DM solution p1

MATHEMATIQUES POUR LES GEOSCIENCES, Devoir à la Maison

Donné le 25 novembre 2020, à rendre le 9 décembre 2020.

Espaces Vectoriels

Exercice 1:
Montrer que la famille (1,2,3), (4,5,8), (9,6,7), (-3,2,8) n'est pas linéairement indépendante dans R^3.

Exercice 2:
Montrer que si la famille v_1, v_2, v_3, v_4 est génératrice d'un espace vectoriel V, alors la famille

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

est également famille génératrice de V.

Exercice 3:
Soit U le sous espace vectoriel de R^5 défini par

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \text{ tels que } x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_5 = 0\}.$$

(a) Trouver une base de U.
(b) Étendre cette base en une base de R^5.

Applications linéaires

Exercice 4:
Soient b, c dans R. Soit T l'application de R^3 dans R^2 définie par

$$T(x, y, z) = (2x - 4y + 3z + b, 6x + cxyz).$$

Montrer que T est une application linéaire si et seulement si $b = c = 0$.

Exercice 5: Donner un exemple d'application linéaire $T : R^4 \to R^4$ telle que $R_T = N_T$.

Exercice 6:
Soit $T : R^2 \to R^3$, définie par $T(x_1, x_2) = (x_1, 2x_2, x_1 + x_2)$. Déterminer une base de son image R_T. En déduire le rang de l'application T.

Représentation matricielle

Exercice 7:
Soit $P_n(R)$ l'ensemble des polynomes de degré n, et soit $D : P_3(R) \to P_2(R)$ l'application différentiation:

$$Dp = p'.$$

(a) Donner la matrice de D dans les bases canoniques de $P_3(R) : (1, x, x^2, x^3)$ et de $P_2(R) : (1, x, x^2)$.
(b) Trouver une base de $P_3(R)$ et une base de $P_2(R)$ telles que la matrice de D dans ces bases soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8:
Trouver un exemple de deux matrices A et B de dimension 2×2 telles que $AB \neq BA$.

Exercice 9:
Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Exercice 1 Pour montrer que $(1,2,3)$, $(4,5,8)$, $(9,6,7)$ et $(-3,2,8)$ n'est pas linéairement indépendante, il suffit de trouver a, b, c, d non tous nuls tels que $a(1,2,3)+b(4,5,8)+c(9,6,7)+d(-3,2,8)=0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+4b+9c-3d=0 \\ 2a+5b+6c+2d=0 \\ 3a+8b+7c+8d=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a+4b+9c-3d=0 \\ -3b-12c+8d=0 \\ -4b-20c+17d=0 \end{cases}$$

$$\underset{3L_3-4L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a+4b+9c-3d=0 \\ -3b-12c+8d=0 \\ -12c+19d=0 \end{cases} \quad \text{On peut prendre} \begin{cases} c=19 \\ d=12 \\ b=-44 \\ a=41 \end{cases}$$

Les vecteurs sont donc liés.

(Remarque : une autre façon d'obtenir le résultat est de se rappeler qu'une famille de 4 éléments dans un espace de dimension 3 ne peut pas être libre).

• Exercice 2 : On suppose v_1, v_2, v_3, v_4 famille génératrice d'un espace vectoriel V. On veut montrer que $v_1-v_2, v_2-v_3, v_3-v_4, v_4$ est également génératrice. En d'autres termes, pour tout $v \in V$, on veut montrer qu'il existe $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ scalaires tels que $v = \lambda_1(v_1-v_2)+\lambda_2(v_2-v_3)+\lambda_3(v_3-v_4)+\lambda_4 v_4$.

Soit $v \in V$. v_1, v_2, v_3, v_4 étant génératrice, il existe $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4$ scalaires tels que

$$v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3 + \mu_4 v_4$$

$$\Longleftrightarrow v = \mu_1(v_1-v_2) + (\mu_2+\mu_1)v_2 + \mu_3 v_3 + \mu_4 v_4$$

$$\Longleftrightarrow v = \mu_1(v_1-v_2) + (\mu_2+\mu_1)(v_2-v_3) + (\mu_1+\mu_2+\mu_3)v_3 + \mu_4 v_4$$

$$\Longleftrightarrow v = \mu_1(v_1-v_2) + (\mu_1+\mu_2)(v_2-v_3) + (\mu_1+\mu_2+\mu_3)(v_3-v_4) + (\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4)v_4$$

$$\Longleftrightarrow v = \lambda_1(v_1-v_2) + \lambda_2(v_2-v_3) + \lambda_3(v_3-v_4) + \lambda_4 v_4$$

$$\Longleftrightarrow v \in \mathrm{Vect}(v_1-v_2, v_2-v_3, v_3-v_4, v_4)$$

La famille est bien génératrice de V.

Exercice 3 Soit $U = \{(x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5)$ tel que $x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_5 = 0\}$

(a) On va montrer que $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de U.

1) famille libre : Si $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$, alors $\begin{pmatrix} a \\ -a \\ b \\ c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = c = 0$

La famille $e_1\ e_2\ e_3$ est donc libre

2) famille génératrice :

Soit $v \in U$. $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix}$. Alors on a $\begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -v_1 \\ v_3 - v_5 = 0 \Rightarrow v_3 = v_5 \end{cases}$.

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 e_1 + v_3 e_2 + v_4 e_3 \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3).$$

$\rightarrow$ La famille $e_1\ e_2\ e_3$ est génératrice.

C'est donc une base

(b) On veut étendre e_1, e_2, e_3 en une base de $\mathbb{R}^5$.

Soient $e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrons que e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_5 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$$

La famille est donc libre dans un espace de dimension 5 $\Rightarrow$ c'est donc une base de $\mathbb{R}^5$

Exercice 4 $T : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x-4y+3z+b \\ 6x+cxyz \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ linéaire $\Leftrightarrow b=c=0$.

1) On suppose $b=c=0$. Montrons que T linéaire :

Soient $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et λ scalaire dans $\mathbb{R}$.

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} x_1+\lambda x_2 \\ y_1+\lambda y_2 \\ z_1+\lambda z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+\lambda 2x_2 - 4y_1 - \lambda 4y_2 + 3z_1 + \lambda 3z_2 \\ 6x_1 + \lambda 6x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 - 4y_1 + 3z_1 \\ 6x_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2x_2 - 4y_2 + 3z_2 \\ 6x_2 \end{pmatrix}$$

$$= T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow T \text{ linéaire}$$

2) On suppose T linéaire. On a vu que cela implique

$T(0) = 0 \Rightarrow b=0$.

D'autre part, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2-4+3 \\ 6+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6+c \end{pmatrix}$

et $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2+3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Les deux sont égaux si T est linéaire, donc $c=0$.

Exercice 5: $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ telle que $R_T = N_T$:

Soit $T : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Son image est $R_T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$

et son noyau est $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{tels que } T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{tels que } x_3 = x_4 = 0 \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Donc $R_T = N_T$.

Exercice 6- Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$T(x_1, x_2) = (x_1, 2x_2, x_1 + x_2).$$

Trouvons une base de son image:

$R_T = \{(x_1, 2x_2, x_1 + x_2)$ avec x_1, x_2 réels$\}$ que l'on réécrit

$$R_T = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } x_1, x_2 \text{ réels} \right\}.$$

$$\Rightarrow R_T = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Donc les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une famille génératrice de R_T. Montrons $\{u, v\}$ libre.

Soient λ et μ réels tels que

$$\lambda u + \mu v = 0 \iff \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ 2\mu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de R_T.

Le rang de T est donc 2

Exercice 7 $D : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \\ p & \longmapsto & Dp = p' \end{array} \right)$

(a) La matrice de D dans les bases $(1, x, x^2, x^3)$ de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ et $(1, x, x^2)$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

est
$$M = \left(\begin{array}{cccc} \underset{=0}{D(e_1)} & \underset{=1}{D(e_2)} & \underset{=2x}{D(e_3)} & \underset{=3x^2}{D(e_4)} \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \text{sur } e_1' \\ \leftarrow \text{sur } e_2' = x \\ \leftarrow \text{sur } e_3' = x^2 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) On voit que si l'on prend comme base de $\mathcal{P}_3$: $\left(x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, 1\right)$ et l'on garde comme base de $\mathcal{P}_2$: $(1, x, x^2)$, la matrice de D devient

$$\tilde{M} = \left(\underset{=1}{D(x)} \;\; \underset{=x}{D\left(\tfrac{x^2}{2}\right)} \;\; \underset{=x^2}{D\left(\tfrac{x^3}{3}\right)} \;\; \underset{=0}{D(1)} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \text{sur } 1 \\ \leftarrow \text{sur } x \\ \leftarrow \text{sur } x^2 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui est bien la matrice voulue

Exercice 8 On prend par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \cdots \end{pmatrix}$$

le 1er coefficient n'est pas le même $\Rightarrow AB \neq BA$.

mais $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots \end{pmatrix}$

Exercice 9

on développe selon colonne 4

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\det = 0}$$

det = 0 car les deux premières lignes sont linéairement dépendantes

deuxième ligne

$$= -4 \left[-1 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right] = -4 (-2 + 2)$$

$$= \underline{0}$$