MATHEMATIQUES POUR LES GEOSCIENCES, Devoir à la Maison

Donné le 25 novembre 2020, à rendre le 9 décembre 2020.

Espaces Vectoriels

Exercice 1:
Montrer que la famille (1,2,3), (4,5,8), (9,6,7), (-3,2,8) n'est pas linéairement indépendante dans R^3.

Exercice 2:
Montrer que si la famille v_1, v_2, v_3, v_4 est génératrice d'un espace vectoriel V, alors la famille

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

est également famille génératrice de V.

Exercice 3:
Soit U le sous espace vectoriel de R^5 défini par

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \text{ tels que } x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_5 = 0\}.$$

(a) Trouver une base de U.
(b) Étendre cette base en une base de R^5.

Applications linéaires

Exercice 4:
Soient b, c dans R. Soit T l'application de R^3 dans R^2 définie par

$$T(x, y, z) = (2x - 4y + 3z + b, 6x + cxyz).$$

Montrer que T est une application linéaire si et seulement si $b = c = 0$.

Exercice 5: Donner un exemple d'application linéaire $T : R^4 \to R^4$ telle que $R_T = N_T$.

Exercice 6:
Soit $T : R^2 \to R^3$, définie par $T(x_1, x_2) = (x_1, 2x_2, x_1 + x_2)$. Déterminer une base de son image R_T. En déduire le rang de l'application T.

Représentation matricielle

Exercice 7:
Soit $P_n(R)$ l'ensemble des polynomes de degré n, et soit $D : P_3(R) \to P_2(R)$ l'application différentiation:

$$Dp = p'.$$

(a) Donner la matrice de D dans les bases canoniques de $P_3(R) : (1, x, x^2, x^3)$ et de $P_2(R) : (1, x, x^2)$.
(b) Trouver une base de $P_3(R)$ et une base de $P_2(R)$ telles que la matrice de D dans ces bases soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8:
Trouver un exemple de deux matrices A et B de dimension 2×2 telles que $AB \neq BA$.

Exercice 9:
Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$