MATHEMATIQUES POUR LES GEOSCIENCES, C. Muller

SYLLABUS

Contents

References:

- Linear Algebra and Its Applications, by Peter Lax
- Linear Algebra Done Right, by Sheldon Axler
- Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, by William Boyce and co-authors

Notes de cours

I Applications lineaires en dimension finie

I.1 Espaces vectoriels de dimension finie

I.1.a Combinaisons lineaires, famille generatrice *[Axler 2A]*

Rappel: On denote l'ensemble des scalaires K = R ou C (par scalaire on entend un nombre, a distinguer des vecteurs).

Rappel: Un espace vectoriel est un ensemble non-vide d'objets, appeles vecteurs, que l'on peut additioner entre eux, ou multiplier par un scalaire, en restant dans l'espace vectoriel. En d'autres termes, une combinaison lineaire de vecteurs d'un espace vectoriel, est egalement dans l'espace vectoriel. C'est par exemple le cas de R^2 ensemble des vecteurs a 2 dimensions $v = (x, y)$ avec $K = R$.

Def: combinaison lineaire
Une combinaison lineaire de vecteurs v_1, ... v_m d'un espace vectoriel V sur K est un vecteur de la forme:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m,$$

ou $\lambda_1 ... \lambda_m \in K$.

Exemples:
Dans R^3

- (17,-4,2) est une combinaison lineaire de (2,1,-3);(1,-2,4) car :
  (17, -4, 2)= 6 (2, 1,-3) + 5 (1, -2, 4)
- (17, -4,5) n'est pas une combinaison lineaire de (2,1,-3) ;(1,-2,4) car il n'existe pas de scalaires λ_1, λ_2 dans R tels que :
  (17, -4, 5) = λ_1 (2,1,-3) + λ_2 (1, -2, 4). En d'autres termes, le systeme d'equations

$$\begin{cases} 17 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ -4 = \lambda_1 - 2\lambda_2 \\ 5 = -3\lambda_1 + 4\lambda_2 \end{cases}$$

  n'admet pas de solution *(verifié en classe)*.

Def: Soit une famille de vecteurs $v_1, ...v_m$ dans un espace vectoriel V. L'ensemble des combinaisons lineaires de ces vecteurs est un espace vectoriel, appele l'espace vectoriel engendre par les vecteurs $v_1, ...v_m$, et denote $Vect(v_1, ...v_m)$.
En d'autres termes,

$$Vect(v_1, ...v_m) = \{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m, \lambda_1 ... \lambda_m \in K\}.$$

Par convention, l'ensemble vectoriel engendre par la liste vide () est defini comme etant $\{0\}$.

Exemples:
• L'exemple predecant montre que dans R^3 :
$(17, -4, 2) \in Vect((2, 1, -3); (1, -2, 4))$
$(17, -4, 5) \notin Vect((2, 1, -3); (1, -2, 4))$
• $R^3 = Vect(e_1 = (0, 0, 1); e_2 = (0, 1, 0); e_3 = (0, 0, 1))$. En effet pour tout $v = (v_1, v_2, v_3), v = v_1 e_1 + ... + v_3 e_3$.

Def: Une famillle de vecteurs $v_1, ...v_m$ d'un espace vectoriel V est dite famille generatrice si tout element de V s'ecrit comme une combinaison lineaire de $v_1 ... v_m$:
$\forall v \in V, \exists \lambda_1 ... \lambda_m$ tels que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m$.
En d'autres termes, $V = Vect(v_1, ...v_m)$.

Exemple:
e_1, e_2, e_3 est famille generatrice de R^3 *(verifié en classe)*.

I.1.b Famille libre *[Axler 2A]*

Considerons une famille $v_1...v_m$ d'une espace vectoriel V, et un vecteur $v \in Vect(v_1...v_m)$. Donc par definition on peut trouver des scalaires $\lambda_1...\lambda_m$ tels que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m.$$

On peut alors se demander si ces scalaires sont uniques. Supposons qu'il existe une autre combinaison lineaire egale a v:

$$v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + ... + \mu_m v_m.$$

La difference donne

$$0 = (\lambda_1 - \mu_1)v_1 + (\lambda_2 - \mu_2)v_2 + ... + (\lambda_m - \mu_m)v_m.$$

On voit que, si la seule facon d'ecrire 0 comme combinaison des $v_1...v_m$ est avec des scalaires nuls, alors $\Rightarrow \lambda_1 = \mu_1, ..., \lambda_m = \mu_m$ et la combinaison lineaire ecrite plus haut pour v est unique.
Ce cas est tres important et a un nom, on dit que la famille est libre.

Def: Une famillle de vecteurs $v_1, ...v_m$ d'un espace vectoriel V est dite famille libre (ou lineairement independante) si le seul choix de scalaires $\lambda_1, ...\lambda_m$ qui donne $0 = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m$ est $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$.
Dans ce cas, tout vecteur de $Vect(v_1, ...v_m)$ s'ecrit comme une unique combinaison lineaire de $v_1...v_m$.
Par convention, la liste vide () est consideree comme libre.

Exemples *(verifié en classe)*:

- (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) est lineairement independante dans R^4.
- (1,0), (1,-2) est lineairement independante dans R^2.
- Une liste de vecteurs contenant le vecteur nul n'est pas lineairement independante.
- Une liste de deux vecteurs v_1, v_2 est libre si et seulement si aucun des vecteurs n'est un multiple scalaire de l'autre.
- Montrer que si v_1, v_2, v_3 est une famille libre, alors $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3$ l'est egalement.

Def: Une famillle de vecteurs $v_1, ...v_m$ d'un espace vectoriel V est dite famille liee (ou lineairement dependante) si elle n'est pas libre.
En d'autre termes, on peut trouver des scalaires $\lambda_1, ...\lambda_m$ non tous nuls tels que $0 = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m$.
C'est equivalent a dire que l'on peut ecrire un des v_i comme combinaison lineaire des autres vecteurs. En effet, les λ_i sont non tous nuls, donc si par exemple $\lambda_1 \neq 0$, alors

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n$$

est combinaison lineaire des autres.

Exemples de familles liees *(verifié en classe)*:

- (2,3,1), (1,-1,2), (7,3,8) est liee dans R^3 car
  2 (2,3,1) + 3(1,-1,2) + (-1) (7,3,8) = (0,0,0).
- Si $c \neq 8$, la liste (2,3,1), (1,-1,2), (7,3,c) est lineairement independante dans R^3.
- Si un des vectors d'une liste $(v_1, ...v_m)$ s'ecrit comme combinaison lineaire des autres, alors la famille est liee.
- Toute liste contenant le vecteur nul est liee.

Exercice *(verifié en classe)*
- $V = C, K = R \Rightarrow 1, i$ lineairement independants.
- $V = C, K = C \Rightarrow 1, i$ lineairement dependants.

I.1.c Base et dimension *[Axler 2B, 2C]*

Def: une base d'un espace vectoriel V est une liste de vecteurs de V libre et generatrice.

Exemples *(verifié en classe)*:
• $e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$ est une base de R^n, appelee la base canonique.
• (1,1,0), (0,0,1) est une base de $\{(x, x, y), x, y \in R\}$.

Propriete *(verifié en classe)*: Une liste $v_1, ..., v_n$ de vecteurs de V est une base si et seulement si tout v dans V s'ecrit de facon unique comme combinaison lineaire des $v_1, ..., v_n$.
(En effet, generatrice $\Rightarrow v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$, et libre $\Rightarrow$ unique combinaison lineaire).

Def: Un espace vectoriel qui admet une base avec n elements est dit de dimension n.
Par convention, $\{0\}$ a dimension 0.

Quelques proprietes admises :
Prop:
• Tout ensemble de dimension finie a une base;
• Si un espace vectoriel est de dimension n, toutes ses bases ont n elements;
• Si un espace de dimension n a une famille libre (ou generatrice) avec n elements, alors cette famille est une base;
• Tout ensemble de vecteurs lineairement independants peut etre complete en une base;

Exemples *(verifié en classe)*:
• R^2 a dimension 2. Une base est e_1, e_2.
• R^n a dimension n. Une base est $e_1, ..., e_n$.
• Soit v=(1,1) dans R^2. Le completer en une base.
• (1,2) et (3,5) forment ils une base de R^2 ?
• (1,2,-4) et (7,-5,6) forment ils une base de R^3 ?
• (1,2) (3,5) (4,13) forment ils une base de R^2 ?
• (1,-1,0) et (1,0,-1) forment ils une base de $V = \{(x, y, z) \in R^3$ tels que $x + y + z = 0\}$?

Exercices *(verifié en classe)*

- Soit V, le sous espace vectoriel de R^5 defini par
  $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in R^5$ tels que $x_1 = 3x_2, x_3 = 7x_4\}$
  (a) Trouver une base de V. Quelle est sa dimension?
  (essayons $v_1 = (3, 1, 0, 0, 0); v_2 = (0, 0, 7, 1, 0); v_3 = (0, 0, 0, 0, 1)$. Montrer que cette famille est libre et generatrice. Deduire la dimension).
  (b) La completer en une base de R^5.
  (essayons $v_4 = (1, 0, 0, 0, 0); v_5 = (0, 0, 1, 0, 0)$. Montrer que cette famille est libre et conclure).
- Soient $v_1, ...v_4$ base d'une espace vectoriel V. Montrer que $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$ est aussi une base de V.

I.2 Rappels sur les applications lineaires

I.2.a application lineaire, noyau, image, rang *[Axler 3A,B]*

Rappels:
Une application lineaire $T : U \to W$, d'un espace vectoriel U dans un autre espace vectoriel W , est une application qui preserve les combinaisons lineaires: $T(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + ... + \lambda_n T(v_n)$.
Pour montrer qu'une application est lineaire, il suffit de montrer que pour tout $u, v \in U$, pour tout λ scalaire, $T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$.
On a forcement $T(0) = 0$ pour toute application lineaire.

Exemples *(verifié en classe)*:

- $T : R \to R$ avec $T(x) = 2x$ est une application lineaire: $T(\lambda x + y) = 2(\lambda x + y) = \lambda 2x + 2y = \lambda T(x) + T(y)$.
- $T : R \to R$ avec $T(x) = x^2$ n'est pas une application lineaire: $T(\lambda x+y) = (\lambda x+y)^2 \neq \lambda T(x)+T(y)$.

- La fonction nulle $T(x) = 0$ pour tout $x \in U$ est une application lineaire
- La fonction $T(x) = ax + b$ pour tout $x \in U$, avec a et b scalaires, est une application lineaire si et seulement si $b = 0$.
- $T : R^3 \to R^2$ definie par $T(x, y, z) = (x + 2y + 4z, 7x - 2y + z)$ est une application lineaire (chaque coordonnee du vecteur image est une combinaison lineaire de x, y, z)
- Plus generalement, $T : R^n \to R^m$ definie par $T(x_1, ..., x_n) = (A_{1,1}x_1 + ... + A_{1,n}x_n, ..., A_{m,1}x_1 + ... + A_{m,n}x_n)$ ou les $A_{i,j}$ sont des scalaires, est une application lineaire (chaque coordonnee du vecteur image est une combinaison lineaire des $x_1...x_n$). En fait, toute application lineaire de R^n dans R^m est de cette forme.

Definition:
Le noyau d'une application lineaire $T : U \to W$ est l'ensemble des elements de U dont l'image est 0. En d'autres termes, le noyau est $N_T = \{u \in U$ tels que $T(u) = 0\}$.

Exemples:
• L'application nulle $T : U \to W$ a pour noyau U. En effet, $T(u) = 0$ pour tout $u \in U$.
• Soit $T : R^3 \to R$ definie par $T(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$. Son noyau est $N_T = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$. Une base est $(-2, 1, 0), (-3, 0, 1)$.

Definitions:
• L'image d'une application lineaire $T : U \to W$ est l'ensemble des elements de W qui sont image d'une element de U. En d'autres termes, l'image est $R_T = \{w \in W$ tels que l'on peut trouver $u \in U$ avec $w = T(u)\}$.
• Le rang d'une application lineaire est la dimension de son image.

Exemples:
• L'application nulle $T : U \to W$ a pour image $\{0\}$. Son rang est 0.
• Soit $T : R^3 \to R$ definie par $T(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$. Son image est $R_T = R$, et son rang $rg(T) = 1$.
• Soit $T : R^2 \to R^3$ definie par $T(x, y) = (2x, 5y, x + y)$. Son image est donc $R_T = \{((2x, 5y, x + y), x, y \in R\}$. Une base de R_T est $(2, 0, 1)$ et $(0, 5, 1)$, et son rang $rg(T) = 2$.

I.2.b injection, surjection, bijection *[Axler 3A,B]*

Definition:
Une application lineaire T est injective si $T(u) = T(v)$ implique $u = v$.
Une autre facon de le dire est que $u \neq v$ implique $T(u) \neq T(v)$ (ce qui est exactement equivalent a la definition donnee ci dessus).
En d'autres termes, injective signifie que "Un antecedant est unique".
(Rappel: un antecedant de $u \in W$ est un element de l'espace de depart $x \in U$ tel que $T(x) = u$; l'ensemble des antecedants de u s'ecrit $T^{-1}(u)$).

Exemples:
• la fonction identite $T : R \to R$ definie par $T(x) = x$ est injective.
• l'application nulle $T : R \to R$ definie par $T(x) = 0$ n'est pas injective.

Prop *(verifié en classe)*:
Une application lineaire T est injective si et seulement si $N_T = \{0\}$.
(Pour le prouver, noter que $(T(v \in N_t) = 0 = T(0)))$

Definition:
Une application lineaire $T : U \to W$ est surjective si son image est egale a W : $R_T = W$.
En d'autres termes, surjective signifie que "Tout element a un antecedant".

Exemples:
• L'application $T : R^3 \to R$ definie par $T(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ est surjective (exemple precedant, $R_T = R$).

• l'application $T : R^2 \to R^2$ definie par $T(x, y) = (x, x)$ n'est pas surjective ($R_T = Vect(1, 1) \neq R^2$)
• L'application $T : R^2 \to R^3$ definie par $T(x, y) = (2x, 5y, x + y)$ n'est pas surjective (exemple precedant $R_T = Vect((2, 0, 1), (0, 5, 1)) \neq R^3$).

Definition:
Une application lineaire $T : U \to W$ est bijective si elle est injective et surjective.
En d'autres termes, tout element de W a un antecedant (surjectivite), et cet antecedant est unique (injectivite).
On peut dans ce cas la definir l'application inverse $T^{-1} : W \to U$ qui a tout element de W associe son unique antecedant.

Exemples:
• L'application $T : R^3 \to R$ definie par $T(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ est surjective mais pas injective. Elle n'est donc pas bijective.
• L'application $T : R^2 \to R^2$ definie par $T(x, y) = (y, x)$ est bijective. Elle est sa propre inverse.
• L'application $T : R^2 \to R^3$ definie par $T(x, y) = (2x, 5y, x + y)$ n'est pas surjective, donc pas bijective.

Theoreme du rang
Soit T, une application lineaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie $T : U \to W$. Alors
dim U = dim R_T + dim N_T.
Preuve
Soit n = dim U et m = dim N_T. Soit $e_1, ..., e_m$ une base de N_T que l'on complete en une base $e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ...e_n$ de U. Montrons que $T(e_{m+1}), ...T(e_n)$ est une base de R_T :
-Famille generatrice: Soit $v \in R_T$. Par definition il existe $u = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n \in U$ avec $v = T(u) = \lambda_{m+1}T(e_{m+1}) + ... + \lambda_n T(e_n)$.
-Famille libre: Supposons $\lambda_{m+1}T(e_{m+1}) + ... + \lambda_n T(e_n) = 0 \Rightarrow T(\lambda_{m+1}e_{m+1} + ... + \lambda_n T(e_n)) = 0 \Rightarrow \lambda_{m+1}e_{m+1} + ... + \lambda_n T(e_n) \in N_T = Vect(e_1...e_m) \Rightarrow \lambda_{m+1}e_{m+1} + ... + \lambda_n T(e_n) = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_m e_m \Rightarrow \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_m e_m - \lambda m + 1e_{m+1} - ... - \lambda_n e_n = 0$. Comme $e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ...e_n$ est libre, tous les coefficients sont nuls.

Propriete (consequences du theoreme du rang) :
• Si $T : U \to W$ est bijective, alors dim U = dim W.
• Si dim U = dim W, alors T injective $\Rightarrow$ T bijective
• Si dim U = dim W, alors T surjective $\Rightarrow$ T bijective
• Si dim U > dim W $\Rightarrow$ dim $N_T \geq 1$, i.e. T non injective
• Si dim U < dim W $\Rightarrow$ $R_T \neq W$, i.e. T non surjective
• Si dim U = dim W et dim $N_T = 0$, alors $R_T = W$.

I.2.c Application : resolution de systemes lineaires d'equations

Le theoreme du rang a de nombreuses applications. Cela peut etre utile d'avoir des versions concretes. Reformulons en terme de m equations a resoudre pour n inconnues $(x_1, ..., x_n)$:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + ... + A_{1n}x_n = \sum_{k=1}^n A_{1k}x_k = b_1 \\ ... \\ A_{m1}x_1 + ... + A_{mn}x_n = \sum_{k=1}^n A_{mk}x_k = b_m, \end{cases}$$

ou les A_{ij} sont des scalaires.
Cela revient a resoudre $T(x) = b$ avec $x = (x_1, ..., x_n)$, $b = (b_1...b_m)$, et $T : R^n \to R^m$ est l'application lineaire discutee plus haut (exemple de §I.2.a), definie par

$$T(x) = (A_{11}x_1 + ... + A_{1n}x_n, ..., A_{m1}x_1 + ... + A_{mn}x_n)$$

(chaque coordonnee de $T(x)$ est une combinaison lineaire des $x_1...x_n$).
On veut savoir si il existe une unique solution pour un b donné. On voit deja que la reponse est non si le systeme n'est pas carre:

- Si l'on a plus d'inconnues que d'equations, $n > m$, alors une solution n'est pas unique.
  En effet si $T(x) = b$ et dim U > dim W, alors le noyau contient un element non nul $n \in N_T$ et

$T(x+n) = T(x) + T(n) = T(x) = b$ est aussi solution.
Exemple x+y=1 admet pour solution (x,y)=(1,0). n=2, m=1 $\Rightarrow$ Cette solution n'est pas unique, par ex (2,-1) l'est aussi. En fait (1,0)+λ(1,-1) est solution pour tout λ ($N_T = Vect(1,-1)$).

- Si il y a plus d'equations que d'inconnues, alors le systeme n'admet pas de solution pour certains choix de b.
  En effet T(x)=b avec dim U < dim W $\Rightarrow$ T non surjective.
- Si il y a autant d'inconnues que d'equations, $U = W = R^n$, et si le systeme homogene $T(x) = 0$ n'admet que la solution nulle, alors $T(x) = y$ a une solution unique pour tout $y \in R^n$.
  En effet, T injective et dim U = dim W $\Rightarrow$ T bijective. Donc chaque b a un antecedant et cet antecedant est unique.

Nous verrons avec la representation matricielle qu'il est tres simple de determiner si une application lineaire $T : R^n \to R^n$ est bijective. Il suffit de montrer que son determinant est non nul. C'est une propriete importante car cela veut dire que la matrice est inversible.

Exemple: Les systemes suivants ont ils une unique solution pour tout (a,b) ?

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= a \\ 3x + 4y &= b \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -x - y &= a \\ x + y &= b \end{aligned}$$

II Representation matricielle d'une application lineaire

II.1 Matrices

II.1.a representation matricielle dans une base *[Axler 3C]*

Definition:

Une matrice mxn est un tableau de chiffres avec m lignes et n colonnes: $\begin{pmatrix} A_{1,1} & ... & A_{1,n} \\ A_{m,1} & ... & A_{m,n} \end{pmatrix}$ La notation $A_{i,j}$ denote le coefficient ligne i et colonne j.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1+i \\ -i & 9 & -7 \end{pmatrix}$ 2x3 matrice, alors $A_{2,3} = -7$.

Definition:
Nous avons vu plus haut que toute application lineaire de R^n dans R^m s'ecrit $T(x) = u$ avec $u_i = \sum_{j=1}^n A_{i,j} x_j$, $1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n$. La matrice d'une telle application lineaire T dans la base canonique $\{e_i\}$ est la matrice mxn A= $\begin{pmatrix} T(e_1) ... T(e_n) \end{pmatrix}$
La jieme colonne de la matrice est l'image de e_j par l'application T : $Col_j = T(e_j)$.

Exemples :
(1) Soit $T : R^2 \to R^3$ definie par: $T(x,y) = (x+3y, 2x+5y, 7x+9y)$. Trouver la matrice de T dans les bases canoniques de R^2 et R^3.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$.
(2) Soit $D : P_3 \to P_2$ ensembles des polynomes a coefficients constants de degres 3 et 2 respectivement, l'application de differentiation: $Dp = p'$. Trouver la matrice de D dans la base standard de l'ensemble de polynomes $(1, x, x^2 ...)$.
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Remarque L'image de T en langage matriciel est l'ensemble des combinaisons lineaires des colonnes de sa matrice. En effet, $T(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(e_j) = \sum x_j Col_j \Rightarrow R_T = Vect(T(e_j)) = Vect(Col_j)$.
(remarque: c'est vrai quelles que soient les bases par rapport auxquelles on ecrit la matrice de T).
Le rang de la matrice est la dimension de cet espace $Vect(Col_1...Col_n)$. Il correspond donc au rang de l'application lineaire $dimR_T$.

II.1.b operations sur les matrices, changement de base *[Axler 3C.]*

Les operations sur les applications lineaires se traduisent en des operations analogues sur les matrices:

Addition Soient T et S, deux applications lineaires de R^n dans R^m, avec matrices A et B mxn. Alors l'application (T+S)(x)=T(x) + S(x) a pour matrice $A + B = \begin{pmatrix} A_{1,1} + B_{1,1} & ... & A_{1,n} + B_{1,n} \\ A_{m,1} + B_{m,1} & ... & A_{m,n} + B_{m,n} \end{pmatrix}$.

Multiplication par un scalaire Soit T une application lineaire de R^n dans R^m, avec matrice A mxn, et λ un scalaire. Alors l'application (λ T)(x)=λ T(x) a pour matrice $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} & ... & \lambda A_{1,n} \\ \lambda A_{m,1} & ... & \lambda A_{m,n} \end{pmatrix}$.

Definition On definit la multiplication matricielle AB, de A mxn et B nxl, comme: $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj}$.
Noter que necessairement pour pouvoir prendre le produit, il faut que le nombre de colonnes de A = nb lignes B.

Exemple On voit que le coeff ij est la somme des produits des elements sur la ligne i de A et la colonne j de B:
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ...$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ...$

Composition d'applications
Soient T: R^n(base e_j) $\rightarrow$ R^m(base e_k) et S: R^m(base e_k) $\rightarrow$ R^l(base e_i), de matrices A=Mat(T) et B=Mat(S).
Rappel: $A_{kj} = T(e_j)_k$ et $B_{ik} = S(e_k)_i$.
On cherche la representation matricielle de $S \circ T: \quad x \in R^n \quad \rightarrow^T \quad T(x) \in R^m \quad \rightarrow^S \quad S(T(x)) \in R^l$.
On va montrer que $(S \circ T)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} B_{ik}A_{kj}$ i.e. $Mat(S \circ T) = Mat(S)Mat(T)$.

En effet: $(S \circ T)_{ij} = (S \circ T)(e_j)_i = S(T(e_j))_i = S(\sum_{k=1}^{m} A_{kj}e_k)_i = \sum_{k=1}^{m} A_{kj}S(e_k)_i = \sum_{k=1}^{m} A_{kj}B_{ik}$
$= BA_{ij} = Mat(S)Mat(T)$

Corollaire La multiplication matricielle n'est pas commutative.
$\rightarrow$ Evident si l'on raisonne sur les applications lineaires, vient du fait que la composition n'est pas commutative.
Exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Definition La matrice de l'application identite est $I_n = (10...0; 010...0; ....; 00...1)$. En effet, $T(e_1) = Col_1 = e_1... \Rightarrow I_n = Mat(Id)$.

Definition Une matrice carree A est inversible si il existe une matrice de meme dimension A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Prop La matrice inverse est la matrice de l'application inverse
$\rightarrow$ Evident si l'on raisonne sur les applications lineaires, traduction matricielle de $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = Id$.

Prop Une matrice carree A nxn est inversible si et seulement si son rang est n.
→ Evident si l'on raisonne sur l'application lineaire. En effet, $dim R_T = rg(T) = n$, et pour une matrice carree injective ⇒ surjective.

Changement de base

Si T: U → W est une application lineaire de representation matricielle A, quelle est sa matrice dans d'autres bases de U et W?

Supposons par exemple dim(U)=n, de base $u_1 ... u_n$, et dim(W)=m, de base $w_1 ... w_m$.

On utilise les matrices de changement de base

$$\begin{array}{ll} P : U \to R^n & Q : W \to R^m \\ u_i \to e_i & w_i \to e_i \end{array}$$

Alors B: $R^n \quad \to (P^{-1}) \quad U \quad \to (A) \quad W \quad \to (Q) \quad R^m$
⇒ En termes d'appli lineaire $B = Q \circ A \circ P^{-1}$ ⇒ matriciellement $B = QAP^{-1}$

Remarque
On note au passage qu'une matrice de changement de base est inversible: rang(P)=rang($Vect(e_1 ... e_n)$) = n

Definition Deux matrices sont equivalentes si il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $A = QBP^{-1}$.
Deux matrices equivalentes on meme rang puisqu'elles representent la meme application lineaire.
En fait la reciproque est aussi vraie (admis), A et B sont equivalentes si et seulement si elles ont meme rang.

Definition Cas particulier ou W=U, T:U → U est appellee endomorphisme.
Dans ce cas on utilise la meme matrice de changement de base au depart et a l'arrivee $B = PAP^{-1}$. Les matrices A et B sont dites semblables.
Deux matrices semblables representent donc le meme endomorphisme dans des bases differentes. Elles ont en consequence les memes proprietes intrinseques (donc meme rang).

Retour a la resolution d'equations On se restreint aux systemes carres et en version matricielle on cherche a resoudre: Ax=b ⇒ $\sum_{i=1}^{n} A_{ij} x_j = b_i$, $1 \leq i \leq n$.
L'existence de solution devient claire si l'on raisonne sur l'application lineaire T representee par la matrice A:
- Si A est inversible, $i.e. N_T = \{0\}$, Ax=b a une unique solution x pour chaque b de R^n.
- Si A n'est pas inversible, i.e. dim $N_T \geq 1$, et T n'est pas surjective
- Si $b \in R_T$ alors il existe une solution x_b telle que $Ax_b = b$. Cette solution n'est pas unique puisque pour tout $x_n \in N_T, x_b + x_n$ est egalement solution.
- Si $b \notin R_T$ alors il n'existe pas de solution.
En resume, pour un systeme de n equations a n inconnues, on peut avoir 0, 1 ou une infinite de solution selon le noyau de l'application lineaire T. Sur les matrices, on verra que la condition $N_T = \{0\}$ se traduit sur la matrice par $det A \neq 0$.

II.2 Determinant, valeurs propres, vecteurs propres

II.2.a determinant *[Lax 5]*

Introduction interpretation geometrique
Le determinant est lie au volume du solide genere par les vecteurs colonne de la matrice.

Par exemple si n=2, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a_1, a_2)$ vecteurs colonne, alors $det(A) = 2! O(a_1, a_2) Vol(a_1, a_2)$, ou O est l'orientation des vecteurs a_1 et a_2 (positive dans le sens trigonometrique), et le volume en dimension 2 est l'aire du triangle $(0, a_1, a_2) = |ad - bc|/2 \Rightarrow det(A) = ad - bc$.

On voit que si les vecteurs sont lineairement dependants, alors det =0.

Definition Le determinant est l'unique fonction sur les matrices $A = (a_1 ... a_n)$ telle que
(i) $D(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ si $a_i = a_j$, $i \neq j$.
(ii) D est une fonction multilineaire, c'est a dire pour a_i fixes $i \neq j$, $D(..., a_j, ...)$ est lineaire en a_j.
(iii) D est normalisee telle que $D(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$.

Notations On ecrit aussi parfois le determinant $D(a_1, a_2, ..., a_n) = det(A)$, ou encore $|A|$.

Theoreme (admis) Les proprietes (i), (ii) et (iii) determinent de facon unique le determinant.

Corollaire 1 D est une fonction antisymetrique, c'est a dire

$$D(..., a_i, ..., a_j, ...) = -D(..., a_j, ..., a_i, ...)$$

Preuve
$D(..., a_i + a_j, ..., a_i + a_j, ...) = 0 = D(..., a_i, ..., a_i, ...) + D(..., a_j, ..., a_i, ...) + D(..., a_i, ..., a_j, ...) + D(..., a_j, ..., a_j, ...) = D(..., a_j, ..., a_i, ...) + D(..., a_i, ..., a_j, ...)$

Corollaire 2 Si $a_1 ... a_n$ sont lineairement dependants, alors $D = 0$.
Preuve
Si $a_1 = \sum_{j \neq 1} \lambda_j a_j$, alors $D(a_1, ..., a_n) = D(\sum_{j \neq 1} \lambda_j a_j, ..., a_n) = \sum_{j \neq 1} \lambda_j D(a_j, ..., a_n) = 0$

Theoreme (admis) $det(AB) = det(A)\, det(B)$.

Theoreme $A \in M_n(R)$ (ensemble des matrices reelles carrees de dimension n) est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$, et $det(A^{-1}) = 1/det(A)$.
Preuve
• A inversible $\Rightarrow$ il existe $A^{-1} \in M_n(R)$ telle que $AA^{-1} = I_n \Rightarrow det(A)det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow det(A) \neq 0$ and $det(A^{-1}) = 1/det(A)$.
• $det(A) \neq 0 \Rightarrow$ les colonnes de A sont lineairement independantes $\Rightarrow R_A$ a dimension n et est donc egal a R^n.

Calcul en pratique
Le calcul se fait par recurrence, en prenant des sous matrices de dimensions de plus en plus petites. Pour detailler ce calcul, il nous faut quelques definitions.

Definition A_{ij} est la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en enlevant la ligne i et la colonne j de A.
Son determinant s'appelle le *mineur* de A.
$(-1)^{i+j} det(A_{ij})$ s'appelle le *cofacteur* de A.

Theoreme (admis; developpement selon la colonne j) $det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$ ou j est n'importe quel entier entre 1 et n.
Preuve Voir par exemple le livre de Lax, il suffit de montrer que cette fonction satisfait les proprietes (i) (ii) et (iii) de la definition du determinant.
Remarque: Cela revient a developper selon la colonne j. De la meme facon, on peut developper selon la ligne i ou i est n'importe quel entier entre 1 et n.

Examples

• Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer son determinant en developpant selon la 3eme ligne, puis refaire le calcul en developpant selon la 2eme colonne.

• Calculer le determinant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Corollaire Le determinant d'une matrice triangulaire est le produit des elements diagonaux.
Preuve Par recurrence, on developpe selon la 1ere colonne pour une matrice triangulaire superieure, et selon la 1ere ligne pour une matrice triangulaire inferieure.

Remarque On retrouve bien $det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

II.2.b valeurs propres, vecteurs propres *[Lax 5]*

Definition Soit $A \in M_n(R)$
- Un scalaire $\lambda \in R$ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur $v \neq 0$ tel que $Av = \lambda v$.
- Le vecteur v est un vecteur propre de A correspondant a la valeur propre λ.

Propriete λ est une valeur propre si et seulement si $det(A - \lambda I_n) = 0$. Le polynome $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ est appele polynome caracteristique de A. Il est de degre n, taille de A.
Preuve:
• λ valeur propre $\Rightarrow (A - \lambda I_n)v = 0$ avec $v \neq 0 \Rightarrow N_{A-\lambda I_n} \neq \{0\}$ donc $A - \lambda I_n$ n'est pas injective, donc pas surjective (puisque carree). Son rang est donc $< n$, et ses vecteurs colonnes sont lineairement dependants $\Rightarrow det(A - \lambda I_n) = 0$.
• $det(A - \lambda I_n) = 0 \Rightarrow (A - \lambda I_n)$ n'est pas injective c'est a dire $N_{A-\lambda I_n} \neq \{0\}$. Donc il existe $v \neq 0$ dans son noyau: $(A - \lambda I_n)v = 0 \Rightarrow Av = \lambda v$ pour $v \neq 0$, et λ est bien valeur propre.

Exemple

Determiner les valeurs propres et vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$p_A(\lambda) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 4)$
$\Rightarrow$ les valeurs propres de A sont -1 et 4.
Le vecteur propre associe a -1 satisfait: $Av = -v \Rightarrow$ (...) $\Rightarrow$ $v = (-1, 1)$ est vecteur propre.
Le vecteur propre associe a 4 satisfait: $Av = 4v \Rightarrow$ (...)

Exemple
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour polynome caracteristique $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. $\Rightarrow$ sur R, A n'a pas de valeur propre.

Exemple

Determiner les valeurs propres et vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$X_1 = (1, -1)$ and $X_3 = (1, 1)$.

Definition (rappel) Deux matrices A et B de $M_n(R)$ sont dites semblables si il existe une matrice $P \in M_n(R)$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Propriete Deux matrices semblables ont le meme polynome caracteristique, et donc memes valeurs propres.
Preuve: $p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n| = |PBP^{-1} - \lambda I_n| = |PBP^{-1} - \lambda PP^{-1}| = |P(B - \lambda I_n)P^{-1}| = |B - \lambda I_n| = p_B(\lambda)$.

Remarque Attention: La reciproque est fausse !

Par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont le meme polynome caracteristique, mais elles ne sont pas semblables: $PBP^{-1} = 0 \neq A$.

Definition Si les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_j$ sont repetees ($\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_j$), on dit que λ_1 est une valeur propre de multiplicite j.

Exemple
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres $\lambda_1 = 2$ de multiplicite 1 et $\lambda_2 = -1$ de multiplicite 2.

II.2.c diagonalisation *[Lax 5]*

Definition $A \in M_n(R)$ est dite diagonalisable si A est semblable a une matrice diagonale $A = PDP^{-1}$.

Theoreme $A \in M_n(R)$ est diagonalisable si et seulement si A a n vecteurs propres lineairement independants. Les elements diagonaux de D sont les valeurs propres de A.
Preuve
- Si A a n vecteurs propres lineairement independants, ils forment une base de R^n et $Av_1 = \lambda_1 v_1$, ..., $Av_n = \lambda_1 v_n$. On note P la matrice avec comme colonnes les vecteurs propres: $P = (v_1 ... v_n)$, alors
$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ & ... & & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$
- Si A est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1} \Rightarrow AP = PD$ et $v_1 ... v_n$ colonnes de P satisfont $Av_i = \lambda_i v_i$ donc sont vecteurs propres de A. Comme P est inversible, ils sont lineairement independants et donc forment une base.

Prop Des vecteurs propres associes a des valeurs propres distinctes sont lineairement independants.
En particulier, si A possede n valeurs propres distinctes, elle est alors diagonalisable.
Preuve
Par recurrence sur le nombre de vecteurs k.
- Si $k = 1$, le vecteur propre est par definition non nul donc lineairement independant ($\lambda v = 0 \Rightarrow \lambda = 0$).
-Si la propriete est vrai pour $k-1$ vecteurs, prenons k vecteurs propres v_i associes a des valeurs propres distinctes λ_i et supposons $(*) : \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = 0$.
Alors $A(*) = A\alpha_1 v_1 + ... + A\alpha_k v_k = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + ... + \alpha_k \lambda_k v_k = 0$.
D'autre part, $(*) \times \lambda_k$ implique $\alpha_1 \lambda_k v_1 + ... + \alpha_k \lambda_k v_k = 0$.
Si l'on soustrait ces deux dernieres equations,
$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + ... + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = 0$.
On se retrouvre dans le cas avec $k-1$ vecteurs et par hypothese ces vecteurs sont libres donc $\alpha_1 = ... = \alpha_{k-1} = 0$ puisque les λ_i sont distincts. D'apres $(*)$, $\alpha_k v_k = 0$ donc $\alpha_k = 0$, et les vecteurs propres sont donc bien lineairement independants.

Theoreme (admis) Toute matrice reelle symmetrique est diagonalisable.

III Application: equation de dispersion des ondes

L'algebre lineaire a de nombreuses applications en geosciences. Pour illustrer cela, nous verrons deux applications importantes de ce champs theorique : Le calcul d'equations de dispersion d'ondes, et l'etude de stabilite de systemes dynamiques. Vous verrez egalement dans d'autres cours d'autres utilisations de l'algebre lineaire, notamment pour la resolution numerique d'equations differentielles avec transport, telles que les equations qui regissent le mouvement d'un fluide.

Notamment, le determinant peut etre utile lorsque l'on cherche une solution ondulatoire a un systeme d'equations lineaires a coefficients constants. Nous allons illustrer cela au travers d'exemples.

III.1 "Shallow water" ou equations de Barré de Saint Venant

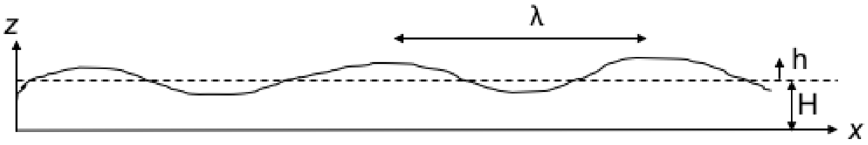

Figure 1: Schema des ondes en eau peu profonde. La hauteur de l'eau H est supposee beaucoup plus petite que la longueur d'onde λ: $H \ll \lambda$.

Nous allons chercher les solutions d'ondes du systeme d'equations qui regit la dynamique d'une fluide peu profond (figure 1). On note H la hauteur d'eau moyenne et on etudie donc l'evolution d'une anomalie de hauteur h ($h \ll H$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial h}{\partial x} &= 0 && \text{(III.1)} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + g\frac{\partial h}{\partial z} &= 0 && \text{(III.2)} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) &= 0, && \text{(III.3)} \end{aligned}$$

ou t denote le temps, et (u, w) sont les vitesses selon (x, z) (Comme cela sera vu dans d'autres cours, ce systeme "Shallow Water" s'obtient en integrant verticalement les equations de Navier Stokes avec $\lambda >> H$, et en supposant (u, w) constants avec z).

On cherche une solution sous forme d'onde $\begin{pmatrix} u(x,z,t) \\ w(x,z,t) \\ h(x,z,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \\ \hat{h} \end{pmatrix} \exp(i(kx + mz - \omega t))$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -i\omega & 0 & gik \\ 0 & -i\omega & gim \\ Hik & Him & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \\ \hat{h} \end{pmatrix} = 0. \qquad \text{(III.4)}$$

Ce systeme admet une solution non nulle si et seulement si le determinant de la matrice est nul
$\Rightarrow \omega = 0$ ou $\omega^2 = gH\kappa^2$, ou $\kappa^2 = k^2 + m^2$. On voit qu'une solution d'onde existe et satisfait la relation entre la frequence ω et le nombre d'onde κ, appelee <u>*equation de dispersion*</u>:

$$\omega = \pm c\kappa, \text{ avec } c = \sqrt{gH} \text{ amplitude de la vitesse de phase de l'onde.}$$

Le modele "Shallow water" est un modele pertinent pour les tsunamis (typiquement $\lambda \sim 100$ km, $H \sim 4$ km).

III.2 Ondes acoustiques

On se propose ici d'etudier l'equation de dispersion des ondes sonores. Avec des notations standards (notamment $\mathbf{u}$ est le vecteur vitesse que l'on suppose ici a deux dimensions (u, w) selon (x, y), ρ denote la masse volumique, ρ_0 une masse volumique de reference et p la pression), les equations s'ecrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p && \text{(III.5)} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\rho + \rho\nabla.\mathbf{u} &= 0 && \text{(III.6)} \end{aligned}$$

$$\text{et on suppose } p = p(\rho) \qquad \text{avec } \frac{dp}{d\rho}(\rho_0) = c^2 \text{ constante.} \qquad \text{(III.7)}$$

Le systeme est non lineaire. Pour chercher une solution sous forme d'ondes, on linearise le systeme autour d'un etat d'equilibre que l'on suppose ici au repos $u = w = 0, \rho = \rho_0, p = p(\rho_0)$. On cherche a resoudre la dynamique de perturbations ondulatoires (u', w', p', ρ') autour de cet etat d'equilibre:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} && \text{(III.8)}\\
\frac{\partial w'}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} && \text{(III.9)}\\
\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z}) &= 0 && \text{(III.10)}\\
\frac{\partial p'}{\partial t} &= c^2\frac{\partial \rho'}{\partial t}. && \text{(III.11)}
\end{aligned}
$$

On obtient un systeme d'equations lineaires a coefficients constants. On peut donc chercher une solution sous forme d'onde: $(...)' = \widehat{(...)}\exp(i(kx + mz - \omega t))$:

$$
\begin{aligned}
-i\omega\hat{u} + \frac{1}{\rho_0}ik\hat{p} &= 0 && \text{(III.12)}\\
-i\omega\hat{w} + \frac{1}{\rho_0}im\hat{p} &= 0 && \text{(III.13)}\\
-i\omega\hat{\rho} + \rho_0 ik\hat{u} + \rho_0 im\hat{w} &= 0 && \text{(III.14)}\\
-i\omega\hat{p} + c^2 i\omega\hat{\rho} &= 0. && \text{(III.15)}
\end{aligned}
$$

On peut resoudre ce systeme en le reduisant a une equation a une inconnue, ou on peut simplement deduire l'equation de dispersion en ecrivant le systeme sous forme matricielle :

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix} -i\omega & 0 & ik/\rho_0 & 0 \\ 0 & -i\omega & im/\rho_0 & 0 \\ \rho_0 ik & \rho_0 im & 0 & -i\omega \\ 0 & 0 & -i\omega & c^2 i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \\ \hat{p} \\ \hat{\rho} \end{pmatrix} = 0.
$$

L'equation de dispersion est donnee par la condition du determinant nul, ce qui garantit une solution ondulatoire non nulle au systeme :

$$
\begin{aligned}
& det \begin{pmatrix} -i\omega & 0 & ik/\rho_0 & 0 \\ 0 & -i\omega & im/\rho_0 & 0 \\ \rho_0 ik & \rho_0 im & 0 & -i\omega \\ 0 & 0 & -i\omega & c^2 i\omega \end{pmatrix} = 0 \\
\Rightarrow \quad & -i\omega \; det \begin{pmatrix} -i\omega & im/\rho_0 & 0 \\ \rho_0 im & 0 & -i\omega \\ 0 & -i\omega & c^2 i\omega \end{pmatrix} + ik/\rho_0 \; det \begin{pmatrix} 0 & -i\omega & 0 \\ \rho_0 ik & \rho_0 im & -i\omega \\ 0 & 0 & c^2 i\omega \end{pmatrix} = 0 \\
\Rightarrow \quad & (...) - \omega^2(\omega^2 - c^2(m^2 + k^2)) = 0
\end{aligned}
$$

Donc a part la solution stationnaire $\omega = 0$, on trouve l'equation de dispersion des ondes acoustiques

$$\omega = \pm c\kappa,$$

ou $\kappa = \sqrt{k^2 + m^2}$ est le nombre d'onde.
On voit notamment que la vitesse des ondes est liee a $c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}(\rho_0)}$. Cette vitesse theorique etait connue des Newton, mais ne correspondait pas aux resultats experimentaux de Boyle. En effet, avec des valeurs standard, $\sqrt{\frac{dp}{d\rho}(\rho_0)} = c_{theorique} \approx 290$ m s^{-1} a 20° Celsius, mais la valeur experimentale etait de l'ordre de $c_{expe} \approx 340$ m s^{-1}.

Il a fallu attendre plus d'une siecle pour que Laplace leve ce paradoxe. Il est du a la variation de temperature avec le travail des forces de pression: $p = \rho RT$, quand p augmente ou diminue, la T augmente ou diminue, de sorte que la vitesse n'est pas donnee par $c^2 \neq \frac{dp}{d\rho}|_{T=constante}$, mais par $c^2 = \frac{dp}{d\rho}|_{adiabatique}$ (i.e. le long d'une adiabatique, ou les changements de T sont dus aux changements de p).
Comme $p = \rho RT$ et $c_v dT + pd(\frac{1}{\rho}) = 0$, on en deduit (exercice)

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{R + c_v}{c_v}\frac{p}{\rho} = \gamma\frac{p}{\rho} \approx 340 \text{ m s}^{-1}.$$

IV Application : Etude de systemes dynamiques

IV.1 Systeme lineaire

IV.1.a Motivation et exemples

Une des applications de l'algebre lineaire est l'etude de la stabilite d'equilibres de systemes dynamiques, dont l'evolution est regie par une equation

$$\dot{X}(t) = AX, \tag{IV.1}$$

ou A est une matrice nxn et X un vecteur a n coefficients.

Exemple: Si l'on considere la masse ponctuelle soumise a un ressort et frottement (figure 2), son mouvement est soumis a l'equation:

$$m\ddot{x} = -kx - f\dot{x}. \tag{IV.2}$$

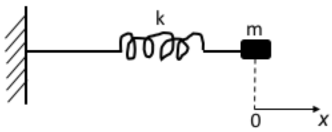

Figure 2: Schema d'une masse ponctuelle de masse m, attachee a un ressort (resistance k) dont le mouvement autour de son point d'equilibre $x = 0$ est soumis a un frottement de coefficient f.

On voit que si l'on prend comme vecteur d'etat

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

alors le systeme s'ecrit sous forme matricielle:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -kx_1/m - fx_2/m \end{pmatrix} = AX, \text{ ou } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -f/m \end{pmatrix}.$$

Exemple: Plus generalement, dans le cas non-lineaire,

$$\dot{X} = F(X) \tag{IV.3}$$

Les points d'equilibre sont les zeros de F: $F(X_{eq}) = 0$. La question a laquelle on s'interesse est la suivante: Ces points d'equilibre sont ils stables, ou instables ?
Pour repondre a cette question, on linearise autour de l'etat d'equilibre X_{eq}:

$$\dot{X} \approx F(X_{eq}) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial X}(X_{eq})}_{A} \times (X - X_{eq}), \tag{IV.4}$$

ce qui donne, avec $Y = X - X_{eq}$ anomalie par rapport a l'equilibre,

$$\dot{Y} = AY. \tag{IV.5}$$

Le comportement autour du point d'equilibre peut donc generalement etre compris a partir du systeme linearise $\dot{X} = AX$.
Nous verrons que la stabilite d'un point d'equilibre depend uniquement des valeurs propres de la matrice A. Le comportement autour du point d'equilibre est entierement determine par les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A.

IV.1.b Systemes a coefficients constants homogenes: champ de vecteurs, point d'equilibre

On se propose d'etudier les solutions de $\dot{X} = AX$.
On suppose $det(A) \neq 0$, donc $X_{eq} = 0$ est le seul point d'equilibre ($N_A = \{0\}$).

VOIR TP EN LIGNE sur diagrammes de phase, trajectoires et equilibre

Instructions et Code sur :
`http://www.lmd.ens.fr/muller/TEACHING_ALGEBRE/algebre.html`

Exemple - cas diagonal

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = -3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} \\ y(t) = c_2 e^{-3t} \end{cases}$$

ou c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires. La solution generale du systeme est donc :

$$\Rightarrow X(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \xi_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \xi_2,$$

ou λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A, et ξ_1 et ξ_2 les vecteurs propres associes.

Cas general En s'inspirant de l'exemple precedant, cherchons une solution a $\dot{X} = AX$ de la forme $X(t) = \xi e^{rt}$. Alors $\dot{X} = r\xi e^{rt} = A\xi e^{rt} \Rightarrow A\xi = r\xi$. En d'autres termes, r est valeur propre et ξ est vecteur propre. Ce resultat se generalise (prochaine section).

IV.2 Stabilite

Comme dans la section precedante, on se propose d'etudier les solutions de $\dot{X} = AX$. On suppose $det(A) \neq 0$, donc $X_{eq} = 0$ est le seul point d'equilibre ($N_A = \{0\}$), et on se restreint aux matrices reelles 2x2.

IV.2.a cas des valeurs propres reelles distinctes *[Boyce 7.5]*

Theoreme
* Si A a deux valeurs propres r_1 et r_2 reelles distinctes, avec vecteurs propres ξ_1 et ξ_2, alors la solution generale de $\dot{X} = AX$ est

$$X(t) = c_1 \xi_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \xi_2, \tag{IV.6}$$

ou c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires.
* En particulier, l'origine est stable si et seulement si $r_1 < 0$ et $r_2 < 0$. En effet dans ce cas, $X(t) \rightarrow_{t\rightarrow\infty} 0$.

Remarque 1 Ce resultat se generalise au dela de la dimension 2: Si $A \in M_n(R)$ a n valeurs propres distinctes $r_1, ..., r_n$ avec vecteurs propres $\xi_1, ...\xi_n$, alors la solution generale de $\dot{X} = AX$ est $X(t) = c_1 \xi_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \xi_2 + ... + c_n \xi_n e^{r_n t}$.

Remarque 2 (principe de superposition) Si X_1 et X_2 sont solutions, alors toute combinaison lineaire $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ est egalement solution (car le systeme $\dot{X} = AX$ est lineaire).

En effet $\dot{X} = \lambda_1 \dot{X}_1 + \lambda_2 \dot{X}_2 = \lambda_1 A X_1 + \lambda_2 A X_2 = A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = AX$.

Exemple 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Ses valeurs propres et vecteurs propres sont (...) $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, r_1 = 3$ et $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, r_2 = -1$.

La solution generale de $\dot{X} = AX$ est donc $X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$.

Rappel (TP ci dessus) On trace le diagramme de phase dans le plan $X = (x_1, x_2)$. Les tangentes aux trajectoires en chaque point sont donnees par AX.

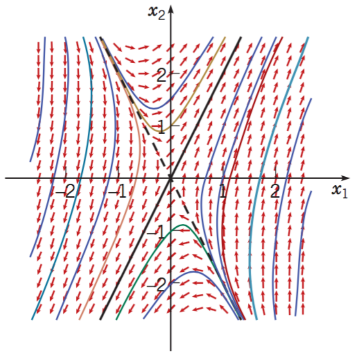

Figure 3: Champs de vecteurs de l'exemple 1. Les directions des vecteurs propres ξ_1 et ξ_2 sont indiquees par des droites noires (solide et tiret respectivement). Quelques trajectoires sont indiquees egalement. La solution generale est $X(t) = c_1 e^{3t} \xi_1 + c_2 e^{-t} \xi_2 \sim_{t \to \infty} c_1 e^{3t} \xi_1$ si $c_1 \neq 0$. Les trajectoires non paralleles a ξ_2, asymptotent donc la direction ξ_1 aux longs temps.

Exemple 2 $\dot{X} = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$.

Ses valeurs propres et vecteurs propres (...) sont $\xi_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, r_1 = -4$ et $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, r_2 = -1$.

La solution generale de $\dot{X} = AX$ est donc $X(t) = c_1 \, e^{-4t} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

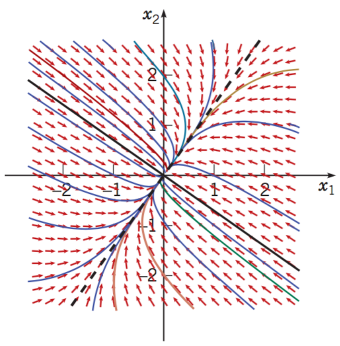

Figure 4: Champs de vecteurs de l'exemple 2. Les directions des vecteurs propres ξ_1 et ξ_2 sont indiquees par des droites noires (solide et tiret respectivement). Quelques trajectoires sont indiquees egalement. La solution generale est $X(t) = c_1 e^{-4t} \xi_1 + c_2 e^{-t} \xi_2 \sim_{t \to \infty} c_2 e^{-t} \xi_2$ si $c_2 \neq 0$. Les trajectoires non paralleles a ξ_1, asymptotent donc la direction ξ_2 aux longs temps.

IV.2.b cas des valeurs propres complexes *[Boyce 7.6]*

La matrice A etant reelle, si $\lambda = \alpha + i\beta$ est valeur propre de A avec vecteur propre $\xi = u + iv$, alors $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ est valeur propre avec vecteur propre $\overline{\xi} = u - iv$. En effet,

$$A\xi = \lambda\xi \Rightarrow \overline{A\xi} = \overline{\lambda\xi} \Rightarrow A\overline{\xi} = \overline{\lambda}\,\overline{\xi}.$$

Donc d'apres la section precedente, $\xi e^{\lambda t}$ et $\overline{\xi} e^{\overline{\lambda} t}$ sont solutions, mais complexes. On construit des solutions reelles en prenant la partie reelle et la partie imaginaire (egalement solutions d'apres le principe de superposition):

$$Re\left(\xi e^{\lambda t}\right) = \frac{\xi e^{\lambda t} + \overline{\xi} e^{\overline{\lambda} t}}{2} = u e^{\alpha t}\cos(\beta t) - v e^{\alpha t}\sin(\beta t) \tag{IV.7}$$

$$Im\left(\xi e^{\lambda t}\right) = \frac{\xi e^{\lambda t} - \overline{\xi} e^{\overline{\lambda} t}}{2i} = u e^{\alpha t}\sin(\beta t) + v e^{\alpha t}\cos(\beta t). \tag{IV.8}$$

On voit que les trajectoires sont des spirales convergeant vers l'origine si $Re(\lambda) < 0$, des spirales divergeant de 0 si $Re(\lambda) > 0$, et des cercles si $Re(\lambda) = 0$.

Exemple 1: $\dot{X} = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Ses valeurs propres et vecteurs propres (...) sont $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \lambda_1 = -\frac{1}{2} + i$ et $\xi_2 = \overline{\xi_1}, \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$.

$Re(\lambda) = -\frac{1}{2} < 0$ donc les trajectoires sont des spirales convergeant vers l'origine.

On trace le champs de vecteurs en quelques points (on rappelle que le vecteur tangent en chaque point X, est donne par AX), et quelques trajectoires sur la figure 5.

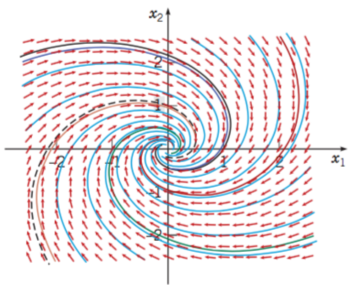

Figure 5: Champs de vecteurs de l'exemple 3. Les trajectoires sont des spirales convergeant vers l'origine.

Exemple 2: $\dot{X} = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Rappel (TP plus haut): les valeurs propres sont $\lambda = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 16}}{2}$.
On se restreint au cas complexe $-4 < \alpha < 4$:

- Si $-4 < \alpha < 0$, $Re(\lambda) < 0$ et les trajectoires sont des spirales convergeant vers l'origine, qui est donc un equilibre stable.
- Si $\alpha = 0$, $Re(\lambda) = 0$ et les trajectoires sont des cercles autour de l'origine, qui est donc un equilibre instable (on rappelle qu'un equilibre X_{eq} est stable si les trajectoires convergent vers cet equilibre $X(t) \to_{t\to\infty} X_{eq}$).
- Si $0 < \alpha < 4$, $Re(\lambda) > 0$ et les trajectoires sont des spirales divergeant de l'origine, qui est donc un equilibre instable.

Les valeurs de α auxquelles le systeme change qualitativement de comportement s'appellent des *bifurcations*. Nous avons identifie trois bifurcations: $\alpha = -4, 0, 4$.

IV.2.c cas des valeurs propres reelles multiples (au dela du cours, ne sera pas a l'examen final) *[Boyce 7.8]*

On se place maintenant dans le cas ou la matrice A a une valeur propre r de multiplicite 2.

- Si la valeur propre r a deux vecteurs propres associes lineairement independants ξ_1 et ξ_2, alors tout se passe comme dans le cas des valeurs propres distinctes. Notamment, la solution generale est $X(t) = c_1 e^{rt}\xi_1 + c_2 e^{rt}\xi_2$.
- Si la valeur propre r n'a qu'un vecteur propre associe ξ, on peut montrer que la solution generale est $X(t) = c_1 e^{rt}\xi + c_2 X_2(t)$, ou la deuxieme solution X_2 est une combinaison lineaire de e^{rt} et te^{rt}.