TP Algèbre linéaire *mercredi 9 décembre 2020*

Récuperer les 2 codes matlab sur :
`http://www.lmd.ens.fr/muller/TEACHING_ALGEBRE/RJ.m` et
`http://www.lmd.ens.fr/muller/TEACHING_ALGEBRE/lorenz_map.m`

Nous allons illustrer une des applications importantes de l'algèbre linéaire, à savoir l'étude de stabilité d'un système linéaire. Pour cela, nous allons étudier un modèle mathématique des relations amoureuses. Prenons l'exemple du modèle dit de Roméo et Juliette. Le but est d'étudier l'évolution long terme du couple en fonction de leurs comportements et dynamiques amoureuses.

Introduction

Un système dynamique très intéressant mais très compliqué est le systèmes des relations humaines comme, par exemple, le systèmes des relations dans un couple. Il suffit de penser à l'évolution temporelle des sentiments entre deux individus. On retrouve facilement des comportements stables, des changements imprévus et brusques, des collapsus. Comment modéliser la relation amoureuse entre deux individus? Strogatz dans son article Love affairs and differential equations (1988) a proposé un modèle pour modéliser la relation amoureuse entre Roméo et Juliette. S Rinaldi dans son article Laura and Petrarch: an intriguing case of cyclical love dynamics (1998) a étudié la relation entre le poète et sa muse.

Soit R(t) la variable d'état positive (négative) qui représente l'amour (haine) de Roméo pour Juliette et J(t) la variable d'état positive (négative) qui représente l'amour (haine) de Juliette pour Roméo.

- Supposons que dans notre modèle Roméo est un amoureux qui a le goût de la conquête mais qui déteste les liens trop étouffants. En d'autres termes, Roméo est d'autant plus froid que l'amour de Juliette augmente mais que il retrouve soudainement l'intérêt pour elle alors qu'elle tend à s'éloigner.
- Juliette, de son coté, est plus rationnelle et tend à reproduire le comportement de Roméo.
- Comment va évoluer leur relation? Afin d'étudier plus formellement leur relation et prédire leur avenir, nous pouvons faire appel à un système d'équations différentielles

$$\frac{dR}{dt} = -J(t) \text{ et } \frac{dJ}{dt} = R(t) \tag{1}$$

- Est-ce il y a des états d'équilibre? Comment leur histoire va évoluer?

Modèle

Plus généralement, on peut supposer que le modèle amoureux des relations entre Roméo et Juliette peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{dR}{dt} = aR + bJ \tag{2}$$

$$\frac{dJ}{dt} = cR + dJ \tag{3}$$

où R est l'amour de Roméo pour Juliette, J l'amour de Juliette pour Roméo (ou la haine si ils sont négatifs). Les constantes a, b, c, d déterminent les "styles romantiques".

Prenons la première équation $\frac{dR}{dt} = aR + bJ$ pour discuter de quelques styles romantiques :
$a = 0$: insensible à ses propres émotions ;
$b = 0$: insensible aux emotions de l'autre ;

$a > 0, b > 0$: enthousiaste et impatient ;
$a > 0, b < 0$: narcissique et vaniteux ;
$a < 0, b > 0$: amoureux prudent ;
$a < 0, b < 0$: ermite.

Questions

On peut réécrire l'évolution de R(t) et J(t) sous forme matricielle, en introduisant le vecteur

$$X(t) = \begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix}$$

dont l'évolution s'écrit donc

$$\dot{X}(t) = AX(t), \text{ avec } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On voit que le seul point d'équilibre si A est inversible est l'origine $X_{eq} = 0$, que l'on peut interpréter comme la stabilisation amoureuse du couple (mariage). Le question que l'on se pose est, selon les styles romantiques de Roméo et Juliette discutés plus haut (voir Modèle), vont ils atteindre cet équilibre ? Dans ce cas on dira que le couple est stable. Si au contraire leur relation se dégrade ou s'amplifie, on dira que le couple est instable. Le but de ce TP est d'explorer différents styles romantiques, et donc différentes matrices A, et d'essayer de dégager une condition garantissant la stabilité du couple.

1 Cas diagonal

On suppose ici Roméo et Juliette insensibles aux émotions de l'autre ($b = c = 0$). La matrice A est donc diagonale.

1.1 Cas 1

On suppose d'abord Roméo et Juliette enthousiastes par rapport à leurs propres émotions $a > 0$ et $d > 0$. On considère par exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A.
- En chaque point du diagramme de phase (R, J), les trajectoires amoureuses du couple sont tangentes au vecteur $\dot{X}(t) = AX$. Faire tourner le code RJ.m pour tracer ces tangentes. Comment les trajectoires ont-elles l'air de se comporter ?
- On dit que l'origine est un équilibre *stable* si toutes les trajectoires convergent vers ce point d'équilibre. Utiliser RJ.m pour tracer les trajectoires avec différentes conditions initiales, par exemple $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ldots$. Essayer aussi comme condition initiale les vecteurs propres de A. L'origine est-elle un équilibre stable ?

1.2 Cas 2

On suppose maintenant Roméo et Juliette prudents par rapport à leurs propres émotions $a < 0$ et $d < 0$. On considère par exemple $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A.

- Faire tourner le code RJ.m pour tracer les tangentes aux trajectoires amoureuses dans le diagramme de phase (R, J). Comment les trajectoires ont-elles l'air de se comporter ?
- Utiliser RJ.m pour tracer les trajectoires avec différentes conditions initiales, par exemple $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, ...$ Essayer aussi comme condition initiale les vecteurs propres de A. L'origine est-elle un équilibre stable ?

1.3 Cas 3

On se place maintenant dans le cas où Roméo est prudent et Juliette enthousiaste par rapport à ses propres émotions $a < 0$ et $d > 0$. On considère par exemple $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A.
- Faire tourner le code RJ.m pour tracer les tangentes aux trajectoires amoureuses dans le diagramme de phase (R, J). Comment les trajectoires ont-elles l'air de se comporter ?
- Utiliser RJ.m pour tracer les trajectoires avec différentes conditions initiales, par exemple $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, ...$ Essayer aussi comme condition initiale les vecteurs propres de A. L'origine est-elle un équilibre stable ?

2 Cas général

2.1 Cas 4

On se place maintenant dans le cas général et l'on considère Roméo et Juliette tous deux enthousiastes et impatients : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

- Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A.
- Faire tourner le code RJ.m pour tracer les tangentes aux trajectoires amoureuses dans le diagramme de phase (R, J). Comment les trajectoires ont-elles l'air de se comporter ?
- Utiliser RJ.m pour tracer les trajectoires avec différentes conditions initiales, par exemple $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, ...$ Essayer aussi comme condition initiale les vecteurs propres de A. L'origine est-elle un équilibre stable ?

2.2 Cas 5

- Mêmes questions que ci-dessus (cas 4) pour $A = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$.

2.3 Conclusion

- Des différents exemples que nous venons de voir, voyez vous une condition se dégager pour garantir la stabilité du couple ?

3 Cas général avec valeurs propres complexes

3.1 Cas 6

Soit $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}$.

- Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A.
- Faire tourner le code RJ.m pour tracer les tangentes aux trajectoires amoureuses dans le diagramme de phase (R, J). Comment les trajectoires ont-elles l'air de se comporter ?
- Utiliser RJ.m pour tracer les trajectoires avec différentes conditions initiales, par exemple $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ldots$. L'origine est-elle un équilibre stable ?

3.2 Cas 7

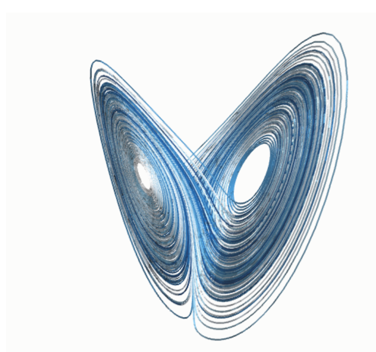
On se propose d'étudier $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ pour différentes valeurs de α avec $-4 < \alpha < 4$.

- Trouver les valeurs propres de la matrice A en fonction de α.
- Utiliser RJ.m pour étudier le comportement des trajectoires selon α (diagramme de phase, trajectoires, stabilité).
- Voyez vous une condition se dégager dans le cas d'une matrice à valeurs propres complexes qui garantisse la stabilité du couple ?

4 Chaos on a strange attractor

Our aim is to introduce the notions of sensitivity to initial conditions, also known as chaos, and predictability. We will examine how this notion leads to different expectations from numerical weather (short-term predictions) models and from climate (long-term predictions) models.

4.1 The Lorenz Equations: Introduction



We all know the famous Lorenz butterfly, but where does it come from? Originally, Edward Lorenz wanted to study a simplified model of tropical atmospheric convection introduced by Barry Saltzman. It represents the response of the atmosphere to a temperature difference between the bottom (hot surface) and the top of the domain (cold). This two-dimensional model uses the Boussinesq approximation, which assumes small density perturbations ρ around a reference value ρ_0, yielding:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u && (4)\\
\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho_0}g + \nu\Delta w && (5)\\
\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= \kappa\Delta\theta && (6)\\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 && (7)
\end{aligned}$$

where $\mathrm{d}/\mathrm{d}t = \partial/\partial t + u\partial/\partial x + w\partial/\partial z$, ν denotes the kinematic viscosity and κ thermal diffusivity. These equations can also be written in non-dimensional form for the streamfunction ψ (i.e. $u = -\partial\psi/\partial z$ and $w = \partial\psi/\partial x$), and for θ the departure of temperature from that occuring in the state of no convection (without convection the temperature profile would be linear in z):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= R\frac{\partial\psi}{\partial x} + \Delta\theta && (8)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta\psi &= \sigma\frac{\partial\theta}{\partial x} + \sigma\Delta^2\psi && (9)
\end{aligned}$$

where $\sigma = \nu/\kappa$ is the Prandtl number and R the Rayleigh number (proportional to the temperature difference between the hot surface and the cold top of the domain).

Lorenz further assumed a certain shape for the solution, basically a truncated Fourier series in x and z:

$$\begin{aligned}
\psi &= c_1 X(t)\sin(\pi x)\sin(\pi z), && (10)\\
\theta &= c_2 Y(t)\cos(\pi x)\sin(\pi z) - c_3 Z(t)\sin(2\pi z), && (11)
\end{aligned}$$

where c_1, c_2 and c_3 are constants. The temporal functions $X(t)$, $Y(t)$ and $Z(t)$ are governed by the following nonlinear system of equations:

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y && (12)\\
\dot{Y} &= -XZ + rX - Y && (13)\\
\dot{Z} &= XY - bZ && (14)
\end{aligned}$$

where a dot denotes time derivative, as before σ denotes the Prandtl number and R the Rayleigh number, and b is related to the geometry of the domain (horizontal extent versus vertical). This now famous system has a lot of spectacular properties.

4.2 Questions

Lorenz considered the case $\sigma = 10$, $b = 8/3$ and $r = 28$. Some properties of this system include:

- The motion is *aperiodic*;
- In 3D, the trajectory *never* crosses itself;
- The number of circuits made on either side varies *unpredictably* from one cycle to the next;
- The trajectory appears to settle onto a thin set that looks like a pair of butterfly wings. This attractor is an example of a *strange attractor*, that is, an attractor which exhibits sensitive dependence on initial conditions.

- Open lorenz_map.m and set subsection_number=1.10. This will open a figure with an animation of the orbit $(X(t), Y(t), Z(t))$ around the Lorenz chaotic attractor. Do you recover the properties listed above?
- Set subsection_number=1.11 to plot $Y(t)$. How would you describe the time evolution of $Y(t)$?
- Lorenz discovered that a wonderful structure (the famous butterfly wing pattern) emerges if the solution is visualized as trajectory in phase space, for instance $Z(t)$ versus $X(t)$. Uncomment the relevent line to plot Z versus X.

4.3 Weather or climate?

- Now set subsection_number=1.20. The trajectory for two slightly different initial conditions is shown, as well as the distance between the two. How does the distance grow? Try increasing and decreasing the difference in initial conditions. How much time does it take for the trajectories to diverge, and how does it depend on the difference in initial conditions?

The motion on the attractor exhibits sensitive dependence on initial conditions. Two trajectories starting very close together will rapidly diverge from each other. In fact, neighbouring trajectories separate exponentially fast. The practical implication is that long-term prediction becomes impossible in a system like this, where small uncertainties are amplified enormously.

- As mentioned earlier, originally Lorenz derived these equations as a simple model for atmospheric convection. We can look at the atmospheric state corresponding to trajectories on the Lorenz butterfly. Set subsection_number=1.21. This should show an animation of the solution on the Lorenz butterfly (top panel) and the corresponding atmospheric state (bottom panel) when the fluid is heated at the bottom and cooled at the top. How does the atmospheric state evolve with time? This should save a movie "Convection.avi". You can change the name or frame rate in the matlab code.

The connection between atmospheric convection and the Lorenz chaotic system has implications for weather prediction. Lorenz hence concluded in his paper: "prediction of the sufficiently distant future is impossible by any method, unless the present conditions are known exactly. In view of the inevitable inaccuracy and incompleteness of weather observations, precise very-long-range forecasting would seem to be non-existent". If chaos makes weather prediction, with time scales of a few days to a few weeks, problematic, how can we have any hope for climate prediction, which involves times scales of centuries?

Well in the same way that Lorenz discovered order (the butterfly) in chaos, even though exact values can not be predicted over long time scales, the statistical description of a future climate is possible (i.e. prediction of the probability density function or enveloppe of possible values).