II. Ondes de Rossby

Approximation 2D - Théorême de Kelvin – Equation d'eau peu profonde sur le plan beta
Echelles géostrophiques – Rayon de déformation externe – Equation quasigéostrophique barotrope
Ondes de Rossby externes - propagation
Ondes de Rossby stationnaires et réponse au relief
Propagation en latitude des ondes de Rossby stationnaire – Théorie des rayons
Equations hydrostatiques en coordonnée pression
Equations quasi-géostrophiques baroclines
Ondes de Rossby thermiques – Propagation verticale
Flux d'Eliassen-Palm

UE GEAT532, Université de La Réunion

Bernard Legras   http://www.lmd.ens.fr/legras legras@lmd.ens.fr

Approximation bidimensionnelle (1)

Les écoulements géophysiques ont un faible rapport d'aspect
H $\approx$10 km et L $\approx$1000 km.

La stratification inhibe les mouvements verticaux.

La rotation favorise les mouvements bidimensionnels
(théorème de Proudmann-Taylor)

Approximation bidimensionnelle (2): théorème de Proudman-Taylor

Dans le cas d'un écoulement incompressible en trois dimensions
le théorème de Proudman-Taylor résulte de l'équilibre géostrophique

$$2\vec{\Omega}\times\vec{u} = -\vec{\nabla}\phi \quad \text{avec} \quad \phi = \frac{p}{\rho_0}$$

En prenant le rotationnel de cette expression, on obtient

$$0 = \vec{\nabla}\times(\vec{\Omega}\times\vec{u}) = \vec{u}\cdot\vec{\vec{\nabla}}\vec{\Omega} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{u})\vec{\Omega} - \vec{\Omega}\cdot\vec{\vec{\nabla}}\vec{u} - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\Omega})\vec{u} = -\vec{\Omega}\cdot\vec{\vec{\nabla}}\vec{u}$$

Il en résulte donc que $\vec{u}$ ne varie pas dans la direction de $\vec{\Omega}$, c'est à dire qu'une colonne de fluide parallèle à $\vec{\Omega}$ se déplace en bloc.

Dans le cas du mouvement de l'atmosphère sur la sphère terrestre
L'équation du mouvement géostrophique horizontal est

$$f_0 u_g = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad \text{and} \quad f_0 v_g = \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

Ici $\phi = gz$ et les dérivations en x et y sont à pression constante.

On a par ailleurs $p\dfrac{\partial\phi}{\partial p} = -\dfrac{p}{\rho} = -RT$

Ainsi $f_0\dfrac{\partial u_g}{\partial \log p} = R\dfrac{\partial T}{\partial y}$ et $f_0\dfrac{\partial v_g}{\partial \log p} = -R\dfrac{\partial T}{\partial x}$

Le théorème de Proudman-Taylor est obtenu si on néglige les variations horizontales de la température.

Approximation bidimensionnelle (3): Fluide stratifié

L'approximation bi-dimensionnelle dans l'atmosphère revient à négliger les effets des gradients horizontaux de température. Elle ne permet donc pas d'expliquer comment le mouvement se maintient par conversion d'énergie thermique → dynamique:
Cependant, elle reste utile comme premier cadre d'approximation pour étudier les propriétés de propagation des ondes déjà formées.

Observer aussi que la stratéfication de l'atmosphère et la conservation de la température potentielle (sur une durée de quelques jours hors de régions de convection dans la troposphère à quelques semaines dans la stratosphère) implique des mouvements quasi-horizontaux au sein de couches glissant les unes sur les autres.

Théorême de la circulation (Kelvin, Bjerkness)

Sur un contour matériel orienté Γ, la circulation est définie par $C=\oint \vec{u}\,\vec{dl}$

La variation de C en suivant le mouvement du contour est

$$\frac{DC}{Dt}=\oint \frac{D\vec{u}}{Dt}\vec{dl}+\oint \vec{u}\frac{D}{Dt}\vec{dl}$$

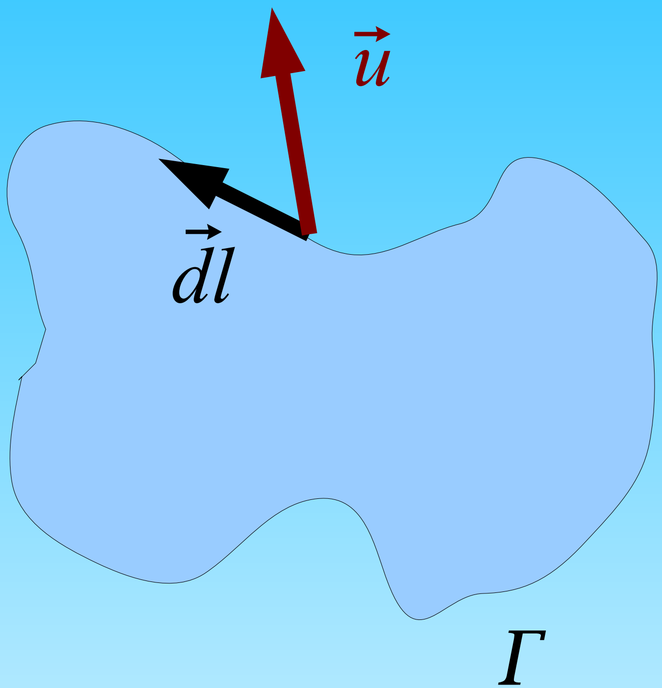
mais $\frac{D}{Dt}\vec{dl}=d\vec{u}$, donc $\oint \vec{u}\frac{D}{Dt}\vec{dl}\equiv 0.$

En appliquant la loi du mouvement

$$\frac{DC}{Dt}=-\oint \frac{1}{\rho}dp \qquad (1)$$

Ceci permet d'établir que la circulation C est conservée par le mouvement ($\frac{DC}{Dt}=0$) si

- l'écoulement est incompressible ou si on applique l'approximation de Boussinesq. Dans le premier cas ρ est uniforme et constant. Dans le deuxième cas, ρ est traité comme une constante dans l'équation horizontale du mouvement
- le mouvement est barotrope, c'est à dire que les propriétés thermodynamiques sont caractérisées par une seule variable au lieu de deux habituellement. Dans ce cas, ρ est une fonction de p.



Applications du théorème de la circulation aux écoulements bi-dimensionnels et quasi-bidimensionnels (1)

On peut reformuler le théorème de Kelvin en

$$\frac{D}{Dt}\iint \vec{\nabla}\times\vec{u}\cdot\vec{k}\,d\sigma$$

où $\vec{k}$ est le vecteur normal à la surface sous-tendue par Γ et $d\sigma$ est l'élément de surface.

Dans le cas bidimensionnel ou quasi-bidimensionnel, il est utile de définir la composante verticale de la vorticité relative

$$\zeta=\vec{\nabla}\times\vec{v}\cdot\vec{k}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse horizontale relative.

ATTENTION: le théorême de la circulation est vrai dans le repère absolu. Il faut donc ajouter à la vitesse relative la vitesse d'entrainement par le référentiel tournant. Ainsi:

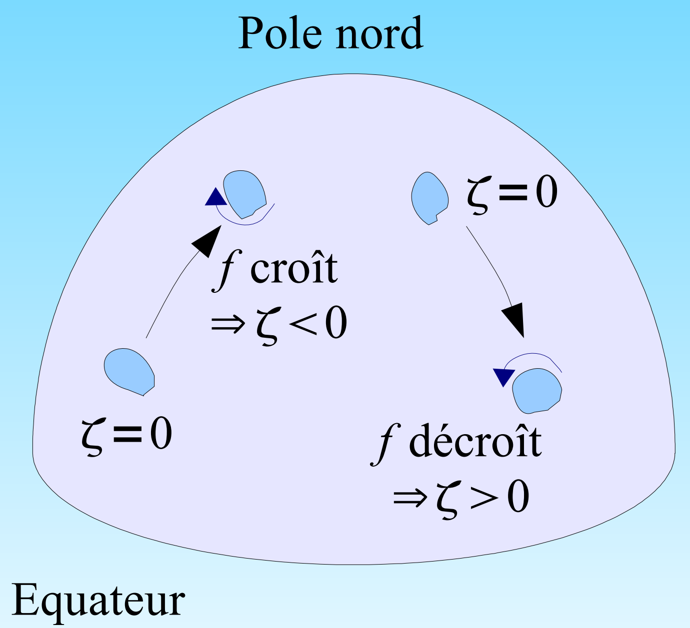
$$\vec{\nabla}\times\vec{u}\cdot\vec{k}=\vec{\nabla}\times\vec{v}\cdot\vec{k}+2\vec{\Omega}\cdot\vec{k}=\zeta+f$$

où f est le paramètre de Coriolis.

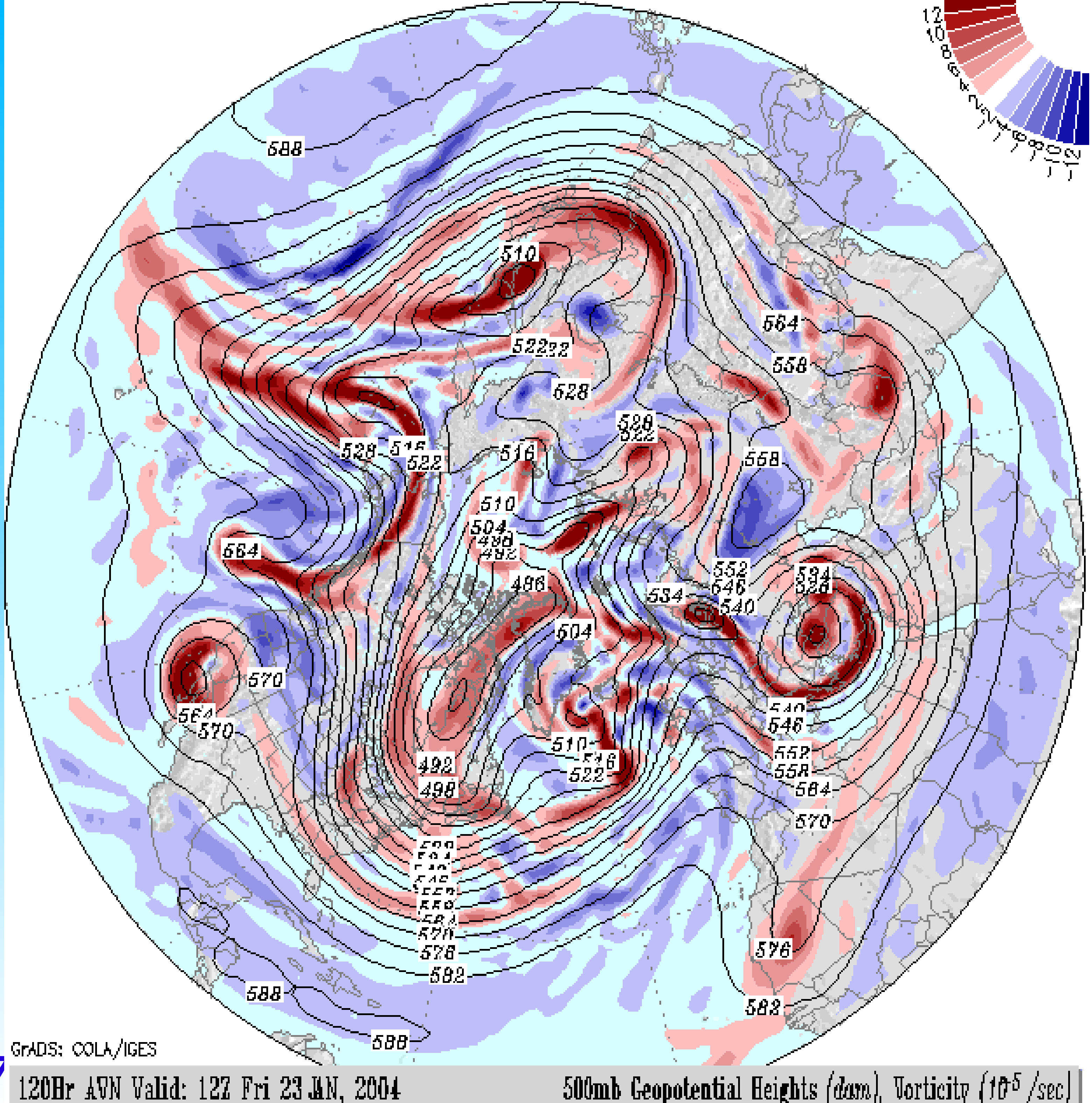
Cas bi-dimensionnel incompressible: l'élément de surface $d\sigma$ est conservé.

Dés lors: $\dfrac{DC}{Dt}=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{D}{Dt}(\zeta+f)=0$

Ceci permet d'interpréter la formation des cyclones et des anticyclones observés aux latitudes extra-tropicales.



B. Legras 2009



Carte du géopotentiel et de la vorticité à 500 hPa

II.7

Applications du théorème de la circulation aux écoulements bi-dimensionnels et quasi-bidimensionnels (2)

Cas bidimensionnel, isotherme, compressible

$\rho(x, y)$ est fonction de p seulement

$\Rightarrow$ le théorème de circulation s'applique

$\Rightarrow \frac{D}{Dt}\left((\zeta+f)\, d\sigma\right)=0$

Comme l'élément de masse (conservé) est $\rho\, d\sigma$

$$\frac{D}{Dt}\frac{\zeta+f}{\rho}=0$$

Cas quasi-bidimensionnel, incompressible

Approximation d'eau peu profonde:

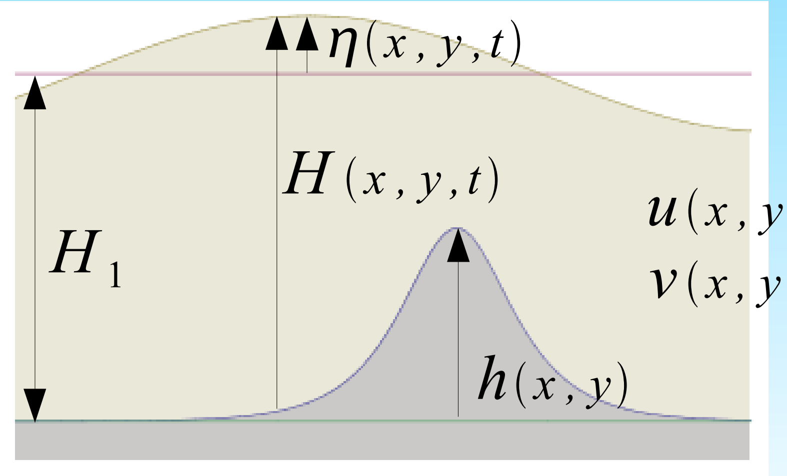
$$u(x, y, t) \quad \text{et} \quad v(x, y, t)$$

(pas de dépendance en z, le fluide se déplace en colonne)

Comme l'élément de masse est alors $H\, d\sigma$

$$\frac{D}{Dt}\frac{\zeta+f}{H}=0$$

avec $H = H_1+\eta$ {surface libre} $-h$ {relief}



Approximations quasi-géostrophiques

Dans l'hypothèse où $h, \eta \ll H_1$, ce qui n'est pas toujours justifié pour h, on obtient

$$\frac{D}{Dt}\left(\zeta + f + \frac{f_0}{H_1}(h-\eta)\right)=0 \qquad \text{(a)}$$

On peut retrouver cette équation en partant de l'équation de Navier Stokes en 2d

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \frac{1}{2}\vec{\nabla}\vec{v}^2 + (\zeta+f)\vec{k}\times\vec{v} = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p$$

en prenant le rotationnel

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{k}\cdot\vec{\nabla}\times((\zeta+f)\vec{k}\times\vec{v})=0$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}(\zeta+f)+(\zeta+f)\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0 \qquad \text{(b)}$$

en utilisant aussi $\frac{D}{Dt}(\eta-h)=w(H_1+\eta)-w(h)$

et l'équation de continuité pour obtenir

$$\frac{D}{Dt}(\eta-h)+H_1\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0 \qquad \text{(c)}$$

Il ne reste plus qu'à éliminer $\nabla\cdot\vec{v}$ entre (b) et (c) pour retrouver (a).

Nous appliquons ici les approximations quasi-géostrophiques

nombre de Rossby $R_0=\frac{fL}{U}\ll 1$, en fait $\approx 0{,}1$

De ce fait $f\vec{k}\times\vec{v}=-\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p$

or $\vec{\nabla}p=\rho_0 g\vec{\nabla}\eta$, ainsi $f\vec{k}\times\vec{v}=-g\vec{\nabla}\eta$ (d)

On fait l'approximation du β-plan:

$f=f_0+\beta y$ et f est remplacé par f_0 dans (d)

On obtient ainsi $\vec{v}=\vec{k}\times\nabla\psi$ avec $\psi=\frac{g}{f_0}\eta$

et la forme finale de l'équation

$$\frac{D}{Dt}\left(\nabla^2\psi+\beta y-\frac{1}{\lambda^2}\psi+\frac{f_0}{H_1}h\right)=0$$

avec $\lambda=\frac{\sqrt{H_1 g}}{f_0}$

B. Legras 2009

Equation de la vorticité potentielle barotrope

$$\frac{D}{Dt}\left(\nabla^2\psi + \beta y - \frac{1}{\lambda^2}\psi + \frac{f_0}{H_1}h\right) = 0$$

ψ est la fonction de courant

$\lambda = \frac{\sqrt{H_1 g}}{f_0}$ est le rayon de déformation externe de Rossby.

$q = \nabla^2\psi + \beta y - \frac{1}{\lambda^2}\psi + \frac{f_0}{H_1}h$ est la forme barotrope de la vorticité potentielle.

Cette équation qui ne prend pas en compte les effets thermiques va cependant nous permettre d'étudier un certain nombre de phénomènes

Avec H_1=10 km et $f_0 = 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$, on obtient $\lambda = 3100$ km.
Avec H_1=20 km et $f_0 = 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$, on obtient $\lambda = 4400$ km.

Si on compare $\nabla^2\psi$ et ψ/λ^2, on voit que pour les mouvements d'échelle $\ll \lambda$ on peut négliger le deuxième terme. Par contre, il domine pour les mouvements d'échelle planétaire.

Ondes de Rossby (1)

On omet pour l'instant le terme de relief dans l'équation de la vorticité potentielle

L'écoulement de base est zonal est uniforme de vitesse U, et fonction de courant $\Psi = -U\,y$
On décompose l'écoulement en sa partie moyenne et une perturbation

$$\psi = \Psi + \psi' \qquad u = U + u' = U - \frac{\partial \psi'}{\partial y} \qquad v = v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x}$$

L'équation linéarisée pour la perturbation est ainsi

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2 \psi' - \frac{1}{\lambda^2}\psi'\right) + U\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi' + \beta\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \qquad \text{(a)}$$

Noter que λ n'apparait que dans le terme dépendant du temps car $-U\frac{\partial}{\partial x}\frac{\psi'}{\lambda^2} + v'\frac{U}{\lambda^2} = 0$

On développe maintenant ψ' en série de Fourier, soit $\psi' = \sum \tilde{\psi}_{k,l}\, e^{i(kx+ly-\omega t)}$ pour remplacer dans (a):

$$-i\omega\left(-k^2 - l^2 - \lambda^{-2}\right)\tilde{\psi}_{k,l} + i\,k\,U\left(-k^2 - l^2\right)\tilde{\psi}_{k,l} + i\,k\,\beta\,\tilde{\psi}_{k,l} = 0$$

et obtenir la relation de dispersion des ondes de Rossby $\boldsymbol{\omega = k\,U - \frac{k\left(\beta + U\lambda^{-2}\right)}{k^2 + l^2 + \lambda^{-2}}}$

Ondes de Rossby (2)

Relation de dispersion des ondes de Rossby $\boldsymbol{\omega = k\,U - \dfrac{k\left(\beta + U\,\lambda^{-2}\right)}{k^2 + l^2 + \lambda^{-2}}}$

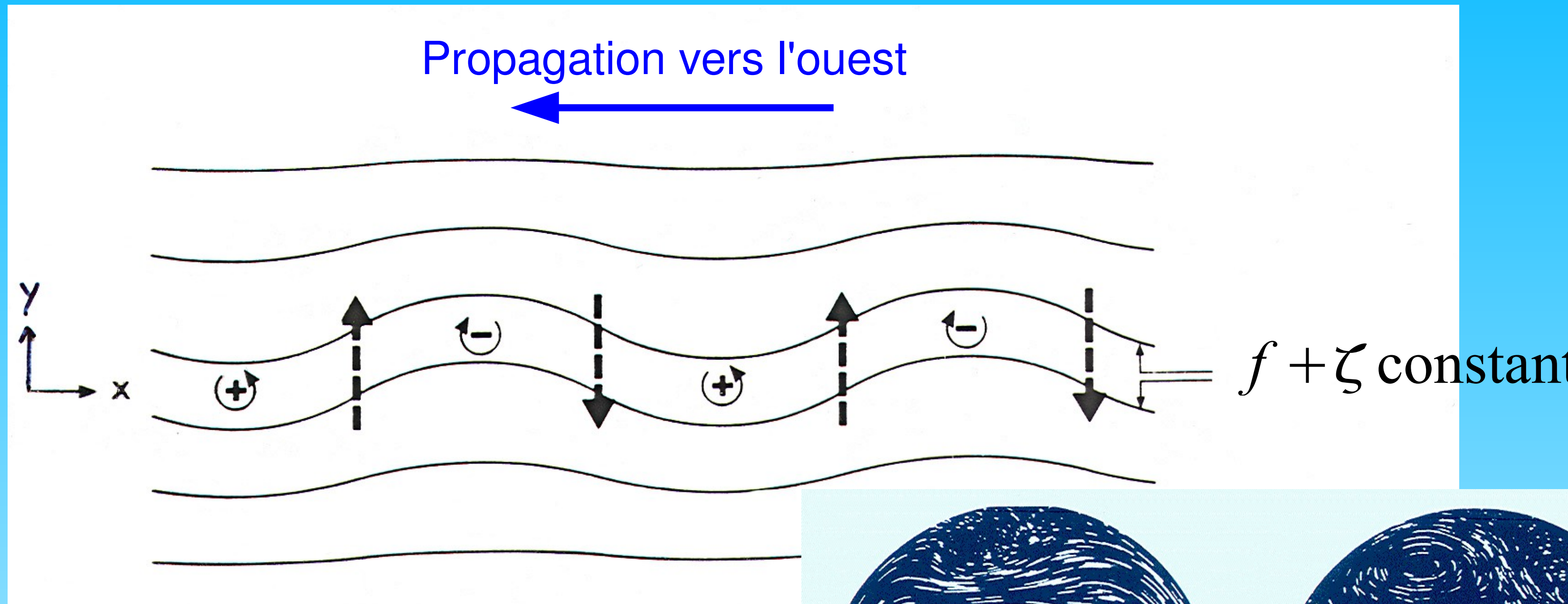
Vitesse de phase $c_x = \dfrac{\omega}{k} = U - \dfrac{\left(\beta + U\,\lambda^{-2}\right)}{k^2 + l^2 + \lambda^{-2}}$

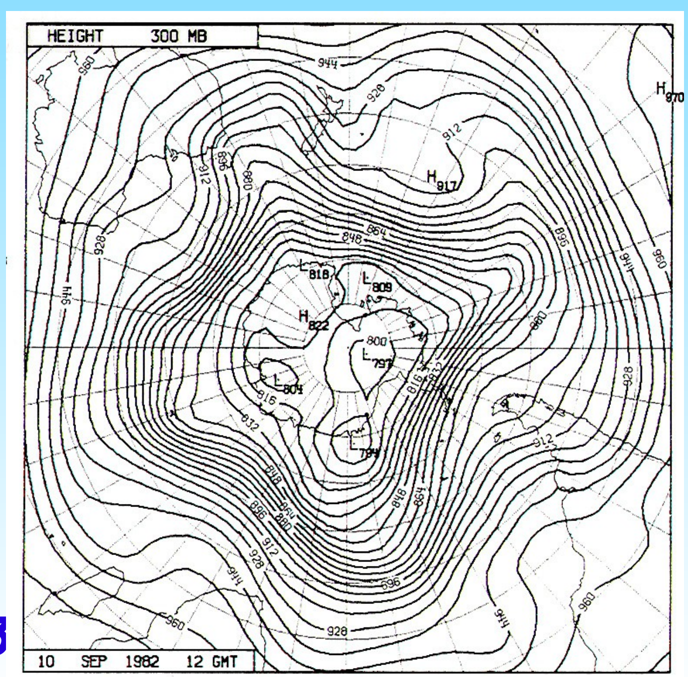
Les ondes de Rossby se propagent vers l'ouest par rapport à l'écoulement moyen.
La vitesse de phase est d'autant plus rapide que l'échelle est grande.
Les ondes courtes sont emportées vers l'est par l'écoulement moyen alors que les ondes longues se propagent vers l'ouest.

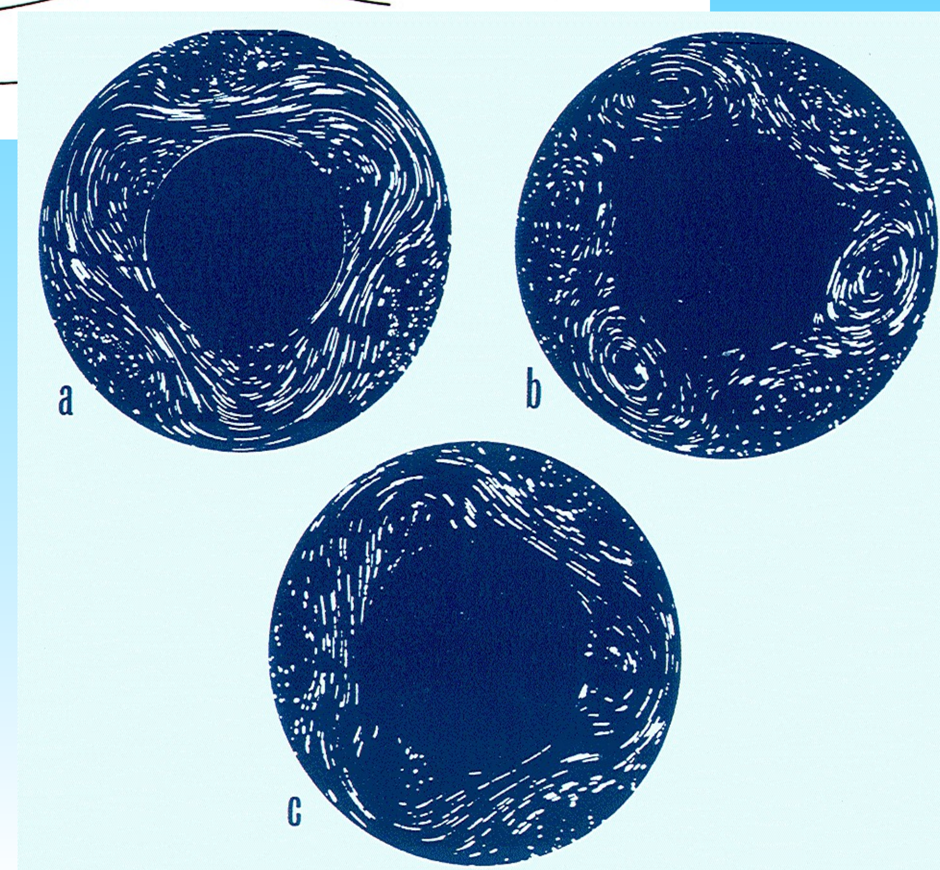
La vitesse de groupe est $c_{gx} = \dfrac{\partial\,\omega}{\partial\,k} = U + \left(\beta + U\,\lambda^{-2}\right)\dfrac{\left(k^2 - l^2 - \lambda^{-2}\right)}{\left(k^2 + l^2 + \lambda^{-2}\right)^2}$

La vitesse de groupe est quant à elle dirigée vers l'est par rapport à l'écoulement moyen si $k^2 > l^2 + \lambda^{-2}$ et vers l'ouest sinon.

Ondes de Rossby dans un gradient de PV







Ondes de Rossby stationnaires

Rappel: vitesse de phase $c_x = \dfrac{\omega}{k} = U - \dfrac{\left(\beta + U\lambda^{-2}\right)}{k^2 + l^2 + \lambda^{-2}}$

Une onde de Rossby est stationnaire si $c_x = 0$, soit si $\boldsymbol{k^2 + l^2 = \dfrac{\beta}{U} \equiv K_s^2}$

Cette condition ne dépend pas de λ.

Valeur de β à 45°N: $\beta = \dfrac{2\Omega}{R}\cos\phi_0 = \dfrac{f_0}{R} = 1{,}5\,10^{-11}\,\mathrm{s}^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$

Avec $U = 20\,\mathrm{m\ s}^{-1}$, $\quad K_s = \sqrt{\dfrac{\beta}{U}} = \sqrt{75\,10^{-14}} = 8{,}6\,10^{-7}\,\mathrm{m}^{-1}$

Sur le cercle de latitude 45° de longueur $L_0 = 28000\,\mathrm{km}$, l'unité de longueur d'onde e

$K_0 = \dfrac{2\pi}{L_0} = 2{,}24\,10^{-7}\,\mathrm{m}^{-1}$

Le mode stationnaire est donc proche du mode $4K_0$.

Si on prend $U = 10\,\mathrm{m\ s}^{-1}$, on se trouve plus près de $3K_0$.

La longueur d'onde du mode stationnaire sépare les modes se propageant vers l'o
de ceux se propagent vers l'est.

Réponse stationnaire au relief

On réintroduit ici le relief et on ajoute un facteur d'amortissement dans l'équation sous la forme d'une friction d'Ekman.
Le problème stationnaire devient maintenant

$$U\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi' + \beta\frac{\partial\psi'}{\partial x} = -U\frac{f_0}{H_1}\frac{\partial h}{\partial x} - r\nabla^2\psi'$$

Noter que λ est toujours absent.
En passant en modes de Fourier, cela donne

$$\hat{\psi}\left(K_s^2 - K^2 + i\frac{rK^2}{kU}\right) = \frac{-f_0}{H_1}\hat{h}$$

avec $K^2 \equiv k^2 + l^2.$

Si $\tilde{\psi} = \frac{g}{f_0}\tilde{\eta}$, alors $\boldsymbol{\tilde{\eta} = \tilde{h}\lambda^{-2}\left(K^2 - K_s^2 - i\frac{rK^2}{kU}\right)^{-1}}$

On voit que λ réapparait pour fixer l'amplitude de la déformation de la surface libre.

B. Legras 2009

Effet du passage du vent sur un relief

On interpète ici la formule $\tilde{\eta}=\tilde{h}\lambda^{-2}\left(K^2-K_s^2-i\frac{rK^2}{kU}\right)^{-1}$

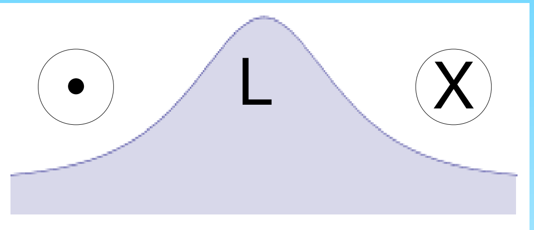
L'équation stationnaire pour la hauteur en eau peu profonde est

$$-U\frac{\partial h}{\partial x}+H_1\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0 \quad \text{(en omettant la déformation de surface)}$$

donc $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}>0$ sur le flanc amont et $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}<0$ sur le flanc aval.

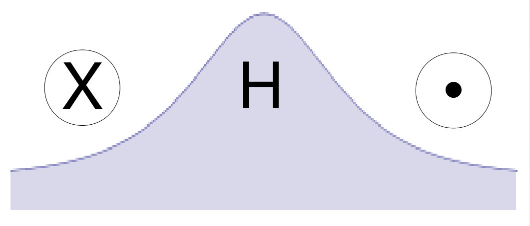
En utilisant l'équation de la vorticité, on a $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}(\zeta+\beta y)+f_0\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0$, soit essentiellement

$$U\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\beta v+f_0\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0$$



Si β domine $(K<K_s)$, alors $\beta v+f_0\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\approx 0$

$v<0$ en amont, et $v>0$ en aval $\Rightarrow$ cyclone et basse pression sur le relief



Si l'advection domine $(K>K_s)$, alors $U\frac{\partial\zeta}{\partial x}+f_0\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\approx 0$

La vorticité est négative sur le relief $\Rightarrow$ anticyclone et haute pression sur le relief

Si $K=K_s$, il y a résonance et l'amplitude n'est limitée que par la dissipation.

Au passage de la résonance, la réponse au relief se déphase de 180°

B. Legras 2009

Réponse au relief sur le cercle 45° N en fonction du vent

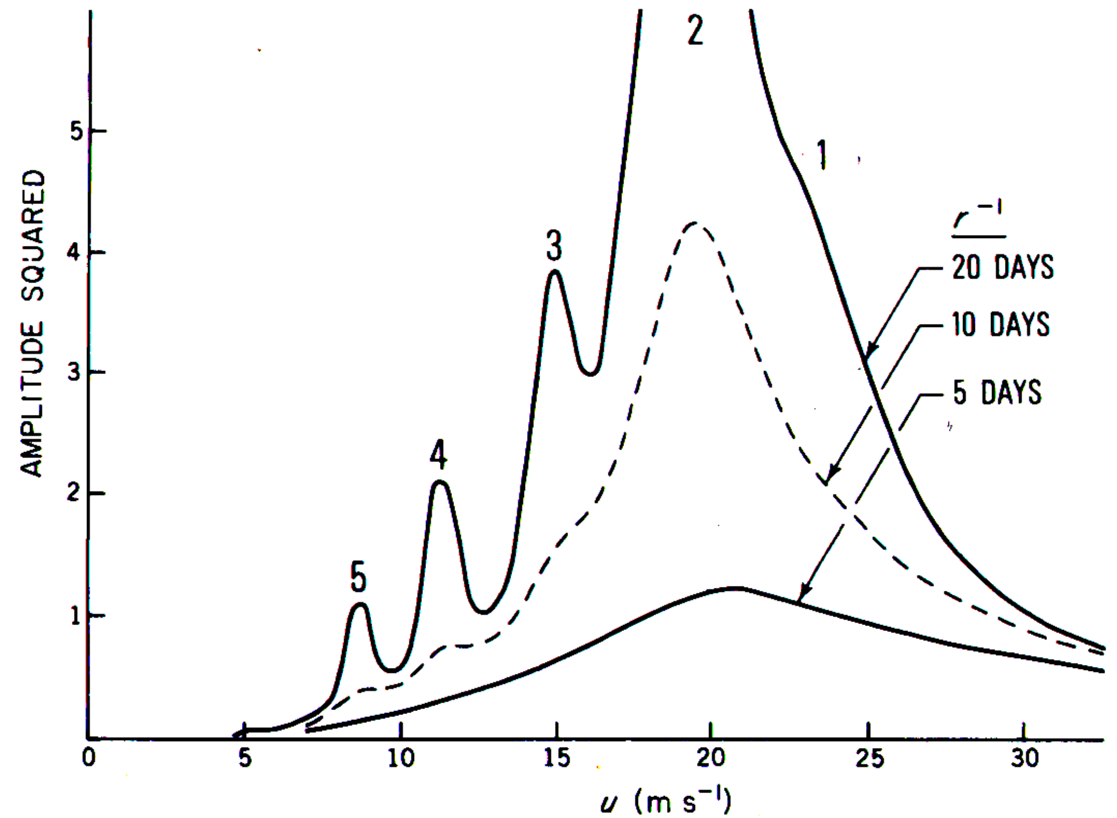


Fig. 6.1. The mean square height response, $[\eta^{*2}]$, in the Charney–Eliassen model as a function of $[u]$ for different strengths of dissipation, in units of 10^4 m^2. The integers mark the values of $[u]$ at which particular zonal wavenumbers resonate.

Held

Held, in Large-Scale Dynamical Processes in the Atmosphere, Hoskins and Pearce, Academic Press, 1983

Réponse au relief sur le cercle 45° N. Comparaison avec la composante stationnaire des observations.

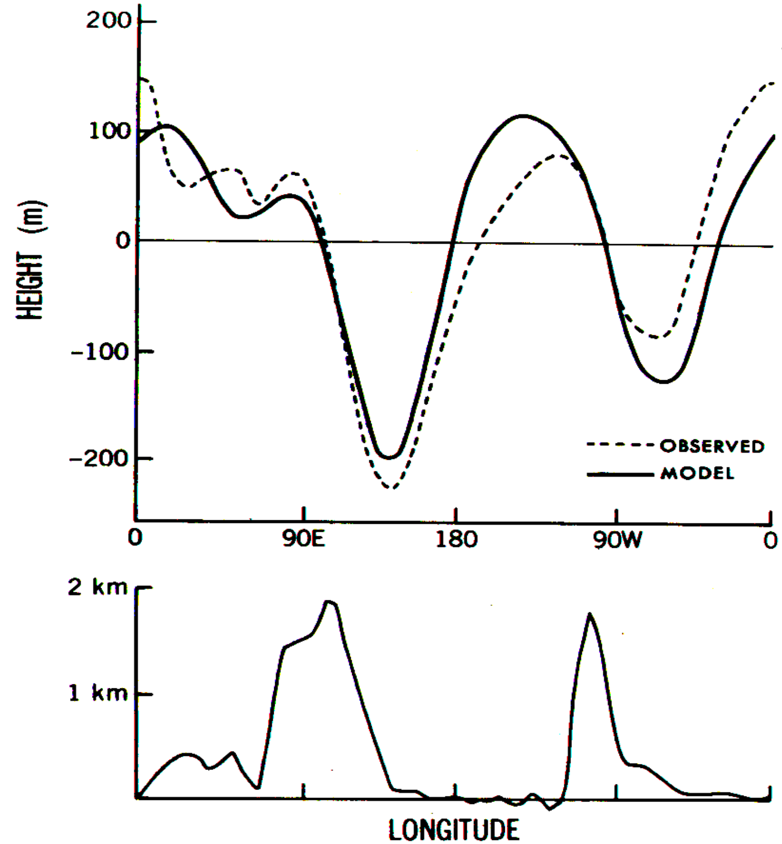


Fig. 6.2. Upper figure: the height response as a function of longitude in the Charney–Eliassen model for the parameters listed in the text (solid line), and the observed climatological 500 mb eddy heights at 45°N in January, from Oort (1982) (dashed line). Lower figure: the topography $h_T(x)$ used in the calculation.

Held

Held, in Large-Scale Dynamical Processes in the Atmosphere, Hoskins and Pearce, Academic Press, 1983

Propagation des ondes de Rossby en latitude
Théorie des rayons (1)

Le problème est de comprendre comment les ondes de Rossby stationnaires peuvent se propager en latitude. On fait l'approximation d'un milieu lentement variable, c'est à dire que l'échelle de variation de U est plus grande que la longueur d'onde. Ceci est analogue à ce que l'on fait en optique pour calculer la propagation de la lumière dans un milieu d'indice variable. Dans ce dernier cas, la séparation d'échelle est mieux satisfaite que pour les ondes de Rossby.

Théorie des rayons

Cette théorie est fondée sur la forme suivante du signal ondulatoire $\psi = \tilde{\psi}(y)\cos\phi(x, y, t)$ où ϕ est une phase rapidement variable et où $\tilde{\psi}$ est une fonction de y variant lentement.

[se représenter un signal oscillant avec une enveloppe lentement variable]

Localement, on écrit que la phase varie comme une onde plane

$$\omega = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad k = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad l = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

et on suppose que cette onde satisfait la relation de dispersion des ondes de Rossby mais les autres quantités que k et l peuvent dépendent (lentement) de (x, y, t).

Par conséquent $\frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}$ et $\frac{\partial l}{\partial t} = -\frac{\partial \omega}{\partial y}$

On simplifie de plus en se limitant au cas stationnaire ($\omega = 0$).

Propagation des ondes de Rossby en latitude
Théorie des rayons (2)

On se sert ici de la relation de dispersion pour $\lambda = \infty$, $\omega(x, y, k, l) = U(y)k - \frac{\beta k}{k^2 + l^2}$

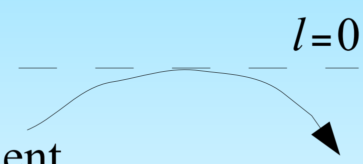
où U varie en y. Comme ω ne dépend pas de x mais de y, la longueur d'onde en longitude k reste constante le long d'un rayon mais l n'est pas constant.

Dans le cas général, la vitesse de groupe est $\vec{c}_g = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{k} + \frac{2\beta k^2}{(k^2+l^2)^2} \\ \frac{2\beta k l}{(k^2+l^2)^2} \end{pmatrix}$

Dans le cas stationnaire $\vec{c}_g = 2\frac{k}{\beta}U^2 \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$

La vitesse de groupe et le vecteur d'onde sont parallèles.

Comme $l^2 = \frac{\beta}{U} - k^2$, il est nécessaire que $U(y) > 0$ pour que la propagation méridienne ait lieu. Si un rayon est tel que $k^2 = \frac{\beta}{U}$, alors $l = 0$, il rebrousse.



Si une latitude est telle que $U(y) = 0$, alors $l^2 \to \infty$. L'onde varie très rapidement, il y a interaction avec l'écoulement et elle ne peut plus se propager (niveau critique).

Propagation des ondes de Rossby en latitude (3)

Le profil de U(y) fixe donc les possibilités de propagation.

Pas de propagation d'ondes stationnaires en latitude si $U<0$. Par conséquent les vents d'est sur l'équateur sont une barrière à la propagation d'un hémisphère à l'autre.

Il y a un point de rebroussement si $U=\beta/k^2$. Ceci est d'autant plus facile à satisfaire que $|k|$ est grand. Seules les ondes de plus faible $|k|$, c'est à dire de plus grande échelle, peuvent se propager en latitude.

Blocage par les alizés des ondes de Rossby engendrées par le plateau tibétain

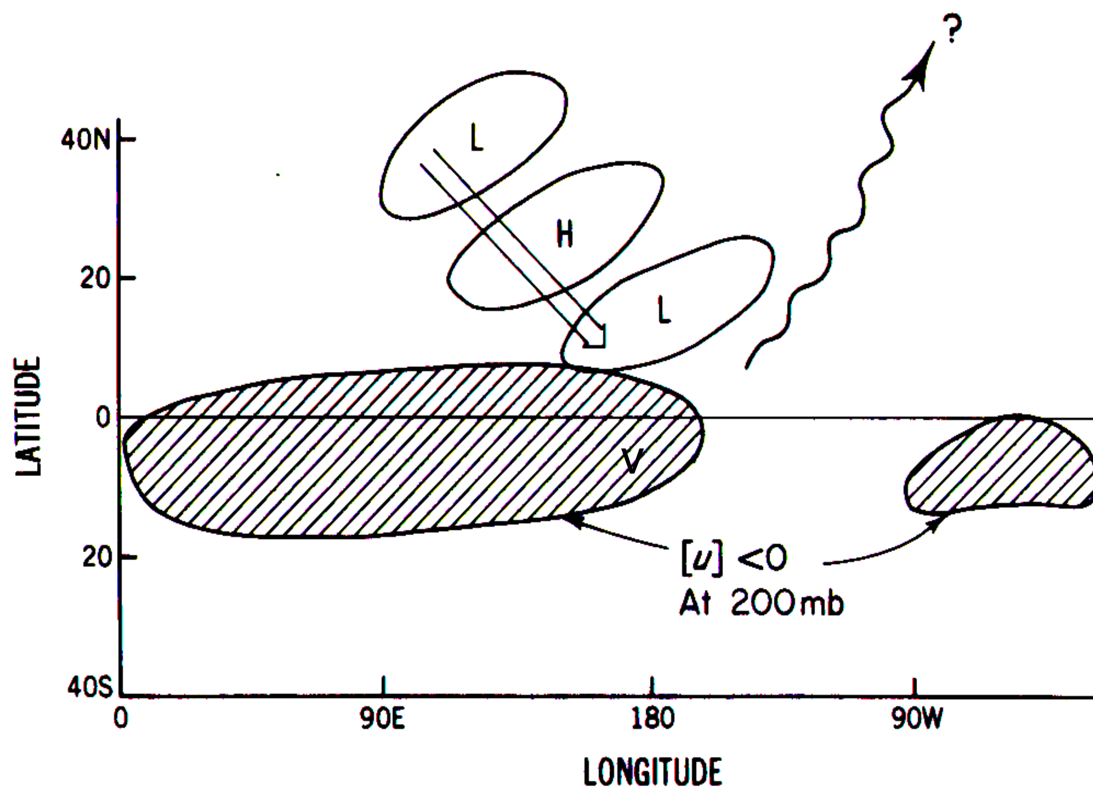
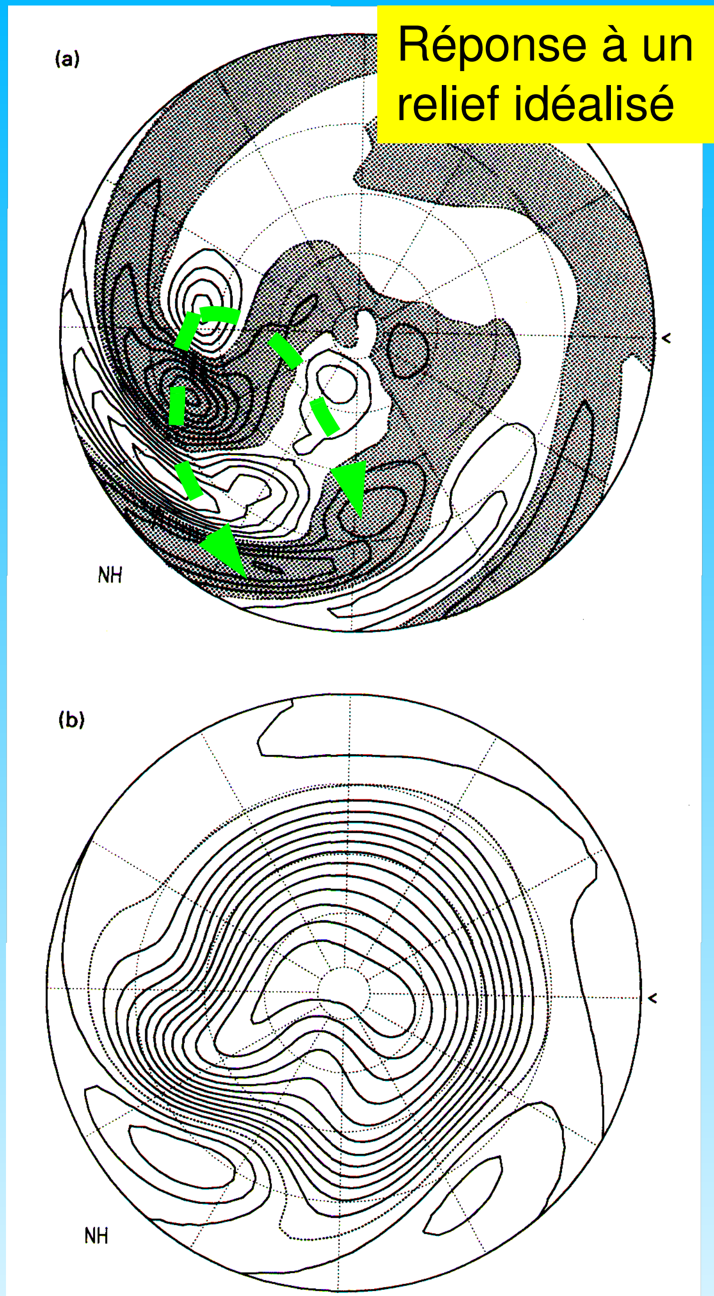
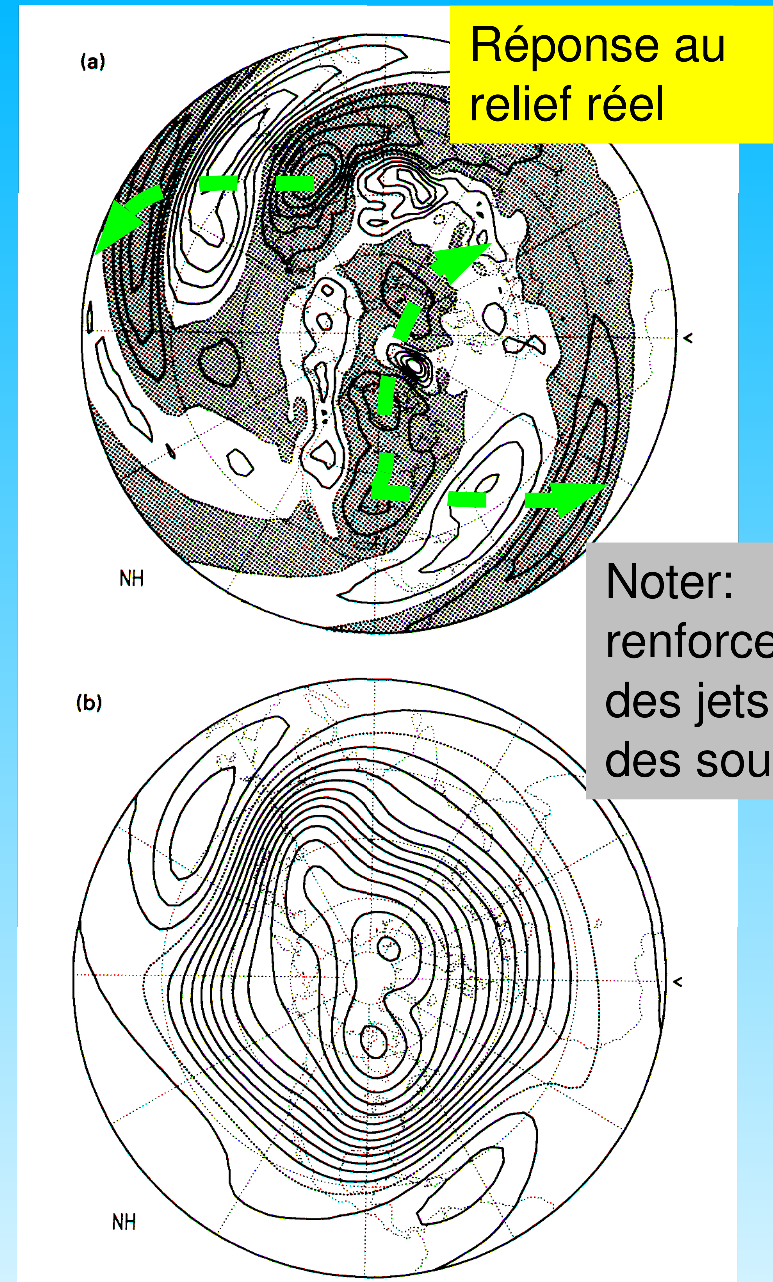


Fig. 6.11. Schematic of the Rossby wavetrain generated by the Tibetan plateau propagating into the tropics.

Held

Held, in Large-Scale Dynamical Processes in the Atmosphere, Hoskins and Pearce, Academic Press, 1983





Noter: renforcement des jets à l'aval des sources

James

Réponse à une montagne circulaire à 30°N, écoulement DJF zonal à 300 hPa, (a) anomalie de vorticité et (b) fonction de courant. Contours 10^{-5} s^{-1} et 2 10^{7} m^2 s^{-1}

Réponseau relief réel, écoulement DJF zonal à 300 hPa, (a) anomalie de vorticité et (b) fonction de courant. Contours 2 10^{-5} s^{-1} et 2 10^{7} m^2 s^{-1}

Flux de moment

Si $\psi' = \psi_0 \cos(k\,x + ly)$

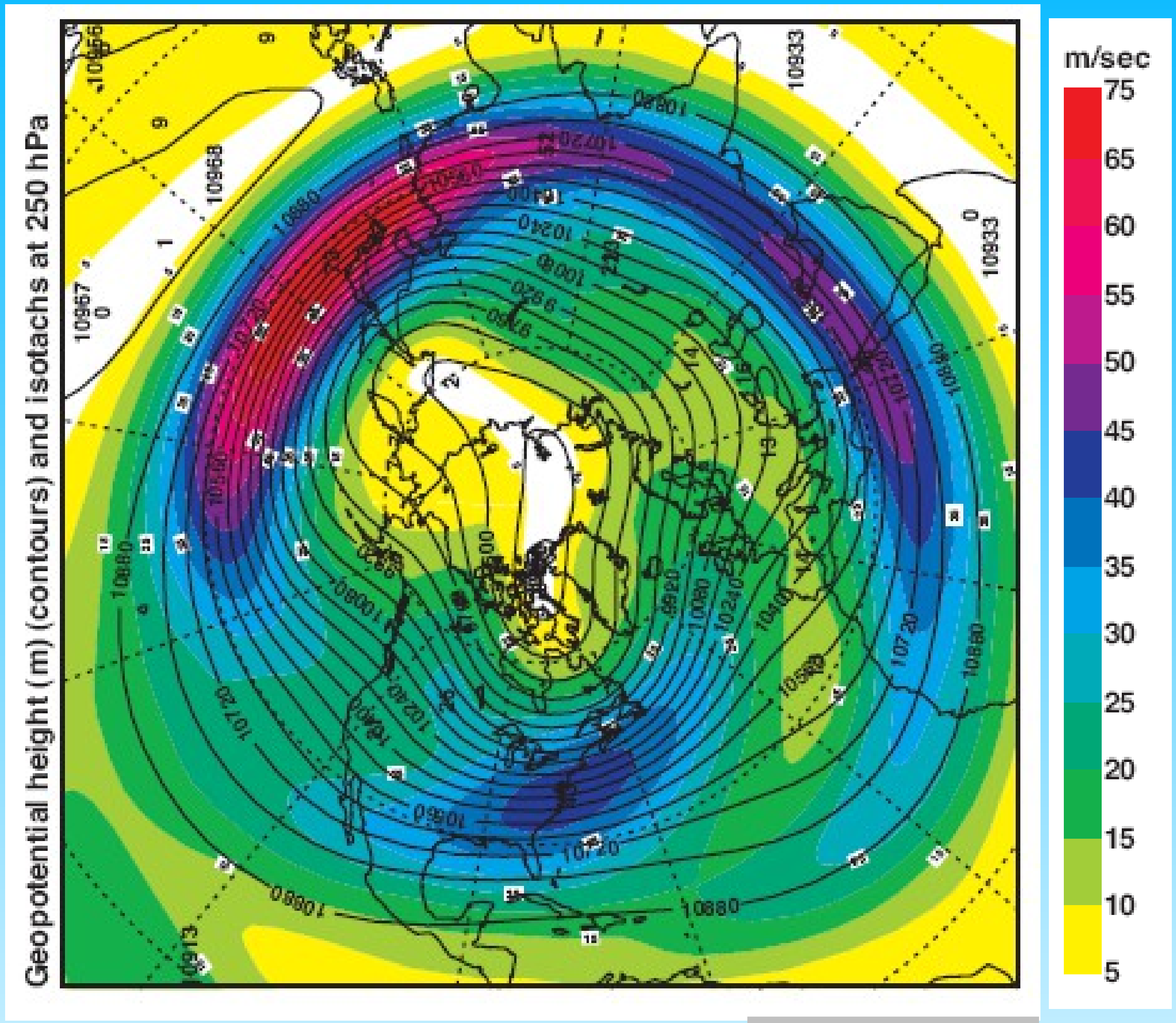
alors $u'v' = -\psi_0^2 \dfrac{\partial \psi'}{\partial y} \dfrac{\partial \psi'}{\partial x} = -kl\,\psi_0^2 \sin^2(k\,x + ly)$

En moyennant sur un cercle de latitude

$$\langle u'v' \rangle = -\frac{k\,l}{2}\,\psi_0^2$$

Si $k > 0$, le flux vers le pôle a un sens opposé à l

Donc, si on a une source due à une montagne localisée en latitude, émettant à la fois vers le nord et vers le sud, les ondes de Rossby font converger le moment vers la latitude de la montagne.



Atlas ERA-40, ECMWF

Vent moyen DJF à 250 hPa dans l'hémisphère nord.
La position des jets à 250 hPa est située à l'aval
du plateau Tibétain et des Rocheuses.

LES EQUATIONS

$$D_t u - f v + \partial_x \phi' = 0$$
$$D_t v + f u + \partial_y \phi' = 0$$
$$-b + \partial_{\tilde z} \phi' = 0$$
$$D_t b + \tilde w N^2 = 0$$
$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_{\tilde z} \tilde w - \frac{\tilde w}{H_0} = 0$$

avec $b = \frac{g}{\bar{\bar\theta}} \theta'$ **(flottaison) ,**

$\tilde w = D_t \tilde z$,

et $N^2 = \frac{g}{\bar{\bar\theta}} d_{\tilde z} \bar\theta$

Puisque $D_t p = -\frac{p}{H_0} D_t \tilde z$ **, on a**

$$\partial_p D_t p = \partial_{\tilde z} \tilde w - \frac{\tilde w}{H_0}$$

L'approximation de Boussinesq consiste ici à négliger le terme en $\frac{\tilde w}{H_0}$

EQUATIONS HYDROSTATIQUES EN COORDONNEE PRESSION

Le milieu standard est défini par $\bar\theta$ **et** $\bar\phi$ **(géopotentiel) qui sont fonctions de** p **seul.**

ϕ' **est l'écart de géopotentiel:** $\phi' = \phi - \bar\phi$.

On introduit une nouvelle forme de la coordonnée pr
ayant la dimension d'une hauteur par $\tilde z = -H_0 \log p/p_0$
où $H_0 T_0/g$ **(noter:** H_0 **n'est pas** H_1**).**
(pour une atmosphère isotherme, on aurait exactement $\tilde z = z$**)**
On transforme maintenant l'équation hydrostatique
en utilisant la loi du gaz parfait

$$\partial_p \phi = -\frac{1}{\rho} = -\frac{RT}{p}$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial \log p} + R\theta \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} = 0$$
$$\frac{\partial \phi'}{\partial \log p} + R\theta' \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} = 0$$
$$\partial_{\tilde z} \phi' = R\theta' \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} \frac{g}{RT_0} = g \frac{\theta'}{\bar{\bar\theta}}$$

Noter : $\bar{\bar\theta}$ **est un profil isotherme , ne pas confondre a** $\bar\theta$

B. Legras 2009

Forme quasi-géostrophique des équations hydrostatiques

On sépare les parties géostrophique et agéostrophique

$$u = u_g + u_a \quad \text{et} \quad v = v_g + v_a$$

avec $f_0 u_g = -\partial_y \phi'$ **et** $f_0 v_g = \partial_x \phi'$

D'où

$$D_{gt} u_g - f_0 v_a - \beta y v_g = 0 \quad \text{(a)}$$
$$D_{gt} v_g + f_0 u_a + \beta y u_g = 0 \quad \text{(b)}$$
$$D_{gt} b + w N^2 = 0 \quad \text{(c)}$$
$$\partial_x u_a + \partial_y v_a + \partial_z w - w / H_0 = 0 \quad \text{(d)}$$

VENT THERMIQUE

$$f_0 \partial_z u_g = -\partial_y b$$
$$f_0 \partial_z v_g = \partial_x b$$

avec $D_{gt} \equiv \partial_t + u_g \partial_x + v_g \partial_y$

En prenant le rotationnel du vent géostrophique on obtient

$$D_{gt} \zeta + \beta v_g + f_0 \left(\partial_x u_a + \partial_y v_a \right) = 0$$

En combinant avec (c) et (d), cela conduit à $D_{gt} (\zeta + \beta y) + f_0 D_{gt} \left(\partial_z - \frac{1}{H_0} \right) \frac{b}{N^2} = 0$

et si on utilise le fait que $b = \partial_z \phi' = f_0 \partial_z \psi$, **on a** $D_{gt} \left(\zeta + \beta y + f_0^2 \partial_z \frac{1}{N^2} \partial_z \psi - \frac{f_0^2}{N^2 H_0} \partial_z \psi \right) = 0$

soit aussi $D_{gt} \left(\zeta + \beta y + f_0^2 \frac{1}{\rho_R} \partial_z \frac{\rho_R}{N^2} \partial_z \psi \right) = 0$ **avec** $\rho_R = \rho_0 \exp(-z / H_0)$.

ATTENTION : la relation géostrophique est utilisée pour commuter D_{gt} **et** $\vec{\nabla} \times$,
et la relation du vent thermique est utilisée pour commuter D_{gt} **et** ∂_z.

B. Legras 2009

Rôle de la circulation agéostrophique dans le maintien du vent thermique

VENT THERMIQUE

$$\boxed{\begin{array}{c} f\,\partial_z u_g = -\partial_y b \\ f\,\partial_z v_g = \partial_x b \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} D_{gt}\,\partial_x b = Q_1 - N^2 \partial_x w \\ D_{gt}\, f\,\partial_z v_g = -Q_1 - f^2 \partial_z u_a \end{array}}$$

où $Q_1 = -\partial_x u_g \partial_x b - \partial_x v_g \partial_y b$

Si on suppose le vent géostrophique orienté selon y et de faibles variations dans cette direction $\partial_y \ll \partial_x, \partial_z$

On définit $u_a = \partial_z \xi$ et $w = -\partial_x \xi$, d'où

$$\boxed{-2Q_1 = N^2 \partial^2_{xx}\xi + f^2 \partial^2_{zz}\xi}$$

Paradoxe apparent:

Q_1, associé à la circulation géostrophique, détruit l'équilibre du vent thermique; la circulation agéostrophique le restore

Propagation verticale des ondes de Rossby Stationnaires dans la stratosphère

Supposons encore une fois un écoulement U de base uniforme par rapport auquel on linéarise l'équation quasi-géostrophique.
On se limite de plus au cas stationnaire et on suppose N uniforme. L'équation linéarisée est

$$U\,\partial_x\left(\nabla^2\psi+\frac{f_0^2}{N^2}\partial_{zz}\psi-\frac{f^2}{N^2H_0}\partial_z\psi\right)+\beta\,\partial_x\psi=0$$

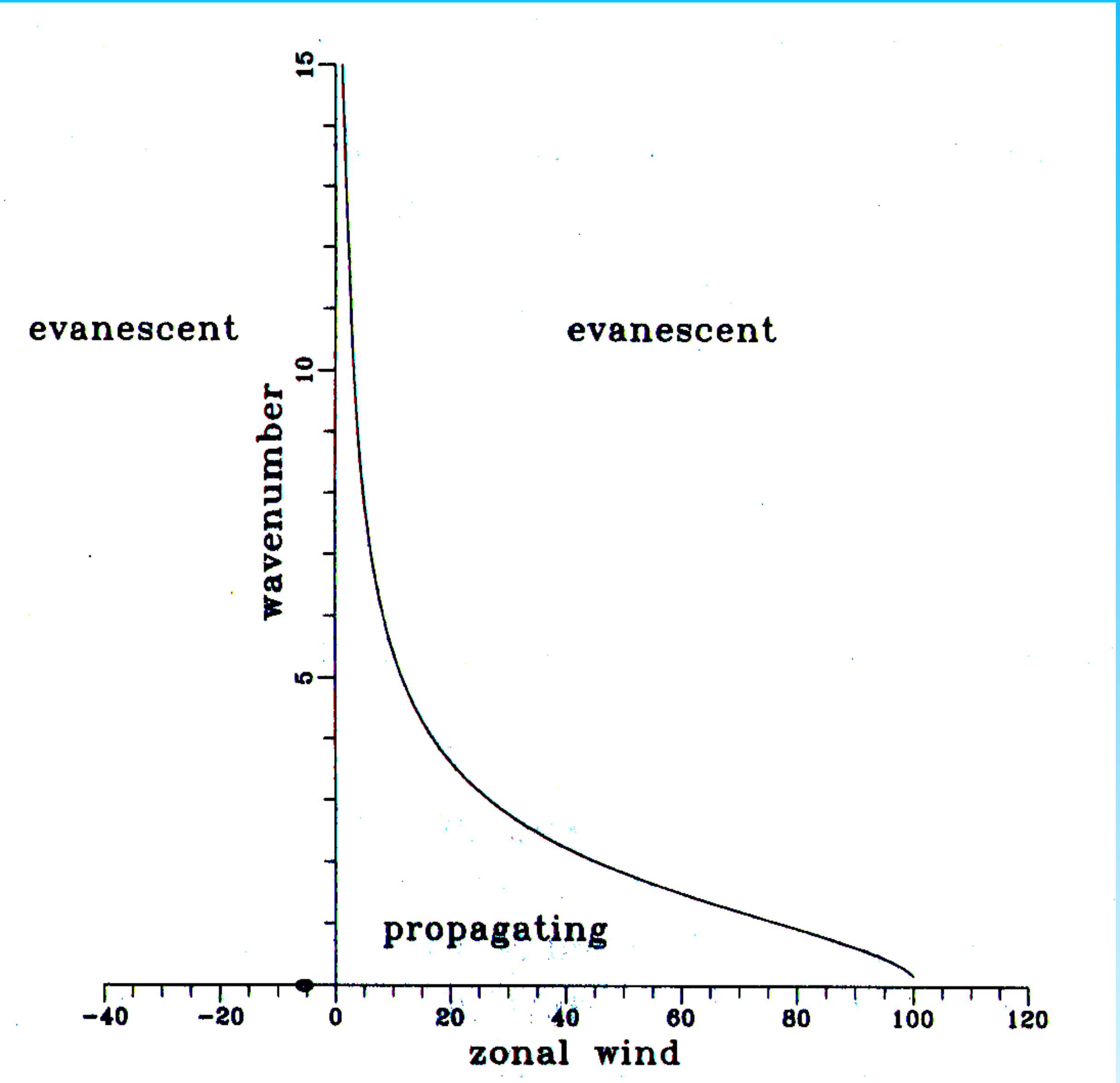
On pose $\psi(x,y,z)=\varphi(z)e^{\frac{z}{2H_0}}e^{i(kx+ly)}$ en tenant compte de la décroissance exponentielle de la densité avec l'altitude.

On obtient alors $\partial_{zz}\varphi+\dfrac{N^2}{f_0^2}\left(\dfrac{\beta}{U}-K^2-\dfrac{f_0^2}{4N^2H_0^2}\right)\varphi=0$

Dans la stratosphère, $N^2=4\,10^{-4}\,\mathrm{s}^{-2}$, $T\approx 220\,\mathrm{K}$ implique $H_0\approx 6{,}4\,\mathrm{km}$, d'où $\dfrac{f_0}{N\,H_0}\approx 2\,K_0.$

Par conséquent, sauf pour U très grand ou $U<0$, cas pour lesquels les ondes de Rossby sont évanescentes, on a $\partial_{zz}\varphi+m^2\varphi=0$ avec $m^2>0$

pour lequel on peut poser $\psi=\psi_0e^{\frac{z}{2H_0}}e^{i(kx+ly+mz)}$


evanescent
evanescent
propagating
wavenumber
15
10
5
-40
-20
0
20
40
60
80
100
120
zonal wind

James

Calcul des flux de moment et de température

On suppose $\psi = \psi_0 e^{\frac{z}{2H_0}} \cos(kx+ly+mz)$

On a déjà calculé le flux méridional de moment pour lequel le calcul est inchangé à un facteur e^{z/H_0} près.

$$\langle u v \rangle = -\frac{kl}{2} \psi_0^2 e^{\frac{z}{H_0}}$$

Pour calculer le flux méridien de température, il nous faut

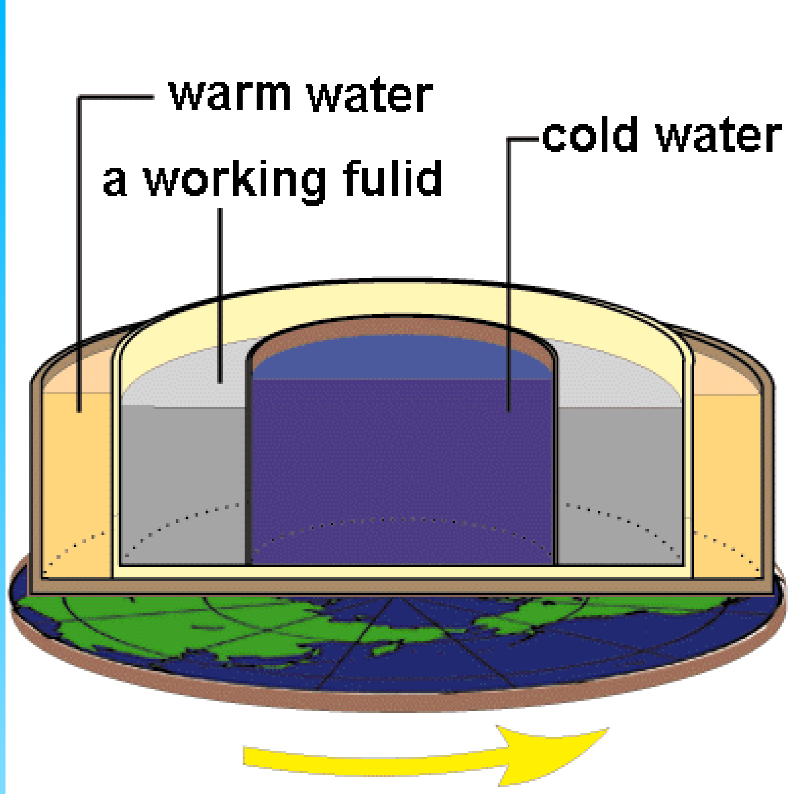
$$v = \partial_x \psi = -k \psi_0 e^{\frac{z}{2H_0}} \sin(kx+ly+mz)$$

$$\theta' = \frac{\bar{\bar{\theta}}_0 f_0}{g} \partial_z \psi = \frac{\bar{\bar{\theta}}_0 f_0}{g} e^{\frac{z}{2H_0}} \left(\frac{1}{2H_0} \cos(kx+ly+mz) - m \sin(kx+ly+mz) \right)$$

d'où

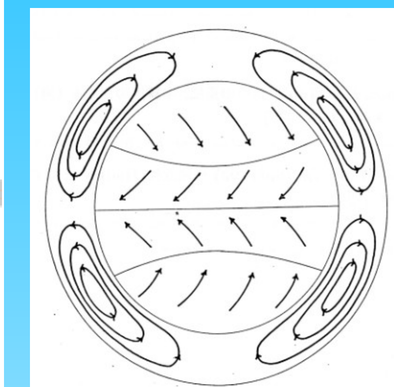
$$\langle v \theta' \rangle = \frac{\bar{\bar{\theta}}_0 f_0}{g} k\, m\, \psi_0^2 e^{\frac{Z}{H_0}}$$

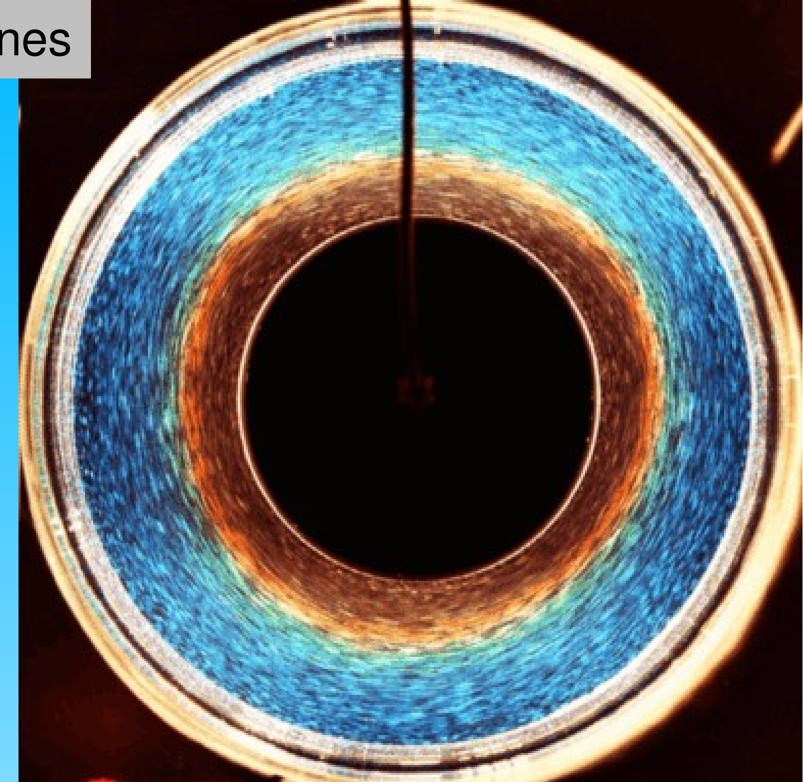
B. Legras 2009

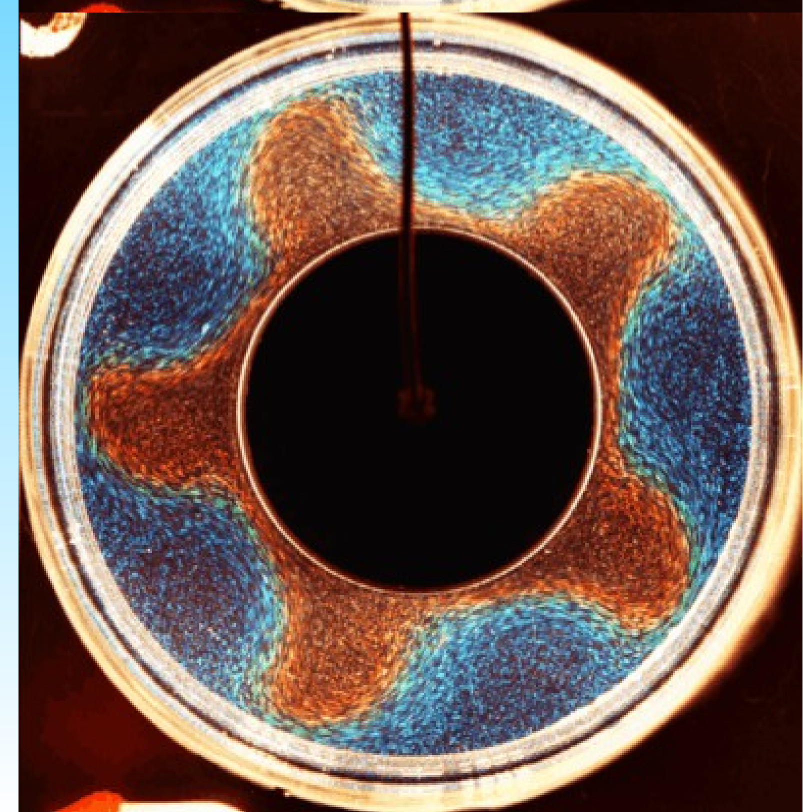


P.B Rhines

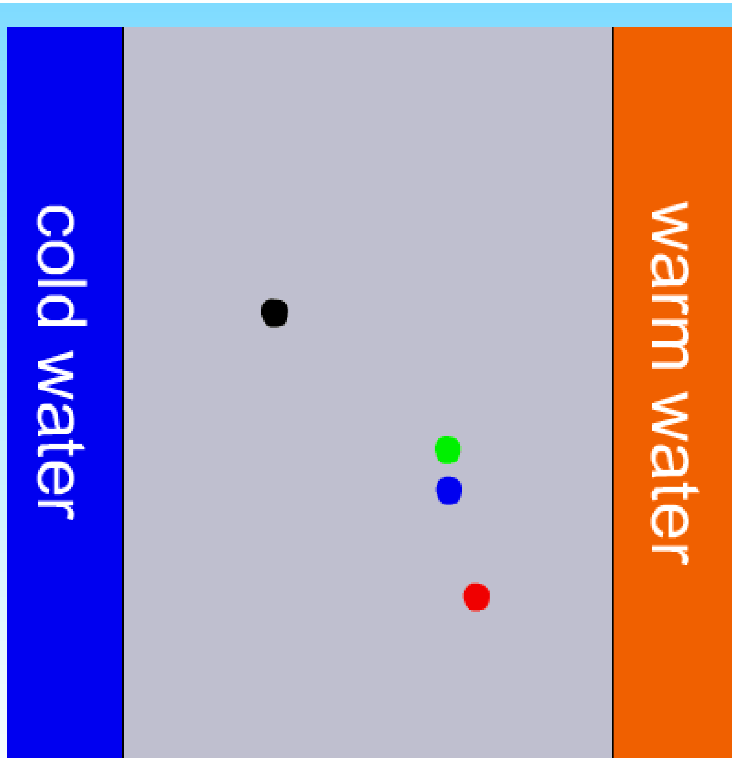
Régime axisymétrique







Régime barocline ondulatoire



Convection oblique

II.32

Flux d'Eliassen-Palm (1)

On considère ici la forme quasi-géostrophique linéarisée par rapport à un écoulement $U(y,z)=-\partial_y \Psi$

$$\partial_t q' + U\,\partial_x q' + \partial_y \langle q\rangle \partial_x \psi' = 0$$

$$\langle q\rangle = \beta\, y - \partial_y U + \frac{1}{\rho_R}\partial_z \frac{\rho_R}{N^2}\partial_z \Psi$$

où $\partial_y \langle q\rangle = \beta - \partial_{yy} U + \frac{1}{\rho_R}\partial_z \frac{\rho_R}{N^2}\partial_z U$

$$q' = \nabla^2 \psi' + \frac{1}{\rho_R}\partial_z \frac{\rho_R}{N^2}\partial_z \psi'$$

En posant $\psi' = \psi_0 e^{\frac{z}{2\mathrm{H}}} e^{i(kx+ly+mz-\omega t)}$, on obtient la relation de dispersion

$$\omega = U\,k - \frac{k\,\partial_y \langle q\rangle}{K_T^2} \quad \text{avec} \quad K_T^2 = K^2 + \frac{f_0^2}{N^2}\left(m^2 + \frac{1}{4\,H_0^2}\right)$$

Les composantes méridienne et verticale de la vitesse de groupe sont

$$c_{gy} = \frac{2\,k\,l\,\partial_y \langle q\rangle}{K_T^4} \quad \text{et} \quad c_{gz} = \frac{2\,f_0^2 k\,m\,\partial_y \langle q\rangle}{N^2 K_T^4}$$

ce qui s'écrit aussi, en utilisant les expressions déjà obtenues des flux, encore valables ici

$$c_{gy} = \frac{-4\,e^{-\frac{z}{H}}\partial_y \langle q\rangle}{|\psi_0|^2 K_T^4}\langle u'v'\rangle \quad \text{et} \quad c_{gz} = \frac{4\,f_0\,g}{\bar{\bar{\theta}}_0}\frac{e^{-\frac{z}{H}}\partial_y \langle q\rangle}{|\psi_0|^2 N^2 K_T^4}\langle v'\theta'\rangle$$

B. Legras 2009

Flux d'Eliassen-Palm (2)

Le vecteur $\vec{F} = \left(-\rho_R \langle u'v' \rangle, \frac{\rho_R f_0 g}{N^2 \bar{\bar{\theta}}_0} \langle v'\theta' \rangle \right)$

est parallèle à la vitesse de groupe dans le plan méridien $\vec{c}_g = \frac{4 \partial_y \langle q \rangle}{\rho_r K_T^4 |\psi_0|^2} \vec{F}$

Le flux d'Eliassen-Palm $\vec{F}$ peut s'interpréter indépendamment de la théorie des rayons.

Si on moyenne l'équation de la vorticité potentielle en x, on obtient $\partial_t \langle q \rangle + \partial_y \langle v'q' \rangle = 0$

avec $v'q' = \frac{1}{2} \partial_x (v'^2 - u'^2) - \partial_y (v'u') + \frac{f_0 v'}{\rho_R} \partial_z \left(\frac{\rho_R f_0}{N^2} \partial_z \psi' \right)$ et $\theta' = \frac{f \bar{\bar{\theta}}_0}{g} \partial_z \psi'$

soit $v'q' = \frac{1}{2} \partial_x \left(v'^2 - u'^2 - \frac{g^2 \theta'^2}{N^2 \bar{\bar{\theta}}_0^2} \right) - \partial_y (v'u') + \frac{f_0 g}{\rho_R} \partial_z \left(\frac{\rho_R f_0 v'\theta'}{N^2 \theta_0^2} \right)$

Par la moyenne zonale, le premier terme donne une contribution nulle et on obtient

$$\langle v'q' \rangle = \frac{1}{\rho_R} \left(-\partial_y \rho_R \langle u'v' \rangle + \partial_z \frac{\rho_R f_0 g}{N^2 \bar{\bar{\theta}}_0} \langle v'\theta' \rangle \right) = \frac{1}{\rho_R} \operatorname{div} \vec{F}$$

Repartant de l'équation de la vorticité potentielle q', on a, en la multipliant par $\rho_R \frac{q'}{\partial_y \langle q \rangle}$

et en moyennant en x

$$\partial_t \left(\frac{\frac{1}{2} \rho_R \langle q'^2 \rangle}{\partial_y \langle q \rangle} \right) + \operatorname{div} \vec{F} = 0$$

B. Legras 2009

Flux d'Eliassen-Palm (3)

On définit la densité d'action $A = \dfrac{\frac{1}{2}\rho_R \langle q'^2 \rangle}{\partial_y \bar{q}}$

La propriété $\partial_t A + \mathrm{div}\,\vec{F}$ indique que l'action de la perturbation est modifiée en fonction de la divergence du flux d'Eliasen-Palm.

De même $\partial_t \langle q \rangle + \partial_y \left(\dfrac{1}{\rho_R} \mathrm{div}\,\vec{F} \right) = 0$ indique que le flux d'Eliasen-Palm détermine aussi les variations de l'écoulement moyen.

Or on peut constater que pour une onde de Rossby plane dont les flux ont été calculés plus haut, on a $\mathrm{div}\vec{F} = 0$

Par conséquent, la propagation d'une onde plane conserve l'action A et il n'y a pas d'interaction en retour sur l'écoulement moyen

L'amplitude q' augmente lorsque $|\partial_y \langle q \rangle|$ diminue. L'amplitude augmente aussi en fonction de la diminution de ρ_R avec l'altitude.

Il y a interaction avec l'écoulement moyen sur les niveaux critiques où la propagation cesse, ou lorsque l'amplitude devient trop grande pour que l'approximation linéaire reste valable. Il y a alors déferlement de l'onde.

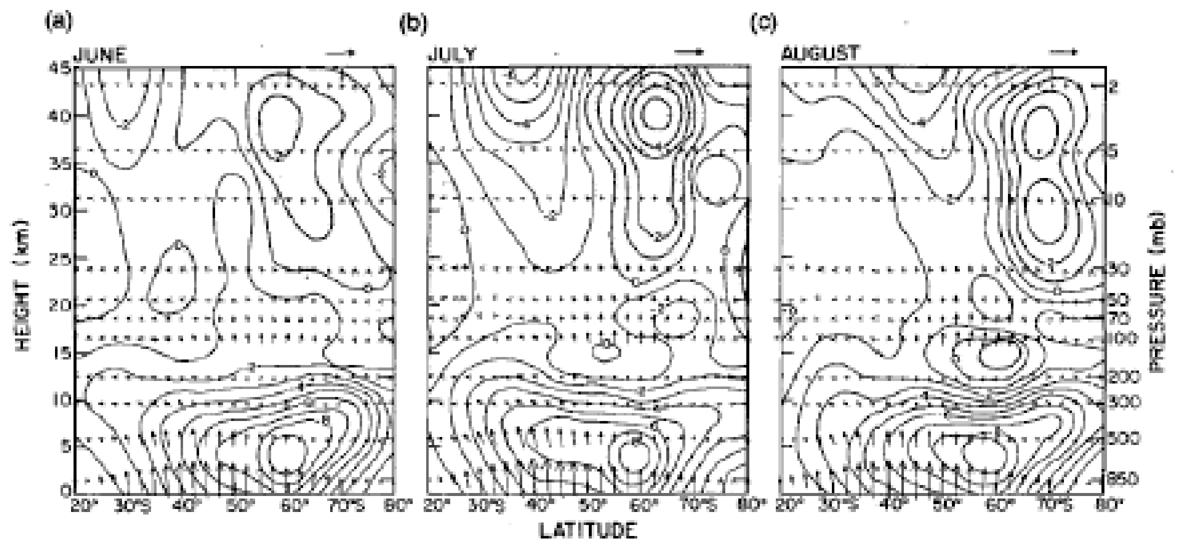
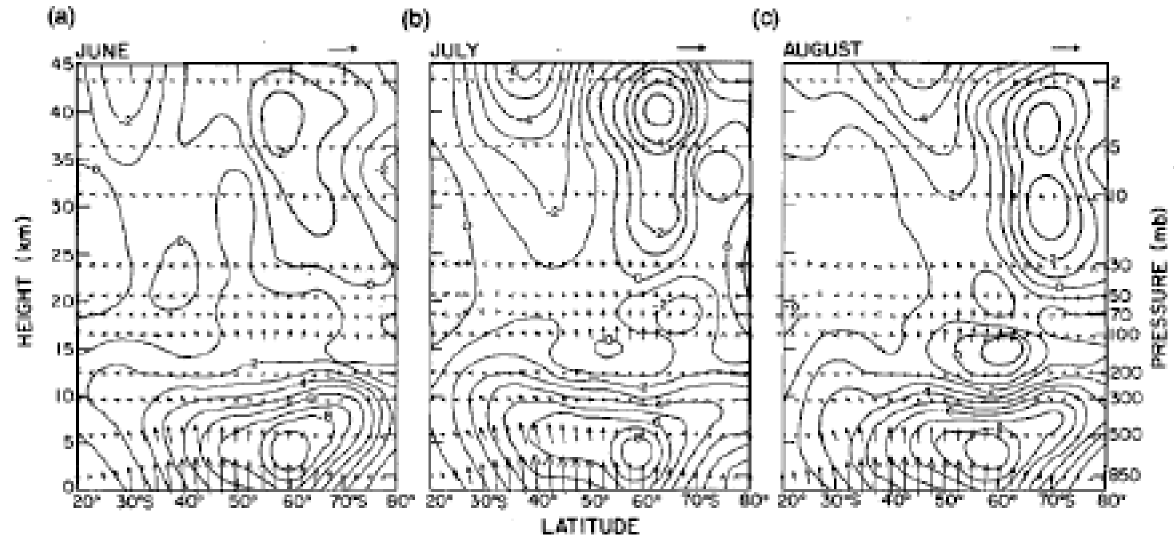


Fig. 3: Eliassen-Palm flux diagrams for the Southern Hemisphere averaged for the months of a) June, b) July and c) August 1979. The E-P flux vectors are represented by arrows whose lengths are scaled relative to the arrows above the figures. The lengths of these reference arrows are equivalent to 10^{16} kgm/s. Contours indicate convergence of EP flux. At 1000 mb and above the scale vector reduces by a factor of 10 so that the arrows in the stratosphere may more easily be seen.



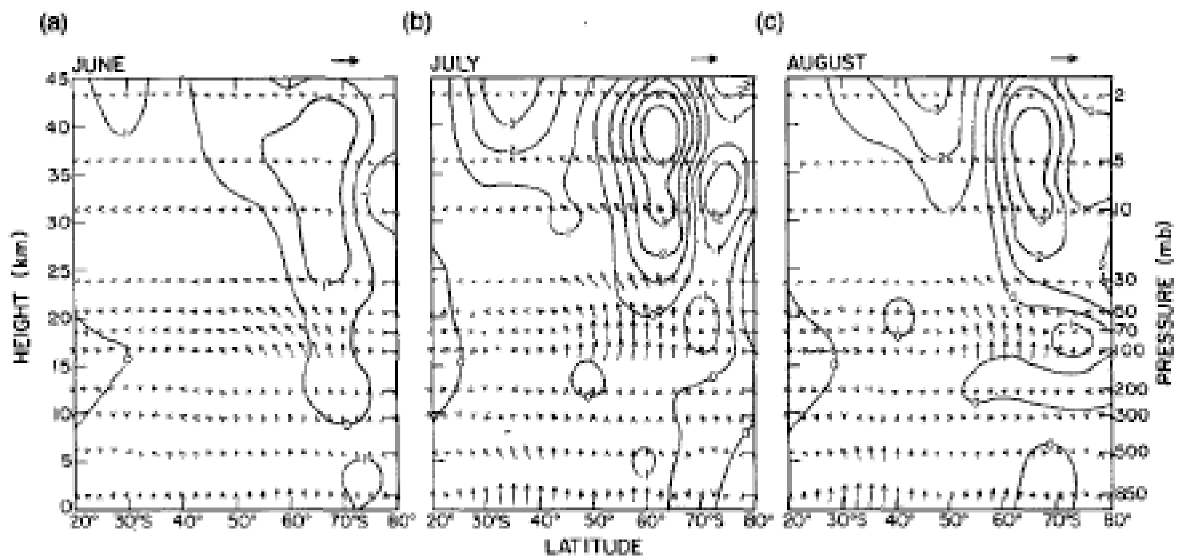
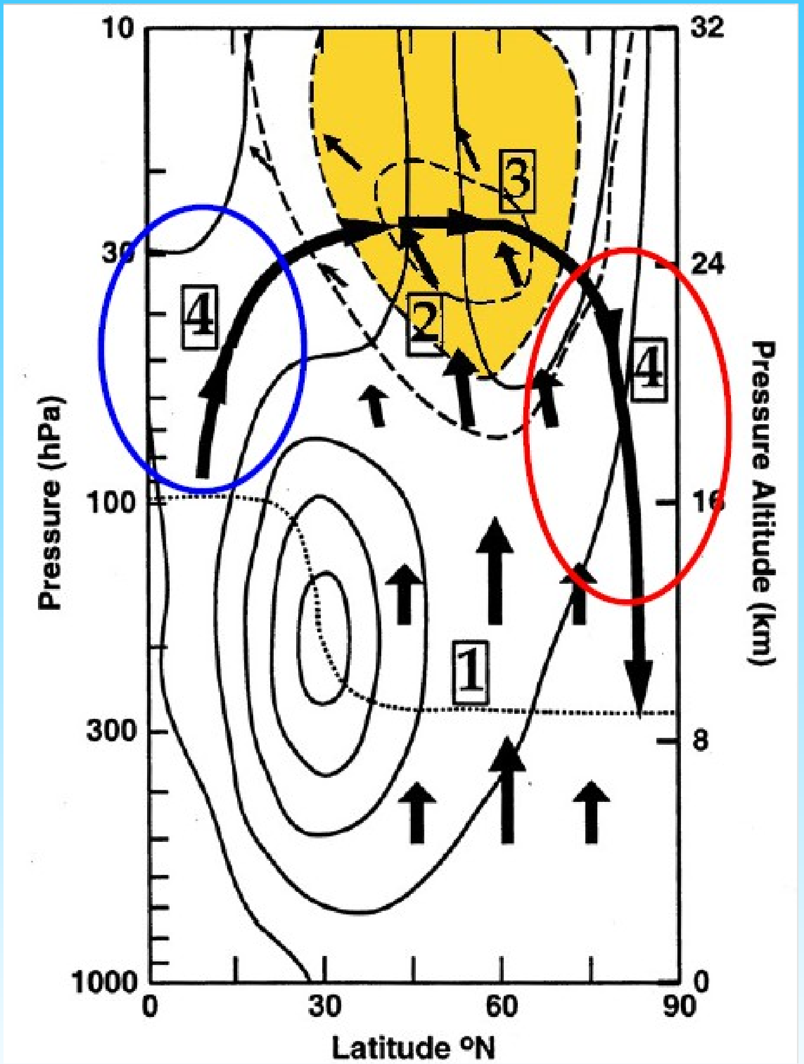


Fig. 4: As in Fig. 3 except for the wavenumber 1 only. The scale of the arrow corresponds to $2x10^{15}$ kgm/s.

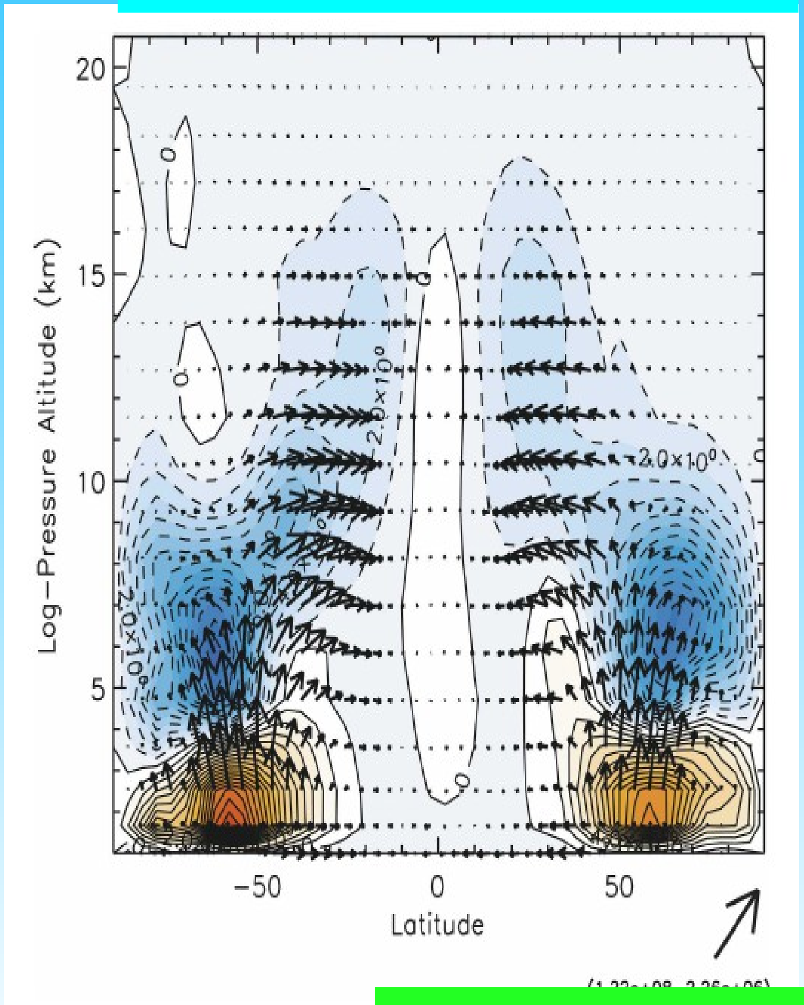
Brewer-Dobson circulation is forced by the divergence of the extra-tropical and subtropical upward EP flux [1]
-> easterly drag and mixing in the stratosphere [2]
-> induced polarward motion [3]
-> ascent (heating) in the tropics and descent (cooling) at mid and polar latitudes [4]

Haynes et al., JAS, 1991
Holton et al., RG, 1995



Newman et al., 2001

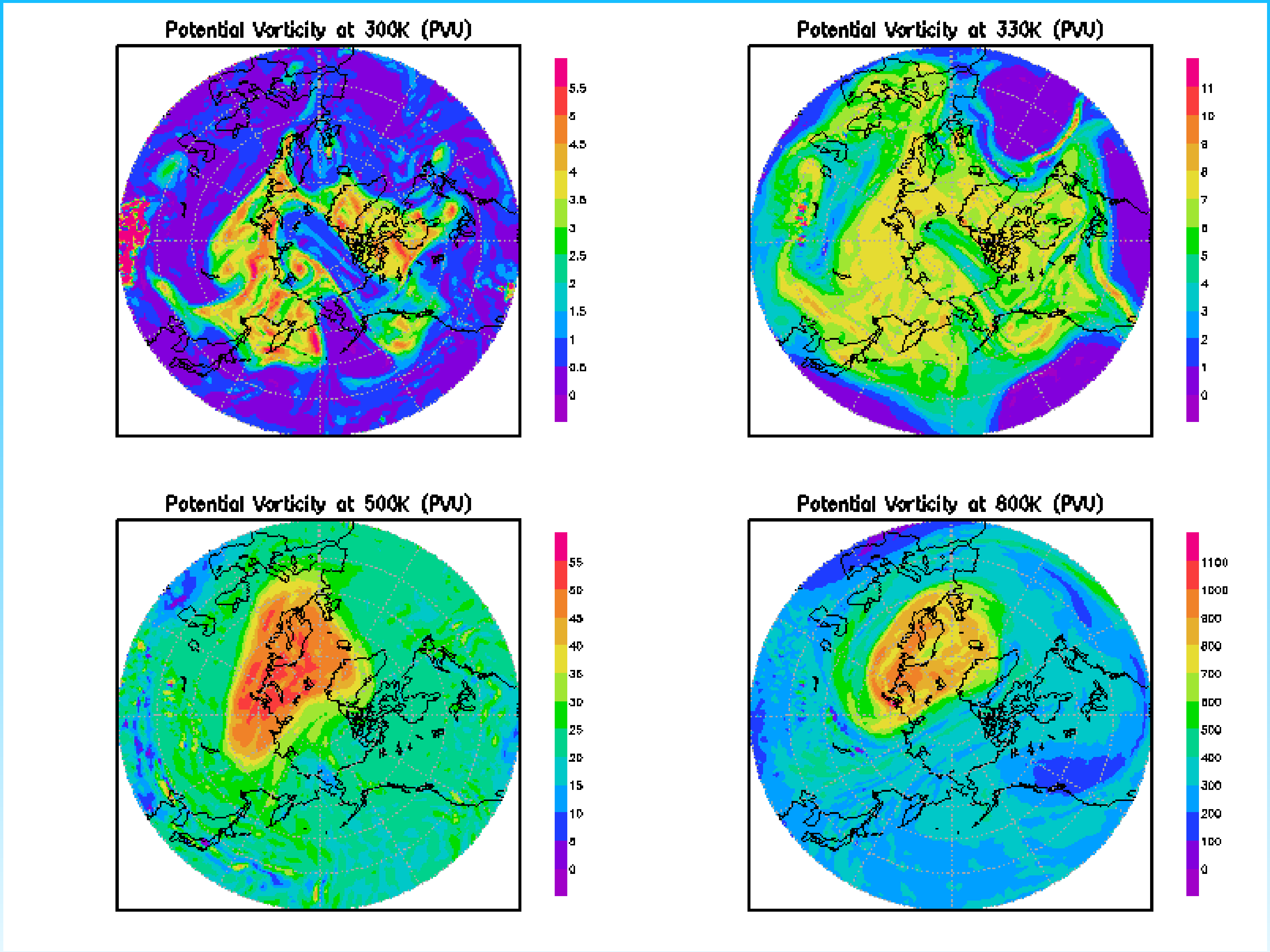
Actual distribution of EP flux in annual average



Garcia & Randel, JAS, 2008

Sources of figures:

- Held in Hoskins & Pearce, Large-Scale Dynamical Processes in the Atmosphere, Academic Press, 1983
- COLAS, http://wxmaps.org
- Hoskins, Robertson & McIntyre, QJRMS, 1985
- ERA-40 atlas, http://www.ecmwf.int
- Rhines web site
- James, Introduction to Circulating Atmospheres, CUP, 1984



B. Legras 2009