Travaux Pratiques : Météorologie dynamique et Océanographie

Récupérer tous les fichiers dans le répertoire `http://www.lmd.ens.fr/glapeyre/TD`.

1 Ondes de Rossby barotropes

On s'intéresse à la propagation d'ondes de Rossby barotrope sur le plan β. On intègre l'équation de la vorticité relative ζ sous l'hypothèse géostrophique :

$$\partial_t \zeta + u \partial_x \zeta + v \partial_y \zeta + v \frac{df}{dy} = 0 \quad \text{avec} \quad \zeta = \Delta \psi \qquad u = -\partial_y \psi \qquad v = \partial_x \psi$$

1. **Rappeler comment on passe de la fonction de courant ψ au géopotentiel Φ dans l'approximation du plan f ?**

2. On choisit un domaine de taille $L_x = 50000$km par $L_y = 20000$km.

   On choisit comme condition initiale

$$\zeta(x, y, t = 0) = -\frac{A}{f_0 l^2} \exp\left(-\frac{x^2 + ay^2}{l^2}\right)$$

   avec $l = 2000$km. Le programme `rossby1.m` intègre numériquement l'équation de la vorticité relative. Vous pouvez modifier les premières lignes du programme pour définir

   - `lat0` : la latitude pour laquelle on fait l'approximation du plan β
   - `a` : le paramètre de forme de la vorticité relative
   - `nt` : le nombre de pas de temps
   - `amplitude` de la vorticité : A.

   En sortie, on obtient

   - `x` et `y` sont les vecteurs qui contiennent les abscisses et ordonnées des points de la grille.
   - `time` est le vecteur qui contient le temps (en seconde) pour chaque sauvegarde des données.
   - `vortg` est un vecteur tridimensionnel contenant la vorticité relative (1er élément en x, 2ème en y et 3ème en temps). Sa taille est donnée par `size(vortg)`

   Dans Matlab, on a introduit deux fonctions `spec2grid_v2.m` et `grid2spec_v2` et on a aussi stocké les vecteurs d'onde zonal `kx_` et méridien `ky_`. Cela permet de pouvoir calculer la vitesse zonale comme `ug=spec2grid_v2(-i*ky_.*psi);` si `psi` est la fonction de courant stockée en spectral
   (c-à-d `\psi-grid2spec_v2(vortg(:,:,1))./(kx_.^2+ky_.^2+eps))`.

(a) **Tout d'abord, faire tourner le code** `>> rossby1;`**.**

Pour visualiser en mode animation 3D, on pourra utiliser la commande `visualisation(x,y,vortg)` qui montre le champ en 3 dimensions ('z' pour l'amplitude de la variable) et `visualisation2d(x,y,vortg)` qui montre le champ en 2 dimensions.

Pour visualiser un champ à un instant donné, on peut utiliser `contourf(x*1e-6,y*1e-6,vortg(:,:,50)')` pour le temps `time(50)`. Pensez à la fonction `squeeze` si vous voulez dessiner `vortg(:,10,:)` (et faire que c'est un champ 2D et non 3D).

(b) **Par une analyse d'échelle, montrer dans quel régime des paramètres on peut négliger les termes nonlinéaires de l'équation de conservation de la vorticité.**

Par la suite, on choisira une valeur de $A = 600$.

(c) **Décrire ce que vous observez dans les animations.**

(d) **Faire un diagramme de Hoevmuller en (x, t) le long de $y = 0$. Evaluer la vitesse de phase et la vitesse de groupe des ondes. Comparer avec l'expression analytique (que l'on pourra approximer en utilisant l pour déterminer une longueur d'onde typique).**

3. **Faire varier le paramètre de forme de la perturbation de vorticité :** `a` **entre** 0.2 **et** 100 **dans le code** `rossby1.m`**. Que constate-t-on sur la propagation des ondes ? Expliquer ce résultat à partir de la théorie des ondes de Rossby.**

4. **Faire varier la latitude** `lat0` **et montrer que la vitesse de propagation des ondes est bien linéairement proportionnelle à $\beta = df/dy$ (on prendra plusieurs valeurs !).**

5. **Vérifier que la vitesse de propagation de la phase est indépendante de l'amplitude A (**`amplitude`**).** On pourra aller jusqu'à des valeurs $A = \pm 20000$. *Question subsidiaire: dans quelles directions se déplace le maximum pour des plus fortes valeurs ?*

6. Dans le programme `rossby1.m` on peut tenir compte d'un écoulement moyen, c'est-à-dire

$$\partial_t \zeta + (u + U)\partial_x \zeta + v\partial_y \zeta + v\frac{df}{dy} = 0 \quad \text{avec} \quad \zeta = \Delta\psi \qquad u = -\partial_y \psi \qquad v = \partial_x \psi$$

avec $U(y) = U_0$.

Examiner l'évolution d'une perturbation pour différentes valeurs de `U0` **$= U_0$. Interpréter.**

2 Propagation des ondes de Rossby

1. Redémontrer la relation de dispersion qui relie la fréquence ω aux nombres d'onde k, l correspondant au vecteur d'onde $\vec{k} = (k,\ l)$.

2. Les vitesses de phase (qui correspondent à la propagation des phases constantes, comme les maximum ou les minimum) selon x et y sont égales à $C_\phi^x = \omega/k$ et $C_\phi^y = \omega/l$. Les vitesses de groupe (qui correspondent à la propagation de l'énergie, c-à-d l'enveloppe du paquet d'onde) en x et y sont $C_g^x = \partial\omega/\partial k$ et $C_g^y = \partial\omega/\partial l$. Calculer ces vitesses.

3. On écrit le vecteur d'onde $\vec{k} = |K|\,(\cos\theta,\ \sin\theta)$. Dessiner dans le plan $(x,\ y)$ l'orientation des vecteurs $\vec{k}$, $\vec{C}_\phi$ et $\vec{C}_g$.

4. La vitesse de phase mesure la vitesse de déplacement des maxima d'une onde. La vitesse de groupe mesure la vitesse de l'enveloppe formée par tous les maxima et minima (prise à un instant donné). L'enveloppe permet de donner l'amplitude des maxima.

   Si la vitesse de groupe est inférieure à la vitesse de phase, les maxima vont se propageaient mais leur amplitude sera très faible (l'énergie de l'onde s'étant propagée moins vite).

   Pour pouvoir mesurer sur un diagramme de Hoevmuller la vitesse de phase d'une onde, il faut donc que les vitesses de phases et de groupe soient du même ordre de grandeur

   (a) Calculer les rapports C_ϕ^x/C_g^x et C_ϕ^y/C_g^y.

   (b) On se place dans la situation où on a une perturbation allongée en y, c'est-à-dire $L_y \gg L_x$, ou $k \gg l$.

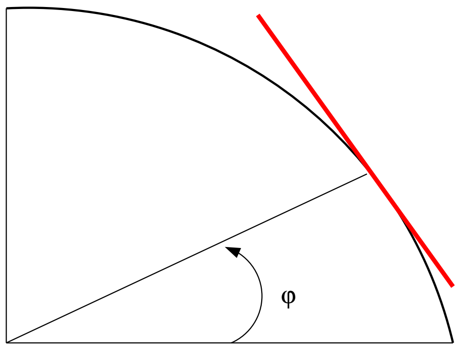
      i. Quelle sont les directions de propagation de la phase et de l'énergie selon x ?

      ii. Dans quelles directions approximatives vont pointer les vecteurs $\vec{k}$, $\vec{C}_\phi$ et $\vec{C}_g$? (on supposera $\theta \approx 0$ en étant supérieur à 0).

      iii. Peut-on mesurer la propagation de la phase en x ? en y

      iv. Est-ce cohérent avec le TP ?

   (c) Faire la même chose pour $L_x \gg L_y$.



3 Approximation du plan β

1. Considérons un plan tangent à la sphère à la latitude ϕ_0 et la longitude λ_0 comme sur la figure. Quel est alors le système de coordonnées x et y pour de petits déplacements autour de ce point de référence ? (on cherchera à exprimer x et y en fonction de ϕ_0, λ_0, ϕ et λ, $y = 0$ correspondant à $\phi = \phi_0$).

2. En faisant une approximation en série de Taylor au premier ordre, montrer que l'on peut écrire la fréquence de Coriolis comme $f(y) = f_0 + \beta y$. Quelle est la valeur de f_0 et de β ? On appelle cette approximation l'approximation du plan β.

3. Dessiner la fréquence de Coriolis et son approximation dans des gammes de y entre -1000 et 1000km autour de la latitude de référence. On rappelle que le rayon de la Terre est de 6370km. On examinera le cas d'une latitude de référence à l'équateur, à 30°N, 45°N et 60°N.

4. Sur quelle distance reste valable cette approximation dans chaque cas ? (regarder les graphes de la fréquence de Coriolis et son approximation pour différents ϕ_0 et penser à faire un développement de Taylor)