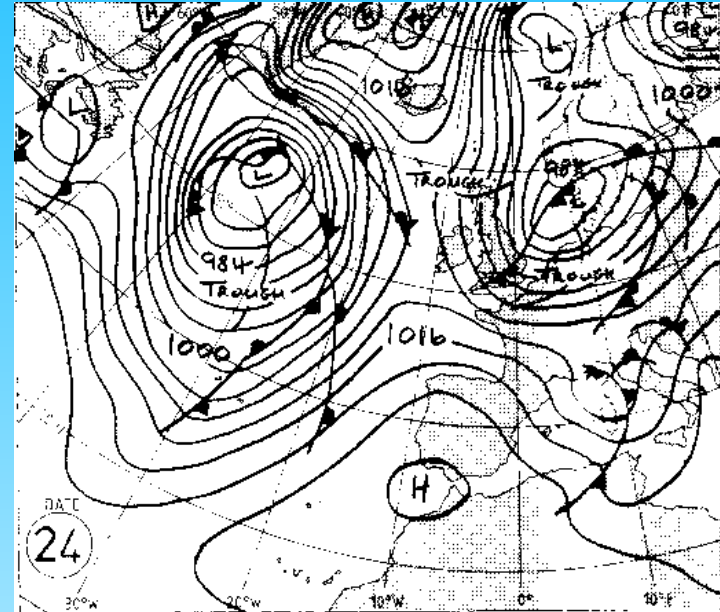
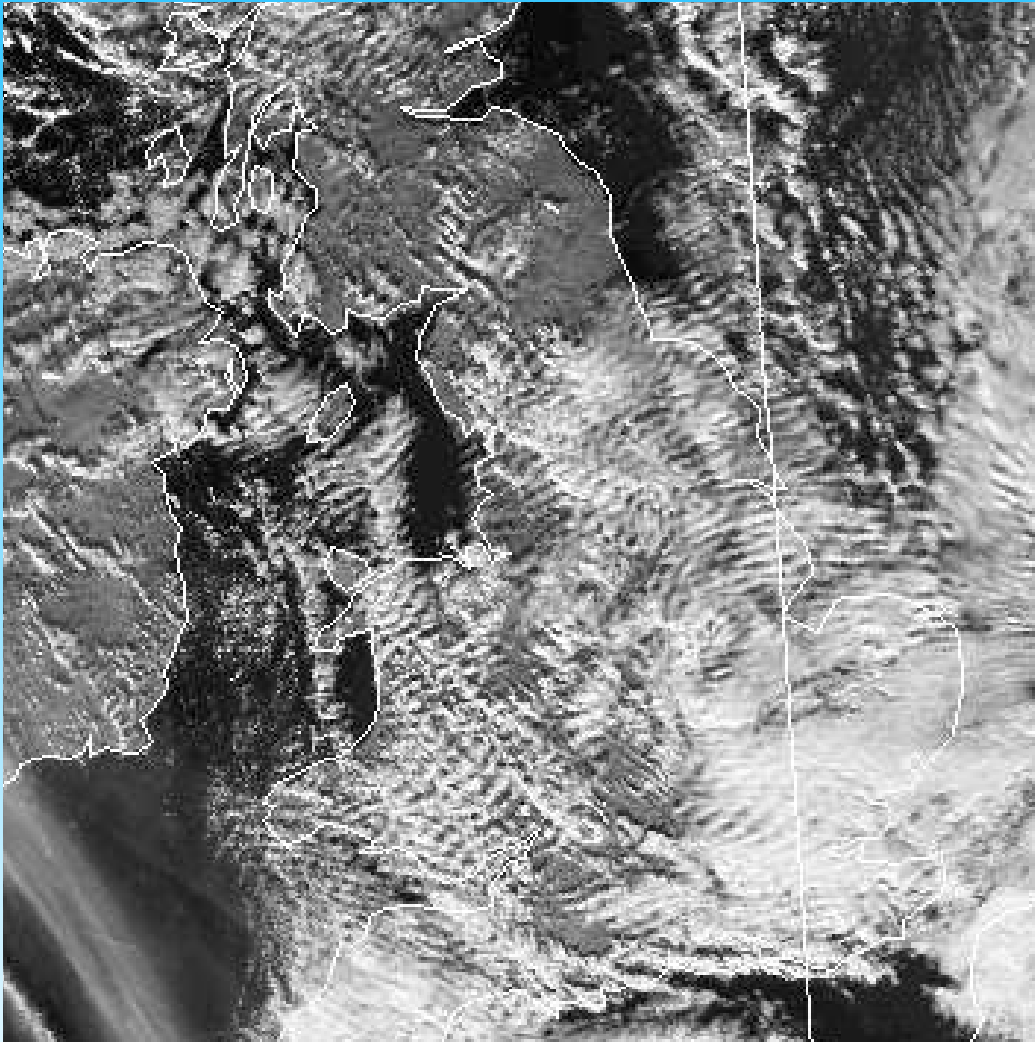
La propagation verticale dépend du signe de  $p^2$ . Positif s'il y a propagation.

## Ondes de Lee



**Fig. 8.11.** Air flow over a bell-shaped mountain of width  $L = 1$  km when the wind and temperature structure is as shown in the left panel. The result is that of Scorer (1949) as corrected by Gossard and Hooke (1975, Fig. 57-1). The vertical structure is such that it strongly emphasizes waves with a horizontal wavelength of 5.5 km, and a regular train of these waves can be seen in the lee of the mountain.

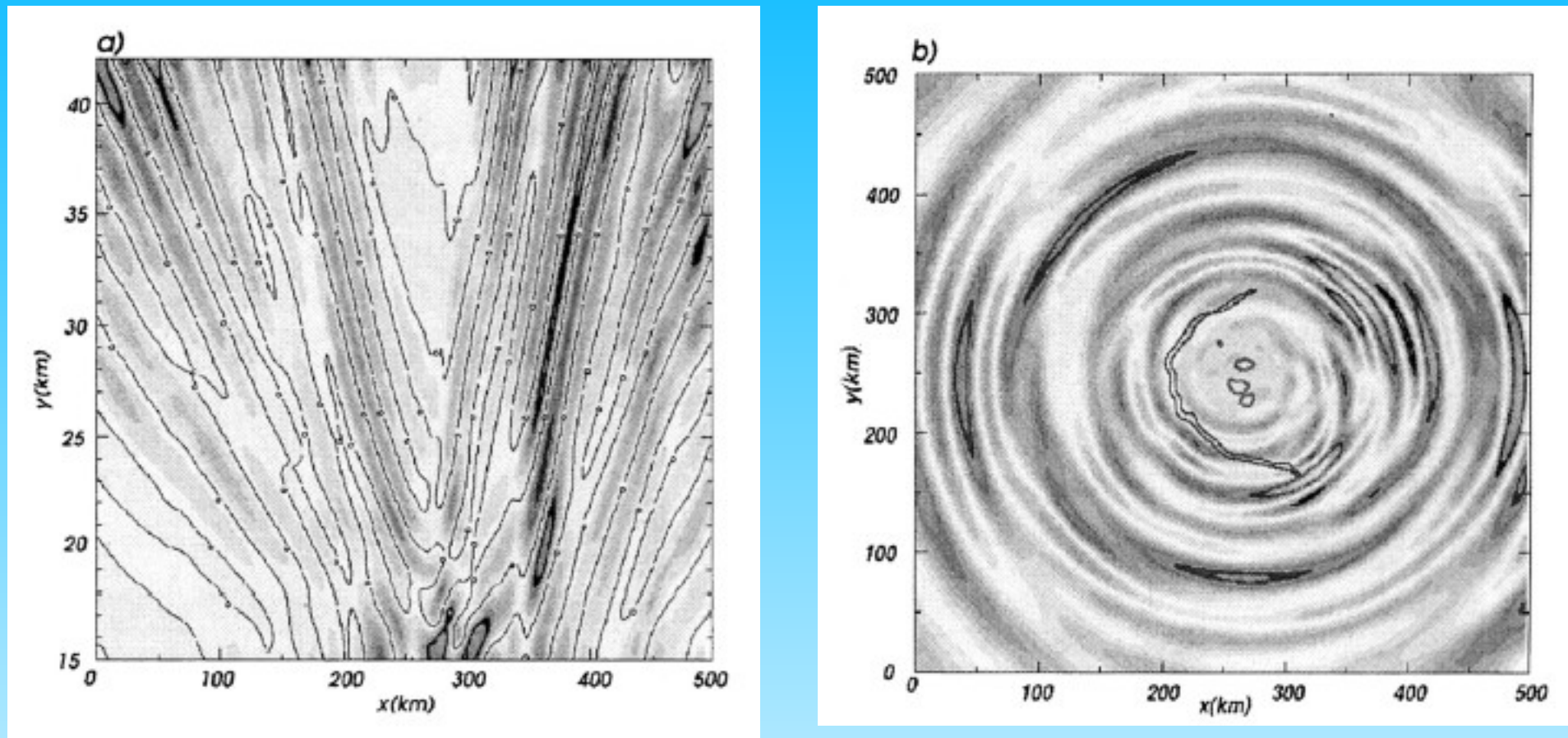
# Lee waves



24 Jan 2002

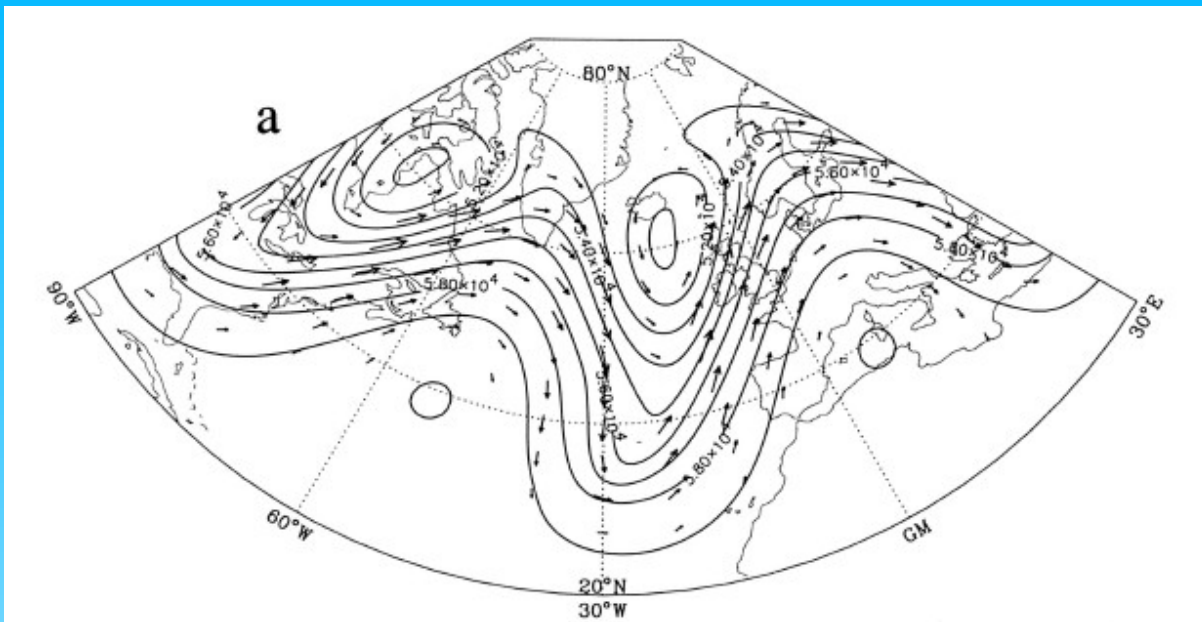
Ecoulement NNW sur GB avec  
une couche stable surmontant  
la couche limite: piégeage des  
ondes de gravité

## Emission d'ondes de gravité par la convection



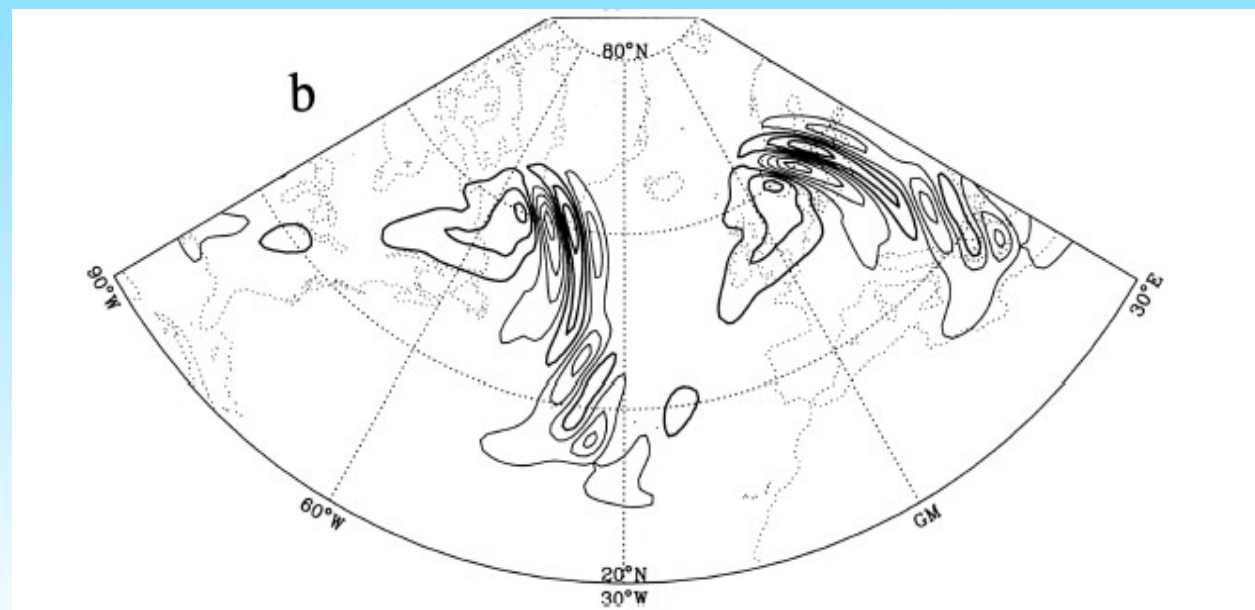
**Figure 5.** Three-dimensional study of gravity waves generated by convection in a mesoscale model with parameterized microphysics. (a) Vertical velocity patterns in a cross section in the vertical ( $z$ ) and zonal ( $x$ ) plane at  $y = 250$  km. (b) The  $x - y$  cross section of vertical velocity at  $z = 40$  km. Also shown in Figure 5b are the surface gust front (arc-shaped solid line) and regions of strong latent heating in the troposphere (small solid contours). After Piani *et al.* [2000, Figure 4] (reprinted with permission of the American Meteorological Society.)





Emission  
d'ondes de gravité  
par ajustement géostrophique  
(création d'une circulation  
agéostrophique pour rétablir  
l'équilibre du vent gradient)

**Figure 8.** The (a) 500 hPA geopotential height and winds and (b) 130 hPA horizontal divergence (bottom) displaying the excitation of inertia-gravity waves by geostrophic adjustment processes. After *O'Sullivan and Dunkerton* [1995] (reprinted with permission the American Meteorological Society).



# Ondes d'inertio-gravité (1)

On réintroduit  $f$  et on se place dans le cadre des équations hydrostatiques vu qu'il s'agit de modes de grande échelle.

Les équations sont (avec  $U=0$  pour simplifier)

$$\partial_t u - f_0 v + \partial_x \phi = 0$$

$$\partial_t v + f_0 u + \partial_y \phi = 0$$

$$\partial_{tz} \phi + w N^2 = 0$$

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w - \frac{w}{H_0} = 0$$

En passant en modes de Fourier  $(u, v, w, \phi) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\phi}) e^{\frac{z}{2H_0}} e^{i(kx + ly + mz - \omega t)}$

on obtient 
$$\begin{pmatrix} -i\omega & -f_0 \\ f_0 & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = -i\hat{\phi} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$$

soit 
$$\hat{u} = \frac{\omega k + i l f_0}{\omega^2 - f_0^2} \hat{\phi}, \quad \hat{v} = \frac{\omega l - i k f_0}{\omega^2 - f_0^2} \hat{\phi}, \quad \hat{w} = -\frac{\omega^2}{N^2} \left( m - \frac{i}{2H_0} \right) \hat{\phi}$$

d'où la relation de dispersion 
$$\omega^2 = f_0^2 + \frac{N^2(k^2 + l^2)}{m^2 + \frac{1}{4H_0^2}}$$

# Ondes d'inertio-gravité (2)

$$\omega^2 = f_0^2 + \frac{N^2(k^2 + l^2)}{m^2 + \frac{1}{4H_0^2}}$$

Domaine de fréquence

$$f_0 < |\omega| \ll N$$

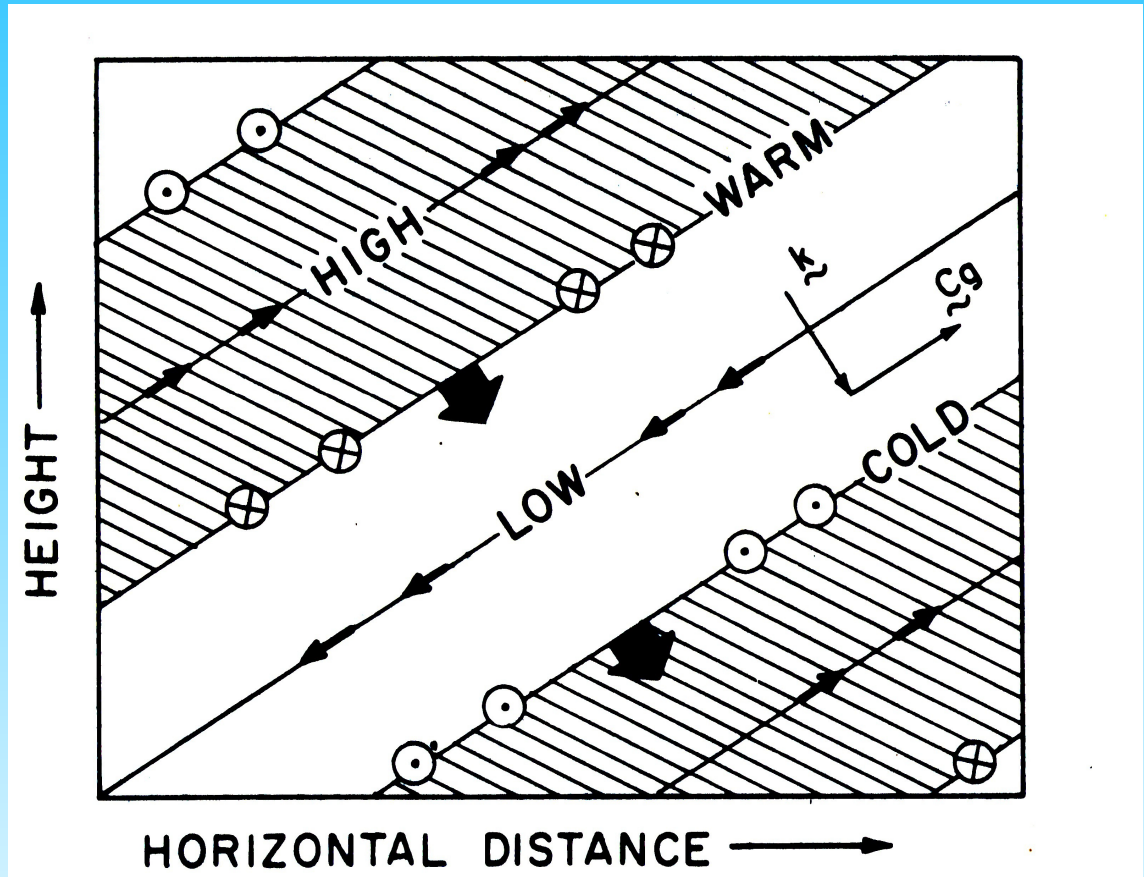
On choisit  $l=0$  et  $m^2 \gg \frac{1}{4H_0^2}$

d'où  $\omega = \pm \left( f_0^2 + \frac{N^2 k^2}{m^2} \right)^{1/2}$

et  $\vec{c}_g = \frac{N^2 k^2}{m^3 \omega} (m, 0, -k)$

$$\left| \frac{c_{gz}}{c_{gx}} \right| = \left| \frac{k}{m} \right| = \frac{(\omega - f_0^2)^{1/2}}{N} \ll 1$$

propagation quasi-horizontale



# Caractéristiques des ondes de gravité

- $f < \omega < N$ , périodes de 5 min à 1j
- Longueur d'onde typique dans la région de la tropopause: 2 km
- Propagation vers la stratosphère et la mésosphère
- Variation d'amplitude en  $\rho^{-1/2}$

## Rôle des ondes

- Transport vertical de moment  $\Rightarrow$  frottement en altitude
- Déferlement  $\Rightarrow$  mélange
- Turbulence engendrée par les ondes topographiques (CAT)

## Ondes d'inertie-gravité

Longue période,  $T=16h$  à  $45^\circ N$

Affectées par la rotation terrestre

Longueur d'onde horizontale  $> 100$  km

Longueur d'onde verticale 2 km