

Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie
Spécialité : Météorologie, Océanologie et Environment

présentée par
Riwal Plougonven

JETS, VORTEX ET ONDES D'INERTIE-GRAVITÉ :
SÉPARATION DYNAMIQUE ET ÉMISSION

Soutenue le lundi 7 octobre 2002.

Jury :

M. Francis Dalaudier	Examineur
Mme Bach Lien Hua	Rapporteur
M. Bernard Legras	Président
M. Richard Rotunno	Examineur
Mme Chantal Staquet	Rapporteur
M. Hector Teitelbaum	Examineur
M. Vladimir Zeitlin	Directeur de thèse

Remerciements

Je remercie avant tout Vladimir Tseitline d'avoir dirigé ces recherches, de m'avoir proposé des problèmes intéressants et stimulants. J'ai apprécié ses explications et son exigence, et j'ai beaucoup appris de son expérience. Je lui suis particulièrement reconnaissant pour la confiance qu'il m'a témoignée, notamment pour les activités d'enseignement.

J'ai énormément apprécié les collaborations auxquelles j'ai participé. Explorer et décortiquer les données avec Hector Teitelbaum m'a beaucoup apporté : son enthousiasme et sa curiosité ont été une source de motivation constante, et la confrontation avec le monde réel a été très formatrice. Je remercie Sergey Medvedev pour ses explications, ses indications et sa gentillesse. Je regrette que le temps ne m'ait permis de discuter davantage avec lui.

Je suis reconnaissant envers Claude Sidi pour la clarté et la grande pédagogie de son enseignement sur l'atmosphère moyenne, et pour les conseils judicieux qu'il m'a donnés au début de cette thèse. Je tiens à lui rendre hommage ici.

Je remercie Francis Dalaudier, Lien Hua, Bernard Legras, Rich Rotunno et Chantal Staquet de m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury de thèse. Je tiens à exprimer ma gratitude envers Lien Hua et Chantal Staquet, qui ont accepté la charge supplémentaire de rapporteur, pour leurs questions, leurs commentaires et leurs encouragements.

Ma participation à l'ACI coordonnée par Alexandre Stegner a été l'occasion d'interactions très enrichissantes. Grand merci à Alexandre pour son temps, son intérêt pour mon travail, et son enthousiasme. Je remercie également Pascale Bouruet-Aubertot, Albert Hertzog, Mahdi Ben Jelloul et Thomas Dubos pour ces multiples et intéressantes discussions.

Le travail de ces années a été enrichi de nombreux échanges, au sein du LMD et à l'extérieur : mercis à Jean-Rémi Alisse, Claude Basdevant, Paul Billant, Oliver Bühler, Yuli Chashechkin, Jean-Marc Chomaz, Françoise Désalmand, David Dritschel, Marie Farge, Jan-Bert Flor, Michael Greenslade, Christophe Koudella, François Lott, Michael McIntyre, Frédéric Moulin, Claude Souprayen, George Sutyryn, Rémi Tailleux, Jacques Vanneste, François Vial. Je suis particulièrement reconnaissant envers Peter Haynes pour les discussions que nous avons eues et pour ses encouragements.

Les journées au 24 rue Lohmond ont été égayées par le sourire de Marie-Christine Roos et la méthode Coué de Gabriel Rabreau. Je remercie également Frédéric Bongat, Françoise Larincq, Marie-Claire Lanceau et Martine Roux pour leur aide et leur efficacité.

Je remercie Fabio D'Andrea pour ses conseils et sa porte ouverte.

Au quotidien, le quatrième étage n'aurait jamais eu ses vives couleurs et sa bonne humeur sans Guillem Candille, Vincent Daniel, Gwendal Rivière, Ludovic Auger, Julien LeSommer, Tieh Yong Koh, Philippe Caillol.

Enfin, je remercie mes parents, Guillaume & Sylvie, et bien sûr Nadia.

Résumé

Le problème central de cette thèse est la séparation des écoulements atmosphériques et océaniques en une partie lente, proche de l'équilibre géostrophique, et une partie rapide, décrite dans l'approximation linéaire par les ondes d'inertie-gravité.

La décomposition d'écoulements rectilignes (jets, fronts) est abordée à travers le problème de l'ajustement géostrophique, dans trois modèles de complexité croissante : l'eau peu profonde, le fluide à deux couches, et le fluide continuellement stratifié. A l'aide de la description lagrangienne de l'écoulement, une définition non-ambigüe de la partie lente (stationnaire) est obtenue et ses conditions d'existence étudiées. Notamment, il peut s'avérer impossible, dans le fluide stratifié, de définir la partie lente.

La dynamique de la partie rapide, et ses conséquences pour l'ajustement, sont également étudiées. Des ondes stationnaires d'amplitude finie sont décrites dans le modèle de l'eau peu profonde et dans le fluide à deux couches. Dans les fluides ayant une stratification, il est montré que des ondes sub-inertielles peuvent rester piégées dans la région anticyclonique du jet, et modifier ainsi l'ajustement.

Cette approche théorique est complétée par une analyse de radiosondages de la campagne FASTEX et de sorties du Centre Européen, afin de déterminer quelles régions du jet troposphérique des moyennes latitudes sont les plus favorables à la génération d'ondes. L'étude détaillée d'un cas montre que l'ajustement géostrophique est un mécanisme important pour l'émission d'ondes quasi-inertielles de grande échelle et de grande amplitude.

Enfin, pour mieux comprendre les limites de la notion de variété lente, nous quantifions, dans un fluide fortement stratifié sans rotation, l'émission d'ondes par un vortex non-stationnaire, ainsi que la réaction inverse.

Abstract

Our focus in this thesis is on the splitting of atmospheric or oceanic flows into slow and fast parts, the former being close to geostrophic equilibrium, and the latter being described by inertia-gravity waves in the linear approximation.

This splitting is considered for rectilinear jets or fronts through the problem of the geostrophic adjustment, in three models of increasing complexity : shallow water, the two-layer fluid and the continuously stratified fluid. Describing the flow in a Lagrangian way, a non-ambiguous definition the slow (stationary) part of the flow is obtained, and the conditions of its existence are discussed. In particular, it is shown that it can be impossible, in the stratified fluid, to define a slow part.

The dynamics of the fast part of the flow and its effects on the adjustment are also examined. Stationary waves of finite amplitude are described in the shallow water and in the two-layer models. In the two models including stratification, it is shown that sub-inertial waves trapped in the anticyclonic side of the jet exist, and that they modify the adjustment scenario.

This theoretical approach is complemented by an observational study, based on FASTEX radiosoundings, to determine which regions of the tropospheric jet are most favorable to wave generation. The detailed study of a precise event shows that geostrophic adjustment is an important mechanism generating large-scale, near-inertial waves of large amplitude.

Finally, in order to understand better the ultimate limitations of the slow manifold concept, we study and quantify the emission of gravity waves by a nonstationary vortex in a non-rotating, strongly stratified fluid, and the backreaction on the vortex..

Table des matières

1	Introduction	11
1.1	Séparation linéaire de l'écoulement en composantes rapide et lente	12
1.1.1	Le modèle de l'eau peu profonde en rotation	12
1.1.2	Analyse linéaire	14
1.2	Les modèles réduisant la dynamique à sa composante lente, et l'espoir de la 'variété lente'	15
1.2.1	Quasi-géostrophie et semi-geostrophie	15
1.2.2	L'espoir d'une variété lente	16
1.2.3	Les exclus de la quasi-géostrophie	16
1.3	L'ajustement géostrophique	17
1.3.1	Le scénario classique et ses incertitudes	17
1.3.2	Ajustement géostrophique nonlinéaire de structures tourbillonnaires	18
1.4	Ajustement géostrophique dans des situations frontales : séparation et émission	19
1.4.1	Approches théoriques de l'ajustement géostrophique nonlinéaire d'anomalies frontales	19
1.4.2	Observations d'ondes émises par un jet troposphérique	21
1.5	Emission d'ondes par des mouvements vorticaux non-stationnaires	21
2	Ajustement frontal dans le modèle de l'eau peu profonde	23
2.1	Historique	24
2.1.1	Le problème classique d'ajustement considéré par Rossby	24
2.1.2	Approches linéaire et faiblement nonlinéaire	25
2.1.3	Simulations numériques de l'ajustement géostrophique nonlinéaire	25
2.2	La description lagrangienne et ses avantages	26
2.2.1	L'ambiguïté de l'approche eulérienne	26
2.2.2	La description lagrangienne	27
2.2.3	Résumé des principaux résultats	28
2.3	<i>'Frontal geostrophic adjustment, slow manifold and nonlinear phenomena in one-dimensional rotating shallow water'</i>	29
2.3.1	Compléments sur la dispersion d'ondes et sur les chocs	55
2.4	La séparation de l'écoulement en parties lente et rapide	59
2.4.1	Inversion de la vorticité potentielle	59
2.4.2	Séparation lagrangienne de l'écoulement	60
2.4.3	Au-delà du modèle uni-dimensionnel	60
2.5	Perspectives	61

3	Ajustement géostrophique dans un fluide à deux couches	63
3.1	Formulation of the two-layer model	64
3.1.1	Primitive equations and linear analysis	64
3.1.2	Existence of an adjusted state	65
3.2	Influence of the jet on inertia-gravity waves in the 2-layer model	67
3.2.1	Scaling	67
3.2.2	Linearization around a jet	68
3.2.3	Existence of trapped modes	69
3.3	Stationary waves of finite amplitude in the 2-layer model . . .	70
3.3.1	General equation for the stationary waves	70
3.3.2	Numerical simulations	72
3.4	Conclusions et perspectives	76
4	Ajustement géostrophique dans un fluide continûment stratifié	79
4.1	Frontogénèse(s) dans un fluide continûment stratifié bidimensionnel	80
4.1.1	La description semi-géostrophique de la frontogénèse de déformation	80
4.1.2	Ajustement géostrophique de gradients horizontaux de densité ou de température potentielle	81
4.2	Nonlinear geostrophic adjustment in the stratified case	83
4.2.1	The primitive equations	84
4.2.2	Lagrangian formulation	85
4.2.3	Uniform potential vorticity cases	86
4.2.4	General case : arbitrary PV	93
4.2.5	Summary	95
4.3	Perturbative approach for waves on the background of a jet in the stratified case	95
4.3.1	Scaling of the equations	96
4.3.2	The equations at successive orders	97
4.4	Barotropic jet example	100
4.4.1	First order calculation and existence of trapped modes	100
4.4.2	Nonlinear contributions of the waves to the slow fields	103
4.5	WKB approximation for the baroclinic jet	105
4.5.1	Description of the waves and their propagation	106
4.5.2	Limitations	108
4.6	Conclusions et perspectives	108
5	Ondes émises par le jet troposphérique dans les données FASTEX	111
5.1	Données disponibles et outils d'analyse	113
5.1.1	Les radiosondages issus de FASTEX	113
5.1.2	La situation synoptique d'après les analyses du Centre Européen	115
5.2	Activité ondulatoire vue en fonction de la distance au jet . . .	117
5.2.1	Vue d'ensemble : importance du jet comme source d'ondes	117
5.2.2	Identification de configurations favorables aux ondes .	119
5.3	Un exemple d'ajustement géostrophique	121

5.3.1	Evolution de la région de vent agéostrophique	123
5.3.2	L'émission d'ondes d'après les radiosondages	128
5.3.3	Champ de divergence du vent d'après le Centre Européen	132
5.4	Discussion et perspectives	134
6	Emission spontanée d'ondes de gravité par des mouvements vorticaux non-stationnaires	135
6.1	Limitations de la 'variété lente' par l'émission spontanée dans des modèles bidimensionnels	136
6.1.1	L'émission spontanée et la réaction inverse	136
6.1.2	Exemple du vortex de Kirchhoff	137
6.1.3	Limites de la notion de 'variété lente'	139
6.2	Emission spontanée dans un fluide stratifié tri-dimensionnel	140
6.2.1	A propos des écoulements fortement stratifiés	140
6.2.2	<i>'Internal gravity wave emission from a pancake vortex : an example of wave-vortex interaction in strongly stratified flows'</i>	141
6.3	Extension au fluide en rotation : la fréquence inertielle comme fréquence de coupure	152
7	Résumé et perspectives	153
	Appendices	157
8	Annexes	157
A	Nonlinear waves in the Eulerian formalism for the one-layer rotating shallow water equations	157
B	An explicit example of trapped modes in a barotropic jet	158

Chapitre 1

Introduction

*'What a good thing Adam had. When he said a good thing
he knew nobody had said it before.'*

Mark Twain.

De nombreux phénomènes de la dynamique de l'atmosphère et de l'océan peuvent être compris en ne considérant que l'écoulement à grande échelle (échelle synoptique et au-delà) et son évolution lente (échelle de temps de l'ordre du jour), ce qui exclut de nombreux phénomènes plus rapides, et souvent de plus petite échelle, tels que les ondes d'inertie-gravité. Les approximations filtrant ces phénomènes rapides sont bien connues : par exemple, l'instabilité barocline et la frontogénèse peuvent être comprises dans le cadre des approximations quasi-géostrophique et semi-géostrophique, respectivement.

Il est instructif, avant d'en venir aux questions qui se posent à propos de ces simplifications, de cerner ce qui les justifie, et sur quelles propriétés fondamentales elles s'appuient. L'analyse linéaire des équations suffit pour faire apparaître deux propriétés essentielles des écoulements d'un fluide soumis à la rotation et à la gravité : l'existence de deux échelles d'évolution bien séparées et le rôle clé de la vorticité potentielle. Cette analyse linéaire est rappelé en section 1.1 dans le cadre du modèle de l'eau peu profonde. Au-delà de l'approximation linéaire, les modèles dits 'équilibrés' (*balanced models*), par exemple le modèle quasi-géostrophique, permettent d'étudier la dynamique de la composante lente de l'écoulement (section 1.2). Ces modèles se fondent sur la prépondérance d'un équilibre entre forces, tels les équilibres géostrophique et hydrostatique, et excluent les mouvements rapides comme les ondes d'inertie-gravité. Les questions suivantes sont toutefois légitimes :

- Un   tat arbitraire de l'atmosphère ou de l'océan peut-il être séparé de façon rigoureuse et unique en une partie lente et une partie rapide ? Si oui, sous quelles conditions ?
- Quelle est la signification de la partie lente pour l'écoulement ? Le fluide s'ajuste-t-il vers cet   tat ? Comment ?
- Il est connu que la partie rapide, par le déferlement des ondes par exemple, peut modifier la partie lente de l'écoulement. Existe-t-il des interactions adiabatiques (non-dissipatives) entre les parties lente et

rapide de l'écoulement et quelles limites imposent-elles à la séparation de l'écoulement ?

Nous proposons dans cette thèse d'apporter des éléments de réponse à ces questions, principalement pour des écoulements de type jet ou front par une analyse du processus fondamental qu'est l'ajustement géostrophique.

Le problème de l'ajustement géostrophique nonlinéaire (évolution du fluide à partir d'une condition initiale arbitraire) a en effet l'intérêt de poser, directement ou non, les questions évoquées ci-dessus. Bien que le scénario global de l'ajustement d'après Rossby [Ros38] et Obukhov [Obu49] ait été confirmé et n'est pas à remettre en question, plusieurs points demeurent incertains (section 1.3). Nous nous intéresserons à l'ajustement dans des situations frontales (forts gradients dans une direction, faibles variations dans l'autre). L'étude de ces situations peut être poussée assez loin analytiquement en s'appuyant sur l'hypothèse du front rectiligne, c'est-à-dire l'absence de variations le long du front ou du jet, comme c'est le cas dans les modèles classiques de la frontogénèse [HB72].

Cette analyse de l'ajustement géostrophique d'anomalies frontales (section 1.4) est complétée par des observations d'ondes émises à proximité du jet troposphérique pendant la campagne FASTEX, venant confirmer l'importance du processus d'ajustement géostrophique comme source d'ondes, et par une analyse de l'émission spontanée d'ondes par un vortex nonstationnaire dans un fluide fortement stratifié, illustrant les limitations de la séparation de l'écoulement en une composante rapide et une composante lente (section 1.5).

1.1 Séparation linéaire de l'écoulement en composantes rapide et lente

Les océans et l'atmosphère sont des couches fluides minces soumises à la rotation et à la gravité. Le modèle le plus simple pour les décrire est le modèle de l'eau peu profonde¹ ; ce modèle peut sembler rudimentaire, mais il est déjà riche et conceptuellement très utile (par ex. [Gil82, Gil76, Ped87]). Nous le considérons dans cette section, d'une part parce qu'il permet de préciser quantitativement certaines notions, et d'autre part parce qu'il constitue un outil de base, utilisé ou évoqué à plusieurs reprises par la suite (chapitre 2 et 6).

1.1.1 Le modèle de l'eau peu profonde en rotation

Les échelles horizontales étant beaucoup plus grandes que les échelles verticales, la vitesse \mathbf{u} est supposée ne pas varier sur la verticale. Le fond est supposé plat et la rotation constante (plan- f). Les équations [Gil82, Ped87] décrivant les mouvements du fluide sont :

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} + g\nabla h = 0, \quad (1.1a)$$

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla)h + \nabla \cdot (\mathbf{u}h) = 0, \quad (1.1b)$$

¹ce modèle est aussi appelé modèle équivalent barotrope, ou équations de Barré de St Venant.

où f est le paramètre de Coriolis, g la pesanteur, et h la hauteur totale du fluide.

A l'échelle synoptique, les termes dominant l'équation du mouvement (1.1a) sont la force de Coriolis et le gradient de pression [Hol92]. En première approximation, le mouvement s'organise donc pour garantir l'égalité de ces deux termes, ce qui donne le *vent géostrophique* :

$$\mathbf{v}_g = \frac{g}{f} \mathbf{e}_z \times \nabla h, \quad (1.2)$$

pour lequel la hauteur (ou plus généralement la pression) joue le rôle d'une fonction de courant. Il apparaît clairement, sur les cartes montrant la pression et le vent aux moyennes latitudes, que le vent à grande échelle est proche de l'équilibre géostrophique (*cf* figure 1.1).

Par ailleurs, les équations (1.1a)-(1.1b) peuvent être combinées pour montrer que la vorticité potentielle $q = (f + \partial_x v - \partial_y u)/h$ est conservée au cours du mouvement tant que celui-ci est adiabatique :

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{f + (\partial_x v - \partial_y u)}{h} \right) = 0. \quad (1.3)$$

La vorticité potentielle (PV) est une propriété *lagrangienne* du fluide. Elle se révèle essentielle pour la séparation de l'écoulement en composante lente et rapide.

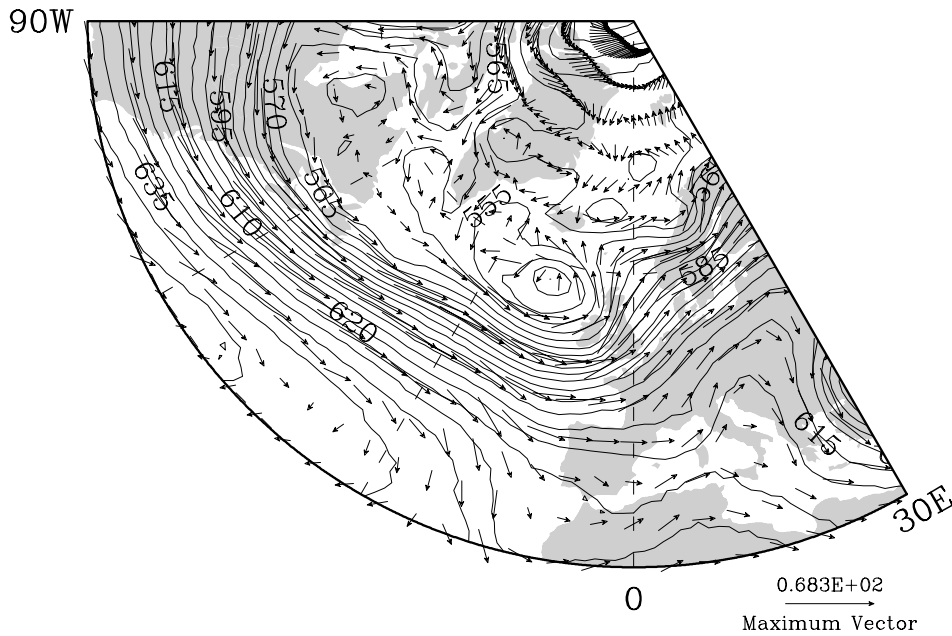


FIG. 1.1 – Vent et géopotential sur la surface isobare correspondant à $Z = 5\text{km}$ en coordonnée *log*-pression, le 24 février 1997. Ces champs, obtenus à partir des données du Centre Européen pour la Prévision Météorologique à Moyen Terme, sont proches de l'équilibre géostrophique.

1.1.2 Analyse linéaire

La linéarisation des équations (1.1a)-(1.1b) autour d'un état de repos où la hauteur du fluide est H donne :

$$\partial_t u - fv + g\partial_x \eta = 0, \quad (1.4a)$$

$$\partial_t v + fu + g\partial_y \eta = 0, \quad (1.4b)$$

$$\partial_t \eta + H(\partial_x u + \partial_y v) = 0, \quad (1.4c)$$

où η est le déplacement de la surface libre ($h = H + \eta$). En cherchant les modes propres sous la forme $e^{i(\mathbf{kx} - \omega t)}$, la relation de dispersion suivante est obtenue :

$$\omega (\omega^2 - f^2 - gH(k^2 + l^2)) = 0. \quad (1.5)$$

Il y a donc, pour k et l donnés, deux solutions ondulatoires ($\pm\omega$ avec $\omega^2 \geq f^2$) pour un mode stationnaire $\omega = 0$.

La composante lente de l'écoulement est tout simplement stationnaire, en équilibre géostrophique. Comme l'indiquent (1.2) ou (1.4c), ces mouvements sont *incompressibles*. Ils ont une signature non-nulle sur la PV, qui dans l'approximation linéaire est conservée en chaque point (l'advection est négligée dans l'approximation linéaire). Notons enfin que l'état équilibré du fluide (hauteur et vent) peut entièrement se déduire de la connaissance de la PV et des conditions aux limites adéquates.

Les deux autres solutions sont des ondes linéaires d'inertie-gravité. Contrairement aux mouvements géostrophiques, ces ondes sont non-stationnaires (échelle de temps rapide $T \leq f^{-1}$), à divergence non-nulle, et leur signature sur la PV, dans l'approximation linéaire, est nulle².

Ce sont des ondes dispersives. Comme le montre la relation de dispersion, les ondes de plus basse fréquence et de plus grande échelle se dispersent plus lentement :

$$\omega^2 = f^2 + gH(k^2 + l^2). \quad (1.6)$$

D'après la méthode de la phase stationnaire [Lig78, Whi74], lors de la dispersion d'un paquet d'ondes, l'amplitude décroît selon une loi asymptotique en $t^{-1/2}$.

Cette séparation de l'écoulement en une partie incompressible et non-propagative (vorticale) et une partie propagative à divergence non-nulle (ondes) est générale [SR89, RL00], elle n'est pas liée spécifiquement à la présence de la rotation. Ce que la rotation introduit, c'est une séparation entre les échelles de temps des deux types de mouvements (le 'trou spectral'³), les ondes d'inertie-gravité n'existant que pour des fréquence plus grandes que f . Dans le contexte des fluides en rotation, les termes 'lente' et 'rapide' seront donc utilisées comme équivalents à 'vorticale' et 'ondulatoire'.

²De manière plus générale, les ondes sont un signal qui se propage sans transport net de matière; elles ne peuvent donc pas être associées à la vorticité potentielle, qui est une propriété lagrangienne du fluide.

³dans un modèle tenant compte de la variation de f (plan β , par exemple), les mouvements vorticaux de l'approximation linéaire ne sont plus stationnaires, ils comprennent les ondes de Rossby. Leurs échelles de temps sont néanmoins beaucoup plus grandes que celles des ondes d'inertie-gravité (quelques jours contre quelques heures).

Ainsi, l'analyse linéaire met en évidence la séparation entre les échelles de temps de deux types de mouvements très différents :

- les mouvements vorticaux : stationnaires dans l'approximation linéaire, dans le plan- f , ces mouvements en équilibre géostrophique se caractérisent par une divergence nulle, et ont une signature sur le champ de vorticité potentielle.
- les ondes d'inertie-gravité : rapides, propagatives et à divergence non-nulle cette partie de l'écoulement n'a pas, dans l'approximation linéaire, de signature sur le champ de PV.

L'analyse linéaire souligne aussi le rôle de la PV pour séparer les deux composantes du mouvement. Nous avons considéré ici le modèle de l'eau peu profonde, mais l'analyse linéaire des équations primitives pour un fluide stratifié sur le plan- f aurait donné les mêmes résultats.

Dans quelle mesure peut-on espérer que cette séparation de l'écoulement se prolonge au-delà de l'analyse linéaire ? L'usage des modèles équilibrés a en tout cas montré que de nombreux aspects de la dynamique de l'atmosphère ou des océans pouvaient être compris en ne décrivant que la partie lente de l'écoulement, c'est-à-dire en omettant les ondes.

1.2 Les modèles réduisant la dynamique à sa composante lente, et l'espoir de la 'variété lente'

La prépondérance, dans l'écoulement de grande échelle, de la composante lente proche de l'équilibre géostrophique a été utilisée pour mettre au point des modèles ne décrivant que cette partie de l'écoulement. L'exemple le plus connu est le modèle quasi-géostrophique.

1.2.1 Quasi-géostrophie et semi-geostrophie

Le modèle quasi-géostrophique (QG) est obtenu à l'aide des hypothèses suivantes : le nombre de Rossby de l'écoulement est petit $Ro = U/fL \ll 1$, l'écoulement a une seule échelle caractéristique, et l'échelle de temps des mouvements est grande devant la période inertielle ($T \gg 1/f$). Cette dernière hypothèse exclut les ondes d'inertie-gravité.

Le vent est approché par la valeur du vent géostrophique, et peut donc se déduire de la pression. Celle-ci peut s'obtenir à partir de la vorticité potentielle quasi-géostrophique. Cette dernière est une quantité analogue à la vorticité potentielle, mais qui est conservée lors de l'advection par le vent géostrophique :

$$(\partial_t + \mathbf{v}_g \cdot \nabla) q_g = 0 . \quad (1.7)$$

Connaissant la distribution de q_g au temps t , l'évolution quasi-géostrophique du fluide peut donc être calculée en suivant la séquence inversion-advection :

- obtention, à partir de la vorticité potentielle quasi-géostrophique, de l'état du fluide (pression, vent...). C'est l'inversion de la vorticité potentielle.
- advection, par le champ de vitesse obtenu, de la vorticité potentielle, ce qui permet d'obtenir la distribution de vorticité potentielle au temps $t + \delta t$ et de recommencer la séquence.

Les hypothèses du modèle quasi-géostrophique sont simples mais assez restrictives. Par exemple, ce modèle, s'il est bien adapté pour analyser les premiers stades de l'instabilité barocline, ne l'est plus pour étudier les fronts ou les jets. Ces structures, omniprésentes dans l'atmosphère et l'océan, peuvent être décrites dans l'approximation semi-géostrophique (SG). Les accélérations agéostrophiques y sont également négligées, mais c'est la vitesse totale qui est utilisée pour calculer l'advection (et non la seule vitesse géostrophique comme dans l'équation (1.7)). Enfin, l'expression de la vortacité potentielle dans l'approximation semi-géostrophique est plus compliquée que dans le modèle quasi-géostrophique (nonlinéaire en SG, linéaire en QG).

Plus généralement, les modèles dits équilibrés suivent la même séquence (inversion-advection) que le modèle quasi-géostrophique, mais l'opérateur d'inversion de la vortacité potentielle s'appuie sur une relation diagnostique d'équilibre plus précise entre les différents champs. Ainsi, d'autres approximations, s'appuyant notamment sur la faiblesse de la divergence de la composante lente de l'écoulement, permettent d'obtenir des opérateurs d'inversion de la vortacité potentielle d'ordre plus élevé (*e.g.* [MG80, MN00]). Ces modèles équilibrés fournissent un cadre plus simple que les équations primitives pour étudier de nombreux aspects de la dynamique des fluides géophysiques (instabilité barocline, gyres océaniques, cyclogénèse, frontogénèse...).

1.2.2 L'espoir d'une variété lente

L'efficacité de ces modèles et les propriétés des ondes soulignées en 1.1.2, entre autres, ont pu suggérer que la séparation entre composante lente et composante rapide était si profonde qu'il existait une variété lente invariante ('slow invariant manifold') : un sous-espace de l'espace des phases où la dynamique serait lente (absence totale d'ondes d'inertie-gravité) et tel que, si l'état initial du fluide appartient à ce sous-espace, le fluide y reste tout au long de son évolution par la suite, ou du moins en reste proche (dans un sens à définir).

La possibilité d'une variété lente est très attrayante [FMN00] d'une part parce qu'elle permet une description réduite de l'écoulement, d'autre part parce qu'elle en facilite la compréhension en le décomposant.

Tandis que les modèles équilibrés décrivent la dynamique de la partie lente seule, d'autres travaux, par exemple sur l'initialisation nonlinéaire par les modes normaux [Lei80], ont cherché à isoler la partie lente en projetant les conditions initiales sur la variété lente : ainsi, lors de l'évolution du fluide, même si celle-ci est obtenue par l'intégration des équations primitives, la dynamique resterait entièrement lente. Ces méthodes d'initialisation sont davantage tournée vers les applications (modèles opérationnels). Notons enfin qu'il y a des liens entre ces méthodes et les modèles équilibrés : Leith [Lei80] a montré par exemple que l'on retrouvait, au premier ordre de l'initialisation nonlinéaire par les modes normaux, la dynamique quasi-géostrophique.

1.2.3 Les exclus de la quasi-géostrophie

Les modèles équilibrés simplifient la description des écoulements en excluant les phénomènes rapides. Ces derniers sont, dans l'approximation linéaire des équations autour d'un état de repos, les ondes d'inertie-gravité

exposées ci-dessus (*cf* 1.1.2). Au-delà de l'approximation linéaire, les ondes (structure, propagation, dispersion, dynamique. . .) sont modifiées par les effets nonlinéaires : pour des petites amplitudes de la partie rapide, on peut décrire celle-ci en termes d'ondes linéaires sur le fond d'un écoulement moyen. Pour des amplitudes finies, la partie rapide s'enrichit de phénomènes fortement nonlinéaires, dont le plus dramatique est le déferlement d'ondes.

Il importe de comprendre et quantifier plus précisément la dynamique de la partie rapide et les interactions possibles, notamment adiabatiques entre parties rapides et lente, afin de déterminer les limites des modèles équilibrés [BM98]. Mais il importe aussi d'étudier les ondes, et notamment de quantifier leurs sources, pour elles-mêmes : par exemple, le transport de quantité de mouvement par les ondes est essentiel à la compréhension de la circulation générale de l'atmosphère (*cf* [AHL87]), leur contribution au mélange est encore mal quantifiée [DHS⁺91, SH02], et elles peuvent avoir des effets spectaculaires en météorologie mésoéchelle [UK87, ZKDK01]. Aussi est-il nécessaire de continuer l'étude et la quantification de leurs sources.

1.3 L'ajustement géostrophique

L'ajustement géostrophique est le processus fondamental par lequel l'océan ou l'atmosphère, écartés de l'état d'équilibre géostrophique, retournent vers un tel état. Ce qui écarte le fluide de l'état équilibré peut être par exemple une instabilité qui mélange, en un temps court devant la période inertielle, une région du fluide (par ex. [BMS99]), un chauffage inhomogène (par ex. [Ou84]) (de manière générale, tout phénomène diabatique agissant sur un temps court devant la période inertielle), le forçage des couches superficielles de l'océan par le vent (par ex. [Ros38]), mais aussi l'évolution de l'écoulement à grande échelle (par ex. [GR96, OD95]). L'analyse de ce problème nous amène nécessairement à nous poser les questions mentionnées ci-dessus (séparation de l'écoulement, effet de la partie rapide. . .).

Comprendre l'ajustement en tant que mécanisme de génération d'ondes, particulièrement pour les ondes de basses fréquences, constitue une seconde motivation [FL92, LF93, SLTL98]. De manière générale, il est connu que les jets et les fronts sont des sources importantes d'ondes [FN92], mais ces sources ne sont pas encore suffisamment quantifiées (par ex. [CM02]).

1.3.1 Le scénario classique et ses incertitudes

Une fois éloignés de l'équilibre (géostrophique ou d'ordre plus élevé), comment l'atmosphère ou l'océan retournent-ils ensuite vers un état d'équilibre ?

Le scénario classiquement admis [Ros38, Obu49, Blu72] peut se résumer ainsi : le fluide est, à l'instant initial, hors équilibre. Très vite (temps de l'ordre de la période inertielle), le fluide se réarrange pour trouver un état d'équilibre correspondant à ses distributions de PV et de masse. Au cours de ce réarrangement, des ondes sont émises ; elles se dispersent et se propagent au loin, laissant derrière elles la partie ajustée de l'écoulement.

Pour des anomalies initiales sans variation dans une direction, l'état final est stationnaire, et il est alors possible d'adopter une démarche diagnostique

et d'obtenir l'état final à partir de l'état initial, sans décrire l'évolution menant de l'un à l'autre.

Les études de l'ajustement géostrophiques se sont pour l'essentiel intéressées soit à la partie rapide de l'écoulement dans les cadres linéaires [Gil76, Gil82] ou faiblement nonlinéaires [Blu67] (notamment ce processus a été étudié linéairement en tant que source d'ondes [FL92, LF93, SLTL98, BMS99, BM99], mais toujours sur fond de fluide au repos), soit uniquement à l'état final obtenu de manière diagnostique [Ros38, Ou84, BW95, WB95, Kal98, Kal00].

Lorsque l'on considère l'ajustement nonlinéaire, c'est-à-dire sans se limiter à de faibles perturbations autour d'un état de repos, il reste dans le scénario communément admis des zones d'ombre touchant à des questions fondamentales :

- Sous quelles conditions l'état final ajusté est-il bien défini (existence et unicité) ?
- S'il existe, est-il toujours atteint, et si oui, comment, sur quelle échelle de temps ? En d'autres termes, quel rôle la partie rapide de l'écoulement joue-t-elle dans l'ajustement nonlinéaire ?
- Quels sont les phénomènes nonlinéaires qui affectent la partie rapide de l'écoulement ? En quoi celle-ci diffère-t-elle des ondes analysées dans l'approche linéaire de l'ajustement ?
- Quelle est l'importance de l'ajustement géostrophique comme source d'ondes dans l'atmosphère ou dans l'océan ? Quantitativement, quelles ondes ce processus peut-il générer ?

Par ailleurs, pour les études numériques de l'ajustement géostrophique, il est plus facile de simuler l'ajustement dans un domaine périodique que dans un domaine infini. Aussi est-il important de comprendre les différences entre les conditions aux limites de radiation et périodiques dans le problème de l'ajustement.

1.3.2 Ajustement géostrophique nonlinéaire de structures tourbillonnaires

Récemment, Reznik, Zeitlin et Ben Jelloul [RZJ01] ont analysé l'ajustement géostrophique nonlinéaire dans le modèle de l'eau peu profonde [RZJ01] et dans des fluides stratifiés [ZRJ02], pour des perturbations localisées, et par une approche perturbative. Leur étude est limitée par deux hypothèses sur l'état initial :

1. l'anomalie initiale est caractérisée par une unique échelle de longueur ;
2. le nombre de Rossby est petit ($Ro \ll 1$).

Ces hypothèses correspondent à des anomalies de type tourbillonnaire (par exemple, la dépression au nord ouest de l'Irlande sur la Fig. 1.1). Dans le cas de déplacements faibles de la surface et avec une échelle caractéristique de l'ordre du rayon de déformation⁴ (nombre de Burger d'ordre 1), leurs résultats sont les suivants : la partie lente est identifiée par inversion de la vorticité potentielle et elle suit la dynamique quasi-géostrophique ; les ondes

⁴Echelle de longueur pour laquelle les effets de la gravité et de la force de Coriolis s'équilibrent : typiquement quelques dizaines de kilomètres dans l'océan, un millier de kilomètres dans l'atmosphère [Gil82].

se dispersent et, jusqu'au troisième ordre du moins, il n'y a aucun effet des ondes sur l'écoulement lent.

Les hypothèses de l'analyse excluent les écoulements tels les jets ou les fronts parce que ceux-ci sont anisotropes (forts gradients dans une direction et peu de variations dans l'autre) et ont des nombres de Rossby (rapport de la vorticité relative à la vorticité planétaire) d'ordre 1. Par exemple, sur la figure 1.1, le jet qui traverse l'Atlantique a un vent maximum d'environ 65ms^{-1} , une échelle transverse de l'ordre de 10^6m , et à ces latitudes $f \sim 10^{-4}$. Le nombre de Rossby correspondant est 0.65, proche de 1.

L'analyse de l'ajustement géostrophique nonlinéaire d'anomalies frontales⁵ sera donc l'occasion de comprendre la séparation entre composante lente et composante rapide pour des écoulements à fort nombre de Rossby, et de mieux quantifier, dans les configurations frontales, la partie rapide pour cerner quels effets celle-ci peut avoir lors de l'évolution du fluide.

1.4 Ajustement géostrophique dans des situations frontales : séparation et émission

Dans une première partie, nous nous intéressons à l'ajustement géostrophique d'anomalies frontales, par une approche analytique (chapitres 2, 3 et 4), mais aussi d'après des observations dans l'atmosphère (chapitre 5).

Dans le volet théorique, nous analysons à l'aide de trois modèles de complexité croissante l'ajustement géostrophique de jets ou de fronts, en faisant l'hypothèse qu'il n'y a pas de variation dans la direction du jet ou du front (*cf* 1.4.1).

L'analyse des observations a permis de confirmer l'importance du jet troposphérique comme source d'ondes, et d'isoler un événement d'émission d'ondes par ajustement géostrophique au niveau du jet troposphérique. Cette étude de cas complète l'approche théorique, et indique de nouvelles directions de recherche pour la suite (*cf* 1.4.2).

1.4.1 Approches théoriques de l'ajustement géostrophique nonlinéaire d'anomalies frontales

Les situations frontales, et notamment la frontogénèse, ont été abondamment étudiées en supposant que l'écoulement ne varie pas dans une direction, et à l'aide d'approximations telles la semi-géostrophie qui excluent les mouvements rapides (par ex. [HB72]). Nous proposons d'étudier dans ce cadre et analytiquement l'ajustement d'une condition initiale arbitraire sans exclure la partie rapide de l'écoulement. Nous nous intéresserons tout particulièrement aux points suivants : comment séparer l'écoulement en une partie rapide et une partie lente, quels effets la partie lente et la partie rapide peuvent-elles avoir l'une sur l'autre, et dans quelle mesure la dynamique de la partie rapide peut amener des modifications au scénario classique d'ajustement.

Pour des modèles sans variation dans une direction horizontale, il est important de noter que les états géostrophiques sont des solutions exactes et

⁵Nous désignerons ainsi des anomalies ayant de forts gradients dans une direction et de faibles variations dans l'autre, que ce soit pour le champ de température potentielle ou pour d'autres variables.

stationnaires des équations complètes. Ce fait est utilisé pleinement dans la description lagrangienne du mouvement, qui se révèle très avantageuse. Elle fournit notamment une réponse non-ambigüe à la question de la séparation de l'écoulement en parties lente (stationnaire) et rapide.

Une hiérarchie de modèles de complexité croissante est considérée :

Eau peu profonde à une couche Ce modèle contient la rotation et la gravité, mais pas la stratification (chapitre 2). Il est démontré que la partie lente est bien définie pour des perturbations localisées et une vorticité potentielle partout positive. L'étude de la partie rapide montre que les ondes linéaires autour d'un état ajust e se dispersent (il n'y a pas de modes pi eg es), mais que cette dispersion peut être modifiée par la présence du jet ajust e. Les autres éléments de la dynamique rapide du fluide sont également  etudi es : les ondes non-linéaires [Shr81, Shr86] d'une part, et le déferlement d'ondes (la formation de chocs) d'autre part.

Eau peu profonde à deux couches Cette représentation rudimentaire de la stratification introduit deux phénomènes nouveaux par rapport à la dynamique du modèle à une couche (chapitre 3). Premièrement, des modes oscillants à des fréquences subinertielles peuvent exister, pi eg es dans les régions anticycloniques. Pour des vorticités relatives suffisamment négatives, certains de ces modes deviennent instables, indiquant la possibilité d'instabilité symétrique (absente du modèle à une couche).

L'existence d'ondes périodiques d'amplitude finie qui sont des solutions exactes des équations a été démontrée. Selon les régimes de paramètres, leur comportement peut être analogue à celui des ondes nonlinéaires du modèle à une couche, ou au contraire très diff erent.

Fluide continûment stratifié Ce modèle est plus réaliste, mais aussi considérablement plus complexe (chapitre 4). Dans le cas général, il est montré que la partie lente, si elle existe, est solution d'une équation de Monge-Ampère elliptique. Un des avantages de la description lagrangienne de l'écoulement est qu'elle permet de d ecrir et l'état ajust e et le processus de l'ajustement.

La dynamique de petites perturbations autour d'un état ajust e est examinée, et détaillée dans le cas d'un jet barotrope. Comme dans le modèle à deux couches, des ondes subinertielles [Kun85] peuvent être piégées dans la région anticyclonique, ces modes devenant instables si la vorticité relative est inférieure à $-f$. Les effets nonlinéaires de ces modes pi eg es sont examin es : ils ne modifient pas l'équation décrivant l'évolution de la partie lente, mais ils ont en revanche une signature d'ordre 2 sur la valeur des champs moyenn es dans le temps. Enfin, la propagation verticale d'un paquet d'ondes subinertielles dans la région anticyclonique d'un jet variant lentement sur la verticale est analysée à l'aide d'une approche WKB, indiquant la possibilité de niveaux 'critiques' où ces ondes se dissipent.

Les résultats obtenus dans ces études théoriques montrent quelles limitations ou modifications il faut apporter au scénario classique d'ajustement géostrophique. Ils aident également à comprendre la séparation de l'écoule-

ment en parties lente et rapide (notamment les limitations de l'inversion de la PV), et la dynamique de la partie rapide dans ces modèles (notamment l'effet de régions anticycloniques sur les ondes).

1.4.2 Observations d'ondes émises par un jet troposphérique

Les données obtenues lors de la campagne internationale d'observation FASTEX (Fronts and Atlantic Stormtracks Experiment [JJS⁺97, JBB⁺99]) sont utilisées pour étudier le jet comme source d'ondes d'inertie-gravité (chapitre 5). Cette étude, qui est encore en cours, confirme le rôle du jet comme source principale au-dessus de l'Atlantique. L'analyse détaillée d'un événement précis d'émission d'ondes par ajustement géostrophique montre que ce processus est, parmi les mécanismes pouvant générer des ondes au niveau du jet, un mécanisme important, notamment pour les ondes de basse fréquence et de grande échelle.

1.5 Emission d'ondes par des mouvements vorticaux non-stationnaires

L'étude analytique de l'ajustement géostrophique se plaçait dans un cadre (pas de variation dans une direction) où les solutions géostrophiques étaient des solutions exactes et stationnaires. En général cependant, les mouvements vorticaux sont non-stationnaires, ce qui fait qu'ils peuvent exciter des ondes. Ce mécanisme d'interaction entre la composante vorticale et les ondes est appelé émission spontanée ou émission de Lighthill. Elle a été étudiée dans le modèle de l'eau peu profonde [For94], et a des conséquences fondamentales pour la notion de variété lente [FMN00].

Nous calculons explicitement (chapitre 6) l'émission d'ondes internes de gravité par un vortex non-stationnaire, décrivons l'effet sur le vortex de cette émission, et discutons des limitations imposées par cette émission au concept de variété lente.

Chapitre 2

Ajustement frontal dans le modèle de l'eau peu profonde

*'Le moins que l'on puisse demander à une statue
c'est qu'elle ne bouge pas.'*
Salvador Dali.

L'ajustement d'anomalies frontales est analysé ici analytiquement dans le modèle de l'eau peu profonde en faisant l'approximation que l'écoulement est unidirectionnel (pas de variation dans une direction). Le modèle de l'eau peu profonde unidimensionnel (RSW1D) est attrayant parce qu'il contient les éléments essentiels de la dynamique qui nous intéresse (la rotation et la gravité, des états géostrophiques et des ondes) mais qu'il est assez simple pour permettre d'avancer analytiquement et d'apporter des réponses claires à certaines questions fondamentales : notamment, comme les états géostrophiques sont des solutions stationnaires des équations complètes, il est possible d'obtenir une séparation exacte de l'écoulement en une partie lente (stationnaire) et une partie rapide¹.

Un bref historique des études sur l'ajustement géostrophique dans ce modèle est présenté en section 2.1. La description lagrangienne de l'écoulement et ses avantages, notamment pour la séparation de l'écoulement en parties lente et rapide, sont présentés en section 2.2. L'article *'Frontal geostrophic adjustment, slow manifold and nonlinear phenomena in one-dimensional rotating shallow water'* est inclus, ainsi que quelques explications et illustrations complémentaires en section 2.3. La séparation lagrangienne de l'écoulement en parties rapide et lente permet de mieux comprendre les limites de l'inversion de la vortacité potentielle, souvent utilisée dans ce but. Ce point important est discuté en section 2.4. Enfin, les limitations de ce travail et les perspectives qu'il ouvre ou suggère sont présentées en 2.5.

¹Ceci est vrai aussi des écoulements axisymétriques ; l'ajustement géostrophique de vortex axisymétriques dans des fluides stratifiés a été également étudié (voir par exemple [SHDF80, McW88, KP00]). Nous donnons dans l'annexe B de l'article inséré en 2.3 la description lagrangienne d'écoulements axisymétriques dans le modèle de l'eau peu profonde ; elle a les mêmes avantages que pour les écoulements rectilignes.

2.1 Historique

2.1.1 Le problème classique d'ajustement considéré par Rossby

Rossby a été le premier [Ros38] à analyser le problème de l'ajustement d'une condition initiale hors équilibre vers l'équilibre géostrophique. Son but était de mieux comprendre comment se répercute dans l'océan le forçage par le vent d'un courant en surface. Il considère pour cela une hiérarchie de modèles, dont le plus simple est le modèle de l'eau peu profonde unidimensionnel. Partant d'une situation initiale où le vent a mis en mouvement uniforme une bande de fluide, sans en perturber la hauteur, il détermine l'état final ajusté à l'aide des conservations de la masse et du moment géostrophique². Il ne décrit pas le processus d'ajustement lui-même, et ne montre pas que l'état final déterminé diagnostiquement est atteint. Enfin, notons que l'équation donnant cet état final est nonlinéaire, et qu'il peut la résoudre grâce à la simplicité des conditions initiales qu'il a choisies (*cf* aussi [Mih63] pour une solution exacte).

Plusieurs résultats importants ressortent du travail de Rossby :

- **le rayon de déformation** : défini par

$$\lambda = \frac{\sqrt{gH}}{f}, \quad (2.1)$$

c'est l'échelle de longueur pour laquelle les effets de la rotation et les effets de la gravité sont de même ordre. Par exemple, de part et d'autre du courant final s'établissent des contre-courants, qui décroissent exponentiellement avec la distance. L'échelle caractéristique de cette décroissance est précisément ce rayon de déformation.

- **la partition de l'énergie** : l'état final contient, sous forme d'énergie cinétique et potentielle, moins d'énergie que l'état initial, la différence étant emportée par les ondes émises lors de l'ajustement. De plus cette différence est beaucoup plus importante dans le cas d'un fluide barocline que pour un fluide barotrope.
- **le temps d'ajustement** : Rossby n'a pas considéré en détail l'évolution du fluide vers l'état ajusté ; qualitativement, il suggère que l'ajustement se fait sur une échelle de temps de l'ordre de f^{-1} .

L'étude de Rossby introduit le scénario qualitatif classique de l'ajustement : une anomalie hors équilibre géostrophique s'ajuste *vers l'état géostrophique correspondant* (conservant la masse, le moment géostrophique), *en peu de temps* (de l'ordre de la période inertielle), *en émettant des ondes*. Cette étude laisse cependant ouvertes certaines questions, d'une part parce que Rossby n'a considéré qu'une condition initiale particulière, et d'autre part parce qu'il n'a pas considéré l'évolution du fluide, mais seulement ses états initial et 'final' :

1. l'état final est-il toujours bien défini (existence, unicité) à partir de la condition initiale ?
2. cet état final prédit diagnostiquement est-il réellement atteint, et si oui, comment (échelle de temps, décroissance de la partie rapide) ? Si

²Le moment géostrophique $M = v + fx$ est l'équivalent, dans les situations rectilignes que nous considérons, du moment angulaire dans les situations axisymétriques. Il est conservé par les particules au cours de leur mouvement.

l'état prédit diagnostiquement n'est pas atteint, quelle est l'évolution du fluide, qu'est-ce qui dans la partie rapide de l'écoulement empêche cet état d'être atteint ?

2.1.2 Approches linéaire et faiblement nonlinéaire

Obukhov [Obu49] a traité le problème de l'ajustement linéaire de conditions initiales arbitraires (voir aussi Gill [Gil82]) : comme indiqué en introduction, la vorticité potentielle est conservée en chaque point. Les ondes les plus rapides (les plus courtes) s'éloignent avec une vitesse de groupe \sqrt{gH} , tandis que les ondes de fréquence proche de f (grandes longueurs d'ondes) se dispersent lentement (*cf* par exemple [Was64]). La dispersion linéaire d'un paquet d'ondes [Lig78] prédit que l'amplitude des ondes diminuera selon une loi en $t^{-1/2}$.

Blumen [Blu67, BW69, Blu72] a abordé le problème d'ajustement par une approche faiblement nonlinéaire, décrivant les premières corrections à la solution linéaire. La partie ajustée de l'écoulement est ainsi mieux décrite (on commence à tenir compte de l'advection), mais ces corrections nonlinéaires ne modifient pas la dispersion des ondes, toujours en $t^{-1/2}$.

2.1.3 Simulations numériques de l'ajustement géostrophique nonlinéaire

Les études mentionnées ont détaillé de nombreux aspects du problème de Rossby, mais seulement dans le cadre linéaire [Was64, Gil76], au mieux dans un cadre faiblement nonlinéaire [Blu67, BW69]. Les effets fortement nonlinéaires sur la partie rapide de l'écoulement n'ont pas été étudiés en détail : notamment, les chocs existent dans ce modèle (la dispersion due à la rotation n'inhibe pas leur formation [Hou69]), mais ont peu été étudiés. La dispersion des ondes n'a pas été étudiée au-delà de l'approximation faiblement non-linéaire sur fond de fluide au repos.

Pour étudier l'ajustement plus en détail dans des régimes véritablement nonlinéaires, Kuo & Polvani ont procédé à des simulations numériques en attachant un soin particulier à la description des chocs. Dans un premier article [KP97], ils étudient le problème d'ajustement d'une marche initiale de hauteur (*cf* [Gil82]). Les chocs se révèlent fréquents mais ne modifient pas le scénario d'ajustement. Des intégrations longues leur permettent de considérer le problème du temps d'ajustement, et les auteurs suggèrent que ce temps est difficile à définir et dépendra de la définition choisie et du champ observé. Notamment, il apparaît dans leurs figures que les oscillations persistent plus longtemps sur les champs de vitesse que sur le champ de hauteur, ce qui correspond à la persistance d'ondes proches de la fréquence inertielle (les oscillations inertielles n'ont pas de signature sur la hauteur). Kuo & Polvani, toutefois, n'ont pas cherché à comparer la décroissance des ondes dans leurs simulations à une loi classique en $t^{-1/2}$. Dans un second article, ils utilisent le même modèle pour analyser les interactions ondes-vortex. Le point clé est ici la séparation de l'écoulement en ondes et vortex ; nous y reviendrons (section 2.4) après la présentation des résultats obtenus grâce à l'approche lagrangienne des équations.

2.2 La description lagrangienne et ses avantages

Les études citées ci-dessus se placent pour l'essentiel dans un cadre eulérien. L'approche lagrangienne a été utilisée pour déterminer diagnostiquement des états finals³ en fonction des conditions initiales, mais elle n'a pas été utilisée pour décrire l'ensemble de la dynamique du système⁴. Nous décrivons cette approche et montrons qu'elle se révèle très fructueuse, notamment pour séparer les ondes et la composante lente de l'écoulement. Avant d'introduire le formalisme lagrangien, cependant, il est utile de faire un détour par la formulation eulérienne perturbative, pour bien comprendre en quoi la décomposition de l'écoulement y est ambiguë pour les situations qui nous intéressent.

2.2.1 L'ambiguïté de l'approche eulérienne

Les équations eulériennes pour un écoulement sans variation dans la direction y dans le modèle de l'eau peu profondes sont :

$$\partial_t u + u \partial_x u - f v + g \partial_x h = 0, \quad (2.2a)$$

$$\partial_t v + u \partial_x v + f u = 0, \quad (2.2b)$$

$$\partial_t h + \partial_x (u h) = 0. \quad (2.2c)$$

Les états géostrophiques sont stationnaires et solutions exactes. La vitesse transverse u est exclusivement associée à la partie rapide de l'écoulement : elle est absente des états ajustés et elle ne contribue pas à la vorticité potentielle (PV) :

$$q = \frac{f + \partial_x v}{h}. \quad (2.3)$$

Considérons l'ajustement de conditions initiales h_I , v_I , u_I proches de l'équilibre géostrophique, avec $u_I \ll v_I$. Le rapport $\delta \ll 1$ entre les vitesses transverses et parallèles au front fournit un petit paramètre qui permet d'effectuer une approche perturbative.

Sans détailler celle-ci, nous obtenons à l'ordre dominant des termes lents (h_0, v_0) , en équilibre géostrophique ($f v_0 = g \partial_x h_0$). À l'ordre suivant nous avons des corrections lentes en équilibre géostrophique, et des ondes dont la structure est modulée par la présence de l'écoulement géostrophique (h_0, v_0) .

Maintenant, comment initialiser à partir des conditions initiales h_I , v_I et u_I , comment séparer les ondes de la partie ajustée ? Il est souhaitable d'isoler la partie lente dans les termes (h_0, v_0) , de façon à ce que (h_1, v_1, u_0) ne décrivent que des ondes. Ceci ne sera pas vérifié si l'on initialise naïvement en prenant $h_0 = h_I$, et en déduisant v_0 , ou si l'on choisit $v_0 = v_I$, dont on déduirait h_0 . Ces initialisations sont arbitraires et ne séparent pas l'écoulement en parties lentes et rapides.

Une autre possibilité enfin est de choisir h_0 de manière à ce qu'il soit reponsable de la totalité de la vorticité potentielle initiale, c'est-à-dire obtenir

³L'état obtenu diagnostiquement ainsi est proposé comme état final, mais il n'est pas montré, en dehors des approximations linéaire et faiblement nonlinéaire, que le fluide aille effectivement vers cet état.

⁴Bühler, dans son travail non publié [B93] a considéré cette approche pour analyser les ondes nonlinéaires de ce modèle; nous avons eu connaissance de son travail alors que le notre était en cours.

h_0 par inversion de la vorticité potentielle. Les ondes ont cependant une signature d'ordre 1 sur la vorticité potentielle à cause de l'advection, ce qui fait de la vorticité potentielle, dans la description eulérienne, une variable rapide. Ainsi, la séparation basée sur l'inversion de la distribution eulérienne de PV n'est elle pas non plus satisfaisante, comme nous le redétaillerons dans la section 2.4.

2.2.2 La description lagrangienne

Nous allons dériver ci-dessous les équations en variables lagrangiennes, montrer quels sont les avantages de ce formalisme, et résumer brièvement les résultats obtenus dans l'article '*1d rotating shallow water : nonlinear semi-geostrophic adjustment, slow manifold and nonlinear wave phenomena*' [ZMP02] présenté en section 2.3.

Notations

On note $X(x, t)$ l'abscisse à l'instant t de la particule⁵ qui à l'instant initial était en x . Les fonctions $h(x, t)$ et $v(x, t)$ désignent respectivement la hauteur et la vitesse dans la direction y , à l'instant t , de la particule qui à l'instant initial avait pour abscisse x . La vitesse transversale est donc $u(x, t) = \partial_t X(x, t) = \dot{X}(x, t)$, le point étant utilisé pour désigner la dérivée temporelle des variables lagrangiennes. La dérivation par rapport à la variable spatiale sera souvent indiquée par un prime : $\partial_x X(x, t) = X'(x, t)$.

Une autre 'étiquette lagrangienne', a , sera introduite dans l'article. Elle permet de simplifier encore les équations, mais sa signification n'est pas aussi simple que x , position initiale des particules.

L'équation lagrangienne du mouvement

Les équations (2.2a)-(2.2b) pour les vitesses horizontales deviennent en coordonnées lagrangiennes :

$$\ddot{X} - fv + g\partial_X h = 0, \quad (2.4a)$$

$$\dot{v} + f\dot{X} = 0. \quad (2.4b)$$

L'équation (2.4b) décrit la conservation du moment géostrophique $v + fX$:

$$v + fX = v_I + fx. \quad (2.5)$$

Cette conservation permet de remplacer v dans la première équation. Par ailleurs, la conservation de la masse va nous permettre d'exprimer la dérivée selon X de la hauteur en fonction de dérivées selon x de la variable X . La conservation de la masse d'une colonne de fluide s'écrit :

$$h(x, t) dX = h_I(x) dx, \quad \text{d'où} \quad X' = \frac{h_I}{h}. \quad (2.6)$$

⁵Il s'agit en fait de colonnes de fluide parallèles à l'axe des y . Pour simplifier, nous les désignons simplement par le terme 'particules'.

On déduit de cette équation une expression de la dérivée $\partial_X h$ ne faisant intervenir que X :

$$\partial_X h = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_I}{X'} \right) = \frac{1}{X'} \partial_x \left(\frac{h_I}{X'} \right). \quad (2.7)$$

Nous obtenons donc une équation unique pour la variable X :

$$\ddot{X} + f^2 X + \frac{1}{X'} \left(\frac{h_I}{X'} \right)' = f(v_I + f x). \quad (2.8)$$

Cette équation a de nombreux avantages sur la forme eulérienne des équations :

1. Toute la dynamique du système est contenue dans une seule équation pour une variable, X . Les autres variables, v et h , se déduisent par (2.5) et (2.6) respectivement.
2. La séparation entre une composante lente et une composante rapide est simple et sans ambiguïté : la composante lente correspond à la solution stationnaire de 2.8,

$$f^2 X + \frac{1}{X'} \left(\frac{h_I}{X'} \right)' = f(v_I + f x), \quad (2.9)$$

et la composante rapide de l'écoulement correspond au reste.

Cette dernière remarque peut se formuler différemment : la partie lente d'un écoulement est donc l'état stationnaire à l'équilibre géostrophique qui a les mêmes distributions lagrangiennes de PV et de moment géostrophique que l'état initial ; c'est l'état prédit par les études diagnostiques de l'ajustement géostrophique. Il apparaît naturellement dans la description lagrangienne de l'écoulement, mais n'apparaît pas dans la description eulérienne.

2.2.3 Résumé des principaux résultats

- Pour un état ayant une vorticité potentielle partout positive, dont la dérivée est à support compact, et pour lequel les asymptotiques de la hauteur sont connues en $\pm\infty$, il existe un unique état ajusté correspondant aux conditions initiales (*cf* section 5 de l'article).
- La présence d'un jet intense modifie la structure des ondes, et peut changer leur dispersion : il est possible d'avoir des 'modes quasi-stationnaires' (analogie avec, en mécanique quantique, des modes s'échappant lentement par effet tunnel d'un minimum local de potentiel (*cf* section 5 de l'article, et 2.3.1 ci-dessous)). En revanche, les modes piégés (onde qui aurait une structure spatiale fixe et localisée) sont exclus.
- le formalisme lagrangien permet de retrouver les ondes nonlinéaires qui sont des solutions exactes du modèle RSW1D ([Shr81, Shr86, B93], section 6 de l'article). Ces ondes seront une des différences importantes entre l'ajustement dans un domaine périodique et dans un domaine infini.
- Un critère semi-quantitatif pour l'apparition des chocs est obtenu (section 7 de l'article, et 2.3.1 ci-dessous). Il importe de comprendre où les chocs se forment car la dissipation qu'ils induisent est locale et donc

inhomogène. Notre critère indique que l'apparition de chocs est favorisée le long de caractéristiques provenant de régions de forts gradients de h ou traversant des régions anticycloniques.

2.3 *'Frontal geostrophic adjustment, slow manifold and non-linear phenomena in one-dimensional rotating shallow water'*

Frontal geostrophic adjustment, slow manifold and nonlinear wave phenomena in one-dimensional rotating shallow water

V. Zeitlin ‡*, S.B. Medvedev † and R. Plougonven ‡
 †Institute of Computational Technologies,
 6 Lavrentiev av., 630090 Novosibirsk, Russia
 ‡LMD, Ecole Normale Supérieure,
 24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

submitted to *Journal of Fluid Mechanics*

Abstract

The problem of nonlinear adjustment of localized front-like perturbations to a state of geostrophic equilibrium (balanced state) is studied in the framework of rotating shallow-water equations with no dependence on the along-front coordinate. We work in Lagrangian coordinates which turns out to be conceptually and technically advantageous. First, a perturbation approach in the cross-front Rossby number is developed and splitting of the flow into slow and fast components is demonstrated for non-negative potential vorticities. We then give a nonperturbative proof of existence and uniqueness of the adjusted state, again for configurations with non-negative initial potential vorticities. We prove that wave-trapping is impossible within this adjusted state and, hence, adjustment is always complete for small enough departures from balance. However, we show that retarded adjustment occurs if the adjusted state admits quasi-stationary states decaying via tunneling across a potential barrier. Description of finite-amplitude periodic non-linear waves known to exist in configurations with constant potential vorticity in this model is given in terms of Lagrangian variables. Finally, shock formation is analysed and semi-quantitative criteria based on the values of initial gradients and relative vorticity of initial states are established for wave-breaking showing, again, essential differences between the regions of positive and negative vorticity.

*corresponding author: zeitlin@lmd.ens.fr

Zeitlin, Medvedev & Plougonven – 1d RSW.

2

1 Introduction

The main motivation for the present study is the problem of geostrophic adjustment. Indeed, what is called below the one-dimensional rotating shallow water (1dRSW), i.e. the standard shallow water model on a rotating plane (2dRSW)¹ where the dynamical variables do not depend on one of the spatial coordinates, is the simplest possible model for studying this phenomenon. As such, it was first used in the pioneering work by Rossby (1938) (cf. also Gill (1982)).

Geostrophic adjustment is a process of relaxation of an arbitrary initial perturbation to a corresponding state of geostrophic equilibrium, i.e. the equilibrium between the pressure force and the Coriolis force. The standard scenario of adjustment established in the classical works of Rossby (1938) and Obukhov (1949) (see Blumen (1972) for a review of subsequent work) consists of initial disturbance emitting fast inertia-gravity waves and tending to a slow-evolving geostrophically balanced flow which bears the whole of the initial potential vorticity (PV). The adjustment process, thus, provides a basis for *splitting* of the flow into fast and slow components which is essential for meteorological and oceanographic applications. For example, in weather prediction it allows, after proper initialization, to filter fast waves, insignificant for most of synoptic purposes, and to follow only the slow vortical component of motion. In practice it is, of course, done in more sophisticated models than RSW. However, this latter was historically the first one used for this purpose.

The height perturbation defining completely the *geostrophic* PV, the essentially 1d approach of Rossby's (1938) was to use the pointwise conservation of PV in order to write a differential equation for the height distribution of the final state which is presumed to be completely adjusted starting from the PV of the initial state. All intermediate stages of the adjustment process are, thus, omitted as only the initial and the final states are considered. Obukhov's (1949) approach was a thorough treatment of the problem in the linear approximation (valid for vanishing Rossby numbers) in 2d, wave emission included.

The *nonlinear* geostrophic adjustment of single-scale vortex-like disturbances in 2dRSW was recently studied in detail by Reznik, Zeitlin & Ben Jelloul (2001) by means of the multi time-scale perturbation theory in Rossby number. Both slow and fast components of motion were completely resolved in the first three orders of the perturbation theory. Although the classical scenario of adjustment and fast-slow splitting were, generally, confirmed, it was also demonstrated that large-scale large-amplitude initial perturbations contain near-inertial oscillations which stay coupled to the slow vortical component of the flow for a long time and, thus 'retard' the adjustment process with respect to the standard scenario of fast inertia-gravity waves emission.

Some important questions remain open in what concerns the fully nonlinear geostrophic adjustment. First of all, it is the question of existence and uniqueness of the balanced state or, more generally, the question of the slow manifold – a key problem in geophysical fluid dynamics (see, e.g. Leith, 1980 and, for

¹as usual in geophysical applications, the centrifugal force will be neglected and molecular dissipation will be absent in what follows

a recent discussion, Ford, McIntyre & Norton, 2000). Second, if it exists, is the balanced state always attainable? And, if yes, what is the characteristic relaxation time? (It was argued by Rossby (1938) that the adjustment process is very fast.) A related question is whether adjustment is always complete? (One may think, for instance, of possible trapped-wave modes in the interior of the balanced vortex core.) Finally, what is the influence of essentially nonlinear wave effects, such as wave-breaking, on adjustment? (The PV is not conserved anymore if wave-breaking takes place.)

In spite of its evident degeneracy, the 1dRSW model still contains all essential dynamical ingredients of the adjustment process: fast inertia-gravity waves and 'vortices', which become transverse jets in this context. The PV is conserved and the states of geostrophic equilibrium are stationary solutions of the equations of motion ('slow manifold'). Being, however, essentially simpler than the full 2dRSW it allows to go further both analytically and numerically in trying to answer the above-posed questions. Note that adjustment in 1dRSW model is, properly speaking, semi-geostrophic (cf. e.g. Pedlosky (1984)) as it is the adjustment of fronts and jets which takes place in one (cross-front) spatial direction. Recently a study of the full nonlinear adjustment problem in the 1dRSW was undertaken numerically by Kuo & Polvani (1997) who analysed the relaxation of the stepwise perturbation of the surface elevation and demonstrated formation of secondary shocks. Nevertheless, a good agreement of the final configuration with Rossby's scenario was found. The same authors (Kuo & Polvani, 1999) considered non-linear wave-vortex (jet) interactions, again in the framework of 1dRSW, by studying scattering of wave-trains on jets and found by numerical simulations supported by asymptotic analysis a re-adjustment of jets to their initial form, while shock-formation by strong height perturbations was again observed. It should be noted in this context that the fully nonlinear geostrophic adjustment problem rejoins a general fluid dynamics problem of the influence of rotation on shock formation and propagation.

The aim of the present paper is to fully exploit the simplicity of the 1dRSW model by using analytic tools and to give definite answers to some of the above-mentioned questions as well as interpret the existing numerical results. The key ingredient of our approach is the use Lagrangian variables which proves to be crucial. The plan of the paper is as follows. After a brief discussion of the model in Sect. 2 we introduce Lagrangian variables in Sect. 3 and show that 1dRSW may be reduced to a single second-order PDE well-adapted for studying the initial-value (= adjustment) problem. We present then in Sect. 4 a perturbative approach to adjustment in these variables and prove the absence of trapped modes. The existence and uniqueness theorem for the nonperturbative balanced state in the case of non-negative initial PV is then proven in Sect. 5 and the relaxation of arbitrary initial perturbations to this adjusted state is discussed. We analyse nonlinear periodic waves in 1dRSW (Shrira, 1981, 1986; Grimshaw *et al*, 1998) in the Lagrangian framework (Bühler, 1993) in Sect. 6. Finally, by using the Lax method (Lax, 1973; Engelberg, 1996) we study conditions of the shock formation in the presence of rotation in Sect. 7. Sect. 8 contains conclusions and discussion. We present a proof of existence and

Zeitlin, Medvedev & Plougonven – 1d RSW.

4

uniqueness of the adjusted state (=slow manifold) in Appendix A. In Appendix B we give another one-dimensional version of RSW equations which corresponds to axisymmetric flows and may be useful in applications.

2 General features of the model

Shallow water equations on the rotating plane with no dependence on one of the coordinates (y) are :

$$\begin{aligned} \partial_t u + u\partial_x u - fv + g\partial_x h &= 0 \\ \partial_t v + u\partial_x v + fu &= 0 \\ \partial_t h + u\partial_x h + h\partial_x u &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Here u, v are the two components of the horizontal velocity, h is the total fluid's depth (no topographic effects will be considered), f is the (constant) Coriolis parameter and g is acceleration due to gravity. Here and below $\partial_t, \partial_x, \dots$ denote partial derivatives with respect to corresponding arguments and ∂_{xx}^2 etc denote the second derivatives. Physically the model represents the classical 1d shallow water (cf. e.g. Witham, 1974) with a transverse flow added, all under the influence of the Coriolis force. Due to the presence of the transverse jets the dynamics is not purely one-dimensional, but rather 'one-and-a-half' dimensional. In what follows we are mainly interested in the behaviour of localized jets (localized distributions of $v(x)$) and/or fronts (localized distributions of $\partial_x h(x)$). Hence, the front/jet stretches along the y axis and we will often call u the cross-front velocity. In general, we will call a configuration front-like if $u, v, \partial_x h$ have a common compact support in x .

The model possesses two Lagrangian invariants: the generalized momentum $M = v + fx$ and the potential vorticity (PV) $Q = (\partial_x v + f)/h$.

$$(\partial_t + u\partial_x)M = 0, \quad (\partial_t + u\partial_x)Q = 0. \quad (2)$$

Linearization around the rest state $h = H$ gives a zero-frequency mode and surface inertia - gravity waves with the standard dispersion law:

$$\omega = \pm(c_0^2 k^2 + f^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

Here $c_0 = \sqrt{gH}$, ω is the wave-frequency and k is the wavenumber. As usual, one may evoke a parallel between the shallow-water dynamics and gas dynamics (modified by rotation), so c_0 is analogous to the sound speed.

The steady states corresponding to the zero mode are the geostrophic equilibria:

$$fv = g\partial_x h, \quad u = 0 \quad (4)$$

which are the exact stationary solutions (note this important difference with 2dRSW, where they are not). Hence, in the state of geostrophic equilibrium

Zeitlin, Medvedev & Plougonven – 1d RSW.

5

velocity is entirely determined by the height perturbation and the geostrophic PV is

$$Q^{(g)} = \left(\frac{f + \frac{g}{f} \partial_{xx}^2 h}{h} \right). \quad (5)$$

Note that a geostrophically adjusted front correspond to a stepwise h with a jet in v given by (4). In what follows we will mostly limit ourselves by finite-energy localized front-like configurations as initial conditions for (1), thus excluding ‘non-adjustable’ infinite-energy (cf. (4)) configurations like, for instance, a constant shear $v \sim x$.

3 Lagrangian approach to 1d RSW

As will be seen below, it is physically more transparent and technically advantageous to use the Lagrangian version of (1). For this purpose we introduce coordinates of the Lagrangian ‘quasi-particles’² $X(x, t)$ via the mapping $x \rightarrow X(x, t)$, where x (Lagrangian label) is a quasi-particle’s position at $t = 0$ and X - its position at time t . From the Eulerian point of view X are just the Eulerian coordinates, but we use the notation x for Lagrangian labels as the standard notation a is reserved for another purpose - see below. Hence $\dot{X} = u(X, t)$ and the overdot will denote the (material) time-derivative from now on while the prime (e.g. $X' = \partial_x X$) will be used for differentiation with respect to x for compactness. The two first (momentum) equations of (1) are then rewritten as

$$\begin{aligned} \ddot{X} - fv + g\partial_X h &= 0, \\ \dot{v} + f\dot{X} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

where v is considered as a function of x and t . By virtue of mass conservation h evolves from its initial distribution $h_I(x)$ on via the Jacobi transformation

$$h(X, t) = h_I(x) \partial_X x. \quad (7)$$

By differentiating this equation (or, rather, the corresponding equation for h^{-1}) in time it is easy to check that it is equivalent to the continuity equation

$$\dot{h} + h\partial_X \dot{X} = 0. \quad (8)$$

The second of the equations (6) may be immediately integrated giving

$$v(x, t) + fX(x, t) = F(x), \quad (9)$$

where $F(x)$ is an arbitrary function to be determined from the initial conditions. If $v_I(x)$ is an initial distribution of the transverse velocity then

$$F(x) = fx + v_I(x). \quad (10)$$

²in fact, real Lagrangian particles are moving both in x and in y directions in the model; we introduce quasi-particles: strings moving only in x

Zeitlin, Medvedev & Plougonven – 1d RSW.

6

By applying the chain differentiation rule to (7) we may express the partial derivative ∂_X as follows

$$\partial_X h = \partial_X (h_I(x) \partial_X X) = h'_I \frac{1}{(X')^2} - h_I(x) \frac{X''}{(X')^3}, \quad (11)$$

and, thus, get a closed equation for X :

$$\ddot{X} + f^2 X + gh'_I \frac{1}{(X')^2} + \frac{gh_I}{2} \left[\frac{1}{(X')^2} \right]' = fF. \quad (12)$$

It is more convenient to rewrite this equation in terms of the deviations of quasi-particles from their initial positions $X(x, t) = x + \phi(x, t)$:

$$\ddot{\phi} + f^2 \phi + gh'_I \frac{1}{(1 + \phi')^2} + \frac{gh_I}{2} \left[\frac{1}{(1 + \phi')^2} \right]' = fv_I. \quad (13)$$

This equation is to be solved with initial conditions $\phi(x, 0) = 0$; $\dot{\phi}(x, 0) = u_I(x)$, where u_I is the initial distribution of longitudinal velocity. The case of a front-like disturbance corresponds to h'_I, u_I, v_I with a common compact support.

It is clear from its form that equation (13) is well-suited for studies of the Cauchy problem in 1d RSW which is equivalent to the nonlinear geostrophic adjustment problem. An example of low-resolution calculation using the standard MATHEMATICA routine NDSolve is presented on figure 1 giving a coarse-grained picture of adjustment.

Note that in the absence of rotation, $f = 0$, the nonlinear equation (12) contains only derivatives of X and not X itself and may be reduced to a linear problem (i.e. completely integrated) by the hodograph method using \dot{X}, X' or, equivalently u, h as new variables and swapping dependent and independent variables: $x = x(u, h)$, $t = t(u, h)$. A linear PDE for x then results - cf e.g. Landau and Lifshitz (1975). The presence of rotation makes the hodograph transformation ineffective.

4 Perturbative semigeostrophic adjustment

We start our study of (13) with a straightforward perturbation analysis by noting that if the initial conditions v_I and h_I are in geostrophic balance

$$gh'_I = fv_I, \quad (14)$$

then $\phi = 0$ is an exact solution of (13). Therefore, for small deviations from the exact geostrophy eq. (13) may be linearized and solved perturbatively. A necessary condition for this is smallness of the initial imbalance $A_I = fv_I - gh'_I$ which will be supposed throughout this section. It is easy to show that this condition is equivalent to the smallness of the (cross-front) Rossby number

$$Ro = \frac{U}{fL}, \quad (15)$$

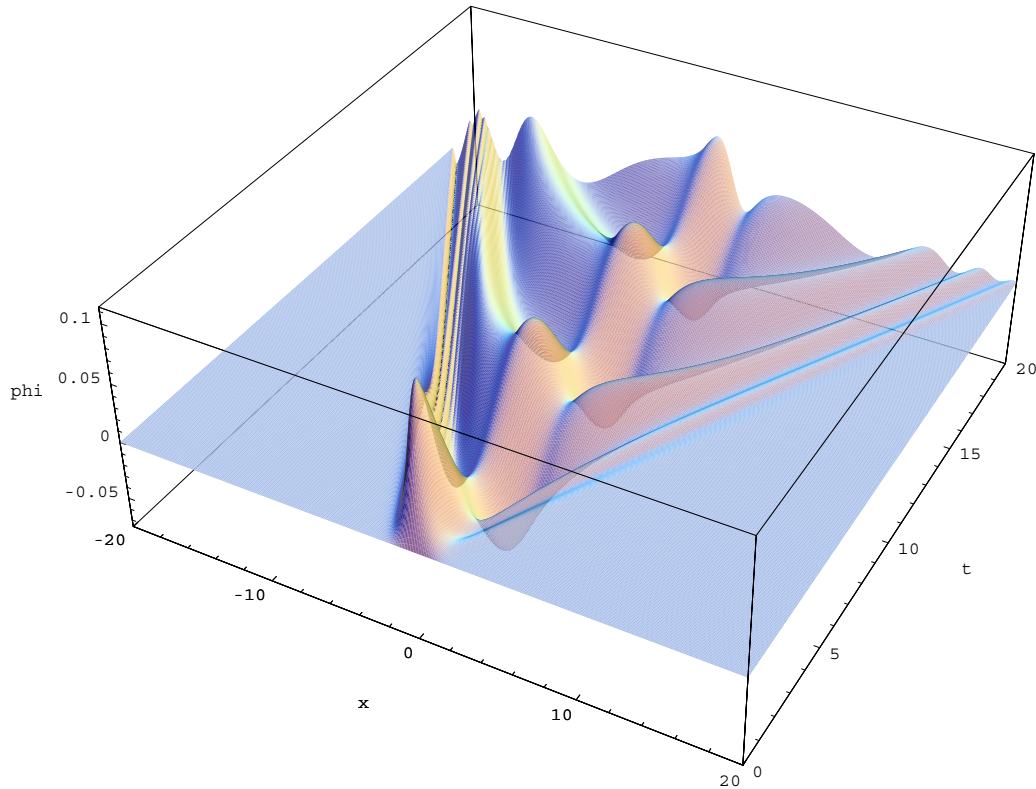


Figure 1: Geostrophic adjustment of the double-jet configuration (chosen for technical reasons of spatial periodicity) with Gaussian profile of initial elevation: $h_I(x) = 1 + e^{-x^2}$ and slightly imbalanced $v_I(x) = -2(x + 0.2 \sin(x)) e^{-x^2}$ and $u_I(x) = 0.1e^{-x^2}$, as obtained by straightforward numerical integration of equation (13) using the standard MATHEMATICA routine NDSolve. Time and initial positions of Lagrangian particles are along the horizontal axes, the particle displacement ϕ is along the vertical axis. Emitted fast gravity waves and slowly dispersing quasi-inertial oscillations are clearly seen, as well as systematic displacements of fluid particles necessary to reach the final adjusted state. At least one shock forms and propagates towards the left, in agreement with the results of Section 7, but because of insufficient resolution, it results in the fuzzy region on the left.

where U and L are characteristic velocity and scale of the cross-front motion. One of the advantages of the Lagrangian approach is that the (small) imbalance A_I enters the perturbative equations as a whole, while if one tries to apply the perturbation theory in Ro in the Eulerian equations (1) it is necessary to attribute the initial imbalance either to v_I or to h_I . The perturbation series then, at least in what concerns its form, will be different in the two cases.

Zeitlin, Medvedev & Plougonven – 1d RSW.

8

The linearized (first order) equation (13) is

$$\ddot{\phi} + f^2\phi - 2gh_I'\phi' - gh_I\phi'' = A_I \quad (16)$$

We represent the solution as a combination of slow and fast components: $\phi = \bar{\phi} + \tilde{\phi}$ where the overbar denotes the time mean and the tilde means fluctuations around it. For the time-mean (zero mode) one gets

$$f^2\bar{\phi} - 2gh_I'\bar{\phi}' - gh_I\bar{\phi}'' = A_I, \quad (17)$$

a linear second-order inhomogeneous differential equation. It is useful to rewrite this equation in terms of the new variable $\bar{\Phi} = gh_I\bar{\phi}$. By dividing by gh_I one gets:

$$-\bar{\Phi}'' + \left(\frac{f^2 + gh_I''}{gh_I} \right) \bar{\Phi} = A_I, \quad (18)$$

where we see the geostrophic PV constructed from the initial height perturbation $Q_I^{(g)}$, cf. (5), coming into play. Equation (18) is a linear inhomogeneous ODE with variable coefficients and its solution may be obtained by the method of variation of constants once solutions of the homogeneous equation are known. We are mostly interested in the frontal case where A_I is a compact support function and h_I - monotonous with constant asymptotics. Solutions of the homogeneous equation are then exponentially growing/decaying at both spatial infinities. However, it is not obvious that a decaying at both spatial infinities solution of the inhomogeneous equation may be found for arbitrary $Q_I^{(g)}(x)$. By the same method which is used below in the full nonperturbative proof (cf. Appendix A) we are only able to show that a unique solution $\phi_s(x)$ of (17) exists in the case when the geostrophic PV is non-negative: $Q_I^{(g)} \geq 0$.

For the variable in time (fast) part of the solution a homogeneous equation

$$\ddot{\tilde{\phi}} + f^2\tilde{\phi} - 2gh_I'\tilde{\phi}' - gh_I\tilde{\phi}'' = 0 \quad (19)$$

results. By introducing a new variable $\tilde{\Phi} = gh_I\tilde{\phi}$ this equation may be rewritten as

$$\ddot{\tilde{\Phi}} + (f^2 + gh_I'')\tilde{\Phi} - gh_I\tilde{\Phi}'' = 0 \quad (20)$$

and, again, the geostrophic PV enters. Solution of the Cauchy problem for arbitrary initial conditions $\tilde{\phi}_I$, $u_I = \tilde{\phi}_I'$ can be obtained via e.g. the Fourier transform $\Psi(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i\omega t} \tilde{\Phi}(x, t) dt$ for which we get:

$$-\Psi'' + \left[\frac{f}{g} \left(\frac{f + \frac{gh_I''}{f}}{h_I} \right) - \frac{\omega^2}{gh_I} \right] \Psi = 0. \quad (21)$$

Note that $Q_I^{(g)}$ plays a rôle of potential in this Schrödinger-type equation.

As $\phi_I = \tilde{\phi}_I + \bar{\phi}_I = 0$ the initial condition for $\tilde{\phi}$ and, hence, $\tilde{\Phi}$ follows once $\bar{\phi}$ is found: $\tilde{\phi}_I = -\bar{\phi}_I$.

Zeitlin, Medvedev & Plougonven – 1d RSW.

9

This procedure may be repeated order by order in amplitude of ϕ along the lines of Reznik, Zeitlin and Ben Jelloul (2001) with a difference that solutions of the zero-order approximation (18), (20) are not known explicitly as these are equations with non-constant coefficients. This difficulty is, however, technical, rather than principal. Solution of (20) represents a packet of inertia-gravity waves propagating out of the initial localized perturbation plus, possibly, some bound states (trapped modes). Hence, at least at the present perturbative level, the adjustment scenario depends on the absence (complete adjustment) or presence (incomplete adjustment) of the trapped modes. We demonstrate below that trapping by an isolated front is impossible.

A simple argument shows that the trapped modes should be sub-inertial, i.e. having a frequency below f . Consider the Fourier-transform of $\tilde{\phi}$: $\tilde{\phi} = \int d\omega (\psi(\omega, x)e^{-i\omega t} + c.c.)$. Then for each Fourier-component $\psi(\omega, x)$ we get from (19):

$$gh_I\psi'' + 2gh_I'\psi' + (\omega^2 - f^2)\psi = 0 \quad (22)$$

which is equivalent to (21). In the case of a front-like initial configuration the asymptotics of $\tilde{\phi}_I$ and u_I at infinity are zero and those of h_I and $Q^{(g)}$ are constant:

$$h_I|_{\pm\infty} = h_{\pm}, \quad Q^{(g)}|_{\pm\infty} = \frac{f}{h_{\pm}}. \quad (23)$$

Hence, at $x \rightarrow \pm\infty$ eq. (21) becomes

$$-\Psi'' + \frac{f^2 - \omega^2}{gh_{\pm}}\Psi = 0 \quad (24)$$

and in order to have decaying at spatial infinity bound states we should have $\omega < f$. We will show now that this is impossible.

By multiplying (22) by $gh_I\psi^*$, where star denotes the complex conjugation we get

$$\frac{1}{2} (g^2 h_I^2 \psi^* \psi')' - g^2 h_I^2 \psi'^* \psi' + (\omega^2 - f^2) gh_I \psi^* \psi = 0 \quad (25)$$

and, thus, for decaying at $\pm\infty$ states an estimate

$$\omega^2 = f^2 + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx gh_I |\psi'|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx gh_I |\psi|^2} \geq f^2 \quad (26)$$

follows by integration. Thus, we arrive to a contradiction. Hence, there are no sub-inertial trapped modes in the model and the frequency spectrum is continuous. Therefore, all of the initial $\tilde{\phi}$ - perturbation will be dispersed leaving only the stationary part ϕ_s in the vicinity of the initial perturbation. As shown in Reznik, Zeitlin and Ben Jelloul (2001) the outgoing waves do not exercise any drag upon the stationary state in lowest orders in Ro and, thus, slow and fast variables are split, at least for non-negative PVs in the perturbation theory. The speed of relaxation towards the adjusted state will depend on further details of the potential $Q^{(g)}$. If quasi-stationary states, i.e. those which decay only by sub-barrier tunnelling, are present the decay rate will be exponential,

Zeitlin, Medvedev & Plougonven – 1d RSW.

10

as is well-known from quantum mechanics (cf. e.g. Migdal (1977)). Otherwise the decay will be dispersive according to $t^{-\frac{1}{2}}$ law. Here and below we mean by decay a time-decrease of the amplitude of a spatially localized perturbation.

5 The non-perturbative slow manifold and further discussion of the relaxation process

The X - variables we introduced before have clear physical meaning and allow to directly incorporate the initial conditions on the free-surface elevation and along-front velocity into the evolution equation (12). However, it is technically simpler to work with partial differential equations with constant coefficients. This goal may be achieved by an additional change of variables $x = x(a)$, which "straightens" the initial elevation profile $h_I(x)$. We get a following relation between J and h (we remind that h is everywhere positive): $J = \partial X / \partial a = H/h(X, t)$, where the uniform mean height H is introduced. By the chain differentiation rule we get $g \partial_X h = \partial_a P$, where $P = gH/(2J^2)$ is the pressure variable. The Lagrangian equations of motion then take the form:

$$\dot{u} - fv + \partial_a P = 0, \quad (27)$$

$$\dot{v} + fu = 0, \quad (28)$$

$$\dot{J} - \partial_a u = 0. \quad (29)$$

This system³ is equivalent to a single equation, which may be as well obtained by differentiation and change of variables from (12) and, thus, is describing the full dynamics of the model:

$$\ddot{J} + f^2 J + \partial_{aa}^2 P = fHQ, \quad (32)$$

where $Q(a)$ - potential vorticity in a - coordinates: $Q(a) = \frac{1}{H} (\partial_a v(a, t) + fJ(a, t)) = \frac{1}{H} (\partial_a v_I(a) + fJ_I(a))$.

The nonperturbative slow manifold is a stationary solution J_s of (32). For a given set of (localized) initial conditions it represents a stationary state with the same potential vorticity as the initial one. We have:

$$\frac{gH}{f} \frac{d^2}{da^2} \left(\frac{1}{2J_s^2(a)} \right) + fJ_s(a) = HQ(a). \quad (33)$$

³These equations may be obtained, as well, from the original Eulerian system (1) by transforming the independent variables via solution (see for details Rozdestvenskii and Janenko (1978))

$$da = h(x, t)dx - h(x, t)u(x, t)dt, \quad d\tau = dt, \quad (30)$$

where a is called a Lagrangian mass variable. For positive h one gets

$$\partial_x = h \partial_a, \quad \partial_t = \partial_\tau - hu \partial_a = \partial_\tau - u \partial_x \quad (31)$$

and the system (27 - 29) results.

Zeitlin, Medvedev & Plougonven – 1d RSW.

11

This equation is nonlinear and can be rewritten as a non-autonomous ODE describing the motion of a material point in a given potential under the action of a "time"-dependent force, where "time" is a . Using the non-dimensional pressure variable $p = P/(gH)$ and introducing the Rossby deformation radius $R_d^2 = gH/f^2$ we get:

$$\frac{d^2 p}{da^2} + \frac{1}{R_d^2} \frac{1}{\sqrt{2p}} = \frac{f}{g} Q. \quad (34)$$

The corresponding boundary conditions are: the external force (the r.h.s.) exactly equilibrates the potential force (the second term in the l.h.s.) at $a = \pm\infty$. Hence, a stationary solution, if it exists, is a separatrix trajectory relating two states of unstable equilibrium for this simple one-dimensional system. Thus, the balanced solution resembles soliton or instanton solutions in a number of physical models.

It turns out, in spite of this tempting interpretation, that it is simpler to analyse the problem by re-introducing X via the change of variables $dX = Jda$ which gives

$$-\frac{g}{f} \frac{d^2 h(X)}{dX^2} + h(X) Q(X) = -f. \quad (35)$$

Here PV is considered as a function of X via the inverse mapping $x = x(X, t)$ (or $a = a(X)$): $Q(X) = \frac{1}{h_I(x(X))} \left(f + \frac{\partial v_I(x(X))}{\partial x} \right)$.

The following Theorem, which gives sufficient conditions for existence and uniqueness of the slow manifold may be proven then (the technicalities of the proof are standard for the ODEs theory and are given in Appendix A):

Theorem. *For positive $Q(X)$ with the derivatives with compact support and arbitrary constant asymptotics (frontal case) equation (35) has a unique bounded and everywhere positive solution $h(X)$ on \mathbf{R}^1 .*

It is worth noting that as any separatrix trajectory this solution is exponentially unstable as trajectories close to it diverge exponentially, which is worth remembering while trying to find it numerically.

Another remark is that, in general, positiveness of Q is a sufficient condition for the absence of inertial instability (cf. e.g. Holton (1979); this instability as such is absent in 1d RSW due to its one-dimensionality). A slow-manifold in the proper sense exists in 1dRSW with non-negative PV because the geostrophically balanced states are necessarily steady (cf. (4)). In the full 2dRSW they may be unsteady and, thus, subject to the Lighthill radiation making the slow manifold "fuzzy" (Ford, McIntyre & Norton, 2000).

Finally, the proof of the Theorem is not constructive in the sense that it uses the mapping $x = x(X, t)$ which is not known explicitly. However, the Lagrangian conservation of PV guarantees that this mapping preserves the positiveness of PV and its asymptotics at infinity (provided infinity is a fixed point).

Linearization around the true adjusted state denoted by a subscript s gives:

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u}, & v &= v_s + \tilde{v}, & J &= J_s + \tilde{J}, \\ \dot{\tilde{u}} - f\tilde{v} - gH\partial_a(\tilde{J}/J_s^3) &= 0, \end{aligned} \quad (36)$$

Zeitlin, Medvedev & Plougonven – 1d RSW. 12

$$\dot{\tilde{v}} + f u = 0, \quad (37)$$

$$\dot{\tilde{J}} - \partial_a u = 0. \quad (38)$$

By using

$$f \tilde{J} + \partial_a \tilde{v} = 0 \quad (39)$$

it is easy to get a single equation for \tilde{J} and/or for \tilde{v}

$$\ddot{\tilde{J}} + f^2 \tilde{J} - gH \partial_{aa}^2 (\tilde{J}/J_s^3) = 0, \quad \ddot{\tilde{v}} + f^2 \tilde{v} - gH \partial_a (\partial_a \tilde{v}/J_s^3) = 0, \quad (40)$$

which are equivalent, as it is easy to see by applying (39).

Let us consider solutions of the following form:

$$\tilde{J} = \hat{J}(a) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}, \quad \tilde{v} = \hat{v}(a) e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (41)$$

Then the corresponding equations for \hat{J} and \hat{v} are

$$\partial_{aa}^2 (gH_s \hat{J}) + (\omega^2 - f^2) \hat{J} = 0, \quad \partial_a (gH_s \partial_a \hat{v}) + (\omega^2 - f^2) \hat{v} = 0, \quad (42)$$

where we denoted $H_s = H/J_s^3$. We choose the equation for \hat{v} for further analysis because it is self-adjoint. Note that supra-inertiality of ω and, hence, the absence of trapped states follows trivially from (42). By using a new dependent variable ψ

$$\hat{v} = \frac{\psi}{gH_s^{1/2}} \quad (43)$$

we transform the stationary equation to the two-term canonical form

$$\frac{d^2 \psi}{da^2} + \left[\frac{\omega^2 - f^2}{gH_s} - \frac{1}{4} \left(\frac{(H_s)_a}{H_s} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{(H_s)_a}{H_s} \right)_a \right] \psi = 0. \quad (44)$$

Rewritten as

$$\frac{d^2 \psi}{da^2} + k_\psi^2(a) \psi = 0, \quad (45)$$

this equation can be interpreted as that of an oscillator with variable frequency $k_\psi(a)$ (or as a Schrödinger equation with a potential V and an energy E such that $k_\psi^2 = E - V(a)$). It is clear that k_ψ^2 can be negative for $\omega > f$ and suitable H_s . This means that for certain intervals on the x -axis the wavenumber k_ψ may be imaginary (tunnelling) and quasi-stationary states may exist. For example, in the situation presented in figure 1 we have a double-jet configuration falling into this class.

Hence, for any non-negative distribution of initial PV a corresponding iso-PV stationary state exists and the linear analysis shows that small perturbations relax towards this balanced state by emission of inertia-gravity waves. The relaxation law is, in general, a combination of a dispersive $\propto t^{-\frac{1}{2}}$ and exponential $\propto e^{-\Gamma t}$ decays (cf. Migdal, 1977) the latter being provided by the quasi-stationary states, if present. Whether large-amplitude perturbations relax remains an open question.

Note that although we concentrated above on the Cauchy problem, scattering of wave-trains of sufficiently small amplitude may be also considered in the framework of (40). The absence of the bound states means that there is no resonant scattering which corroborates the numerical results of Kuo and Polvani (1999).

6 Nonlinear waves

It is known (Shrira, 1981, 1986; Grimshaw *et al.*, 1998) that the 1dRSW model admits nonlinear periodic wave solutions with amplitudes bound from above by some limiting value. In this section we show that the demonstration of this fact becomes straightforward in the Lagrangian picture, which was first noticed by Bühler (1993) who discovered the nonlinear waves in the model in this way.⁴ In the adjustment context these nonlinear waves are important in the case of periodic boundary conditions frequently used in numerical simulations. The very fact of their existence means that scenarios of adjustment will be different in the closed (circle) and open (whole x -axis) domains in 1dRSW.

Consider equations (27, 28, 29) and look for stationary-wave solutions in the form $u = u(\xi)$, $v = v(\xi)$, $J = J(\xi)$, where $\xi = a - ct$. By eliminating u via $u = \frac{c}{f}v'$, where prime denotes the ξ -differentiation in this section, one gets from the equation (29) that $fJ + v' = \text{const}$. From the definition of PV it follows that this constant is equal to QH and, hence, the PV should be constant for stationary waves to exist. The value of Q is thus fixed to be $Q = f/H$. The equation for v resulting from (27) after elimination of u and J is

$$v'' + \frac{f^2}{c^2}v + \frac{gH}{2c^2}f^3 \left(\frac{1}{(f - v')^2} \right)' = 0 \quad (46)$$

and may be integrated once after multiplying it by $(c^2/f^2)v'$ giving an integral of motion

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{f^2}v'^2 + v^2 - gH \frac{v'^2}{(f - v')^2} \right) = \text{const}. \quad (47)$$

By using $v' = f(1 - J)$ and $fv = c^2J' + gH(1/2J^2)'$ this may be rewritten as

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[R_d^2 \left[M^2 J' + \left(\frac{1}{2J^2} \right)' \right]^2 + M^2(1 - J)^2 - \frac{(1 - J)^2}{J^2} \right], \quad (48)$$

where we used the same notation for the integral, although it is renormalized by c_0^2 with respect to (47), and introduced the Mach number $M = c/c_0$, where $c_0 = \sqrt{gH}$ and $R_d = c_0/f$. The result may be reduced to the standard 'particle-in-a-well' mechanical problem:

$$\frac{J'^2}{2} + \frac{1}{R_d^2} \frac{V(J) - \mathcal{H}}{(M^2 - J^{-3})^2} = 0, \quad (49)$$

⁴We learned about this unpublished result when the present paper was already in preparation.

Zeitlin, Medvedev & Plougonven – 1d RSW.

14

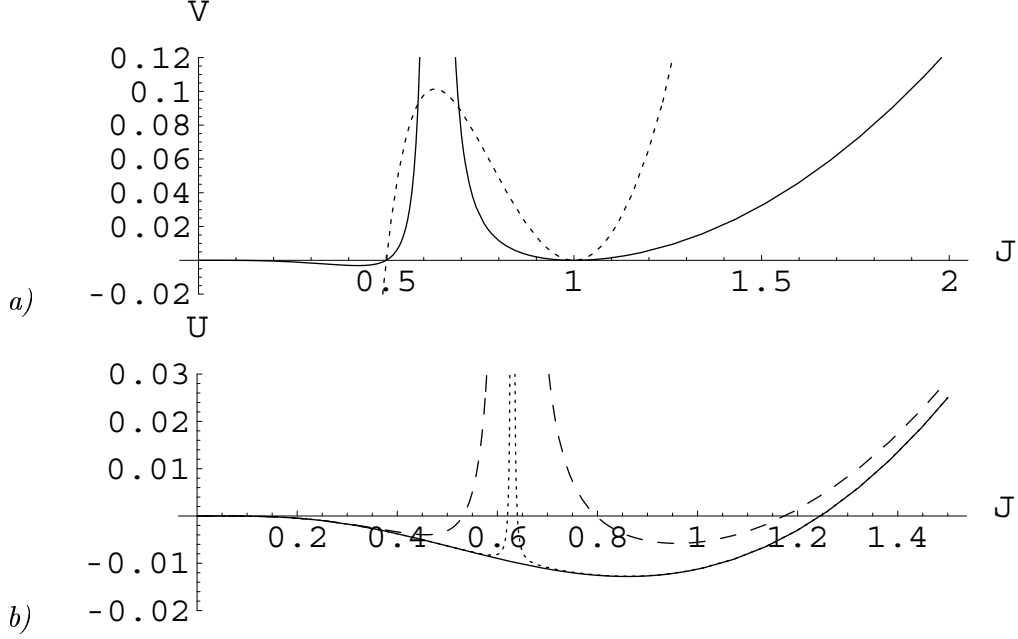


Figure 2: *a)* The ‘prepotential’ $V(J)$ (dashed line), for $M = 2$, and the full ‘potential’ $U(J)$ for $\mathcal{H} = 0$ and $R_d = 1$ (solid line). *b)* ‘Potential’ $U(J)$ for three values of the constant \mathcal{H} : the critical value $\mathcal{H}_c = 0.1013\dots$ (solid), 0.101 (dotted curve), and 0.05 (dashed curve). A nonlinear wave can exist for values of \mathcal{H} such that the potential has two zeros for strictly positive values of J . For $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c$ this is no longer the case.

where J is the particle’s ‘coordinate’, ξ is ‘time’, $U(J) = \frac{1}{R_d^2} \frac{V(J) - \mathcal{H}}{(M^2 - J^{-3})^2}$ is a singular ‘potential’ built from the ‘pre-potential’ $V(J) = \frac{(1-J)^2}{2} (M^2 - J^{-2})$ and a constant \mathcal{H} , and the ‘particle’ moves always on the zero-energy level. The turning points of the particle’s trajectory are, thus, zeros of the potential (cf. figure 2) and a stationary-wave solution exists for the values of parameters such that there is a potential well bounded by two positive zeros (J is positive by definition). For positive J the pre-potential V has one double ($J = 1$) and one simple ($J = M^{-1}$) zero separated by a local extremum at $J = M^{-\frac{2}{3}}$ which is a maximum in the ‘supersonic’ ($M > 1$) and a minimum in the ‘subsonic’ ($M < 1$) case. The position of zeros of the whole potential U are easy to understand from this structure of V which should be vertically shifted by \mathcal{H} to get the numerator of U . As U has a singularity at the local extremum of V there are no regular bounded solutions of the problem (49) in the ‘subsonic’ case. On the contrary, in the ‘supersonic’ case the oscillating solutions are possible. Depending on the value of \mathcal{H} their amplitude varies from zero to a maximum value corresponding to the coincidence of a zero and the pole of U . This value, which is reached at $\mathcal{H} = U\left(M^{-\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{2} \left(M^{\frac{2}{3}} - 1\right)^3$ would give a cusp in the profile of J (reflection

of the particle from the vertical wall). It is, however, unattainable due to a mutual cancellation of the zero and the pole at the corresponding value of \mathcal{H} and, thus, represents an asymptotic limit of the stationary waves' amplitudes. Note that for J close to one (49) becomes a harmonic oscillator equation with (spatial) frequency squared equal to

$$k^2 = \frac{1}{R_d^2 (M^2 - 1)}. \quad (50)$$

Recalling the definition of M this gives $c^2 = c_0^2 (1 + k^{-2} R_d^{-2})$ which is equivalent to the inertia-gravity waves' dispersion relation (3). Hence, stationary nonlinear periodic waves are finite-amplitude analogs of standard infinitesimal inertia-gravity waves - cf. figure 3. However, their amplitudes cannot exceed a limiting value. The deviation of the emitted waves from linearity in the case of strong initial perturbations should manifest itself in the adjustment process, especially in the periodic geometry.

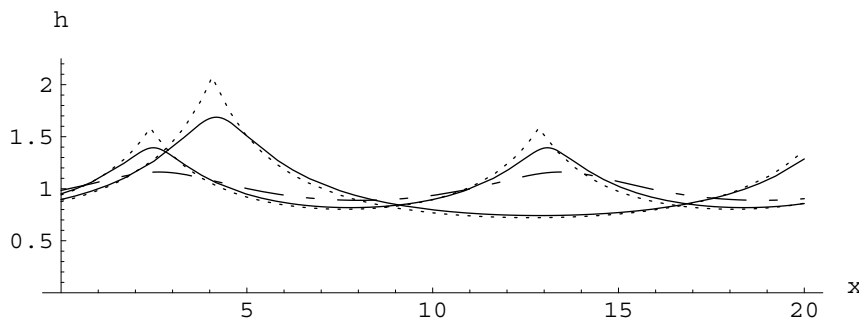


Figure 3: Height profiles of stationary nonlinear waves in physical space for various values of M and \mathcal{H} , with $R_d = 1$. The waves of shorter wavelength have a Mach number $M = 2$, those with longer wavelength have $M = 3$. The two limiting asymptotics ($\mathcal{H} = \mathcal{H}_c$) are the dotted curves; the solid lines correspond to $\mathcal{H} = 0.9\mathcal{H}_c$ in both cases. Finally, for $M = 2$, the wave corresponding to $\mathcal{H} = 0.5\mathcal{H}_c$ is also shown (dash-dotted curve). Note that the maximum amplitude and wavelength increase with M .

7 Wave breaking and shocks in Lagrangian variables

In order to analyse shock formation in Lagrangian variables we are using Lax's method (Lax, 1973), following Engelberg (1996).

Let us rewrite the Lagrangian equations of motion in a -variables as a system of two equations (to avoid cumbersome formulae, all dimensionful parameters are taken to be equal to unity in this section; correct dimensions are easy to

Zeitlin, Medvedev & Plougonven – 1d RSW.

16

recover)

$$\begin{aligned} \dot{u} + \partial_a p &= v, \\ \dot{J} - \partial_a u &= 0, \end{aligned} \quad (51)$$

where v is not an independent variable and should be determined from $\partial_a v = Q(a) - J$.

This is a quasi-linear system

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{J} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -J^{-3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \partial_a \begin{pmatrix} u \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (52)$$

The eigenvalues of the matrix in the l.h.s. are $\mu_{\pm} = \pm J^{-\frac{3}{2}}$ and the corresponding left eigenvectors are $(1, \pm J^{-\frac{3}{2}})$. Hence, the Riemann invariants are $w_{\pm} = u \pm 2J^{-\frac{1}{2}}$ and we have

$$\dot{w}_{\pm} + \mu_{\pm} \partial_a w_{\pm} = v. \quad (53)$$

Expressions of original variables in terms of w_{\pm} are

$$u = \frac{1}{2}(w_+ + w_-), \quad (54)$$

$$J = \frac{16}{(w_+ - w_-)^2} > 0, \quad (55)$$

$$\mu_{\pm} = \pm \left(\frac{w_+ - w_-}{4} \right)^3. \quad (56)$$

In terms of the derivatives of the Riemann invariants $r_{\pm} = \partial_a w_{\pm}$ we get

$$\dot{r}_{\pm} + \mu_{\pm} \partial_a r_{\pm} + \frac{\partial \mu_{\pm}}{\partial w_+} r_+ r_{\pm} + \frac{\partial \mu_{\pm}}{\partial w_-} r_- r_{\pm} = \partial_a v = Q(a) - J, \quad (57)$$

which may be rewritten using "double Lagrangian" derivatives along the characteristics $\frac{dr}{dt_{\pm}} = \dot{r} + \mu_{\pm} \partial_a r$ as

$$\frac{dr_{\pm}}{dt_{\pm}} + \frac{\partial \mu_{\pm}}{\partial w_+} r_+ r_{\pm} + \frac{\partial \mu_{\pm}}{\partial w_-} r_- r_{\pm} = Q(a) - J. \quad (58)$$

Wave-breaking and shock formation correspond to r_{\pm} reaching the limit $\pm\infty$ in finite time.

In terms of the new variables $R_{\pm} = e^{\lambda} r_{\pm}$, with $\lambda = (3/2) \log |w_+ - w_-|$, equations (57) may be rewritten as

$$\frac{dR_{\pm}}{dt_{\pm}} = -e^{-\lambda} \frac{\partial \mu_{\pm}}{\partial w_{\pm}} R_{\pm}^2 + e^{\lambda} (Q(a) - J), \quad (59)$$

where $\partial \mu_{\pm} / \partial w_{\pm} = (3/64)(w_+ - w_-)^2 > 0$.

This is a generalized Riccati equation and from its qualitative analysis (see Lemmas 1 and 2 in (Engelberg, 1996)) it follows that:

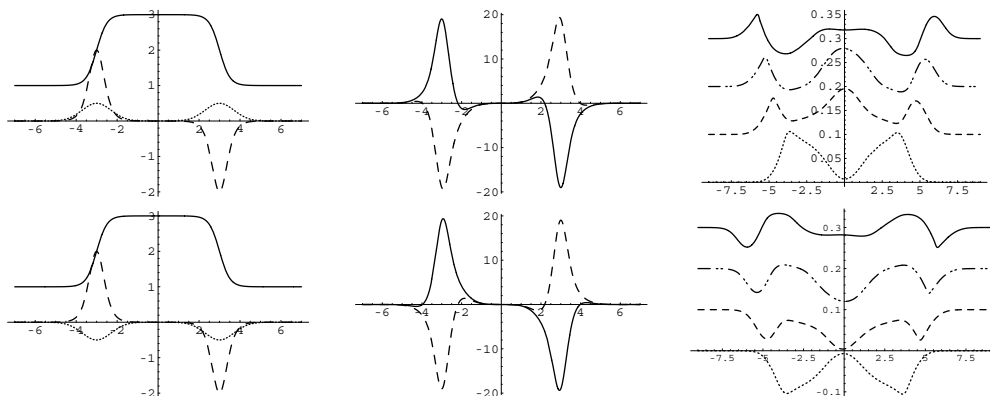


Figure 4: Shock formation in two reversed double-jet configurations given in the upper and the lower row, respectively, calculated by MATHEMATICA integration of equation (13). The left column displays two sets of initial conditions: h_I (solid) and v_I (dashed) are always in geostrophic equilibrium, and a perturbation is provided entirely by u_I (dotted). The middle column shows the corresponding initial profiles of R_+ (solid) and R_- (dashed). According to the results of Sect. 7, shock formation, *i.e.* the appearance of a singularity in R_{\pm} , is favoured in the regions with sufficiently negative relative vorticity and/or sufficiently negative R_{\pm} . The singularities in R_+ and R_- propagate rightward and leftward, respectively, in x . In the case shown, shocks are expected to appear in the regions of negative shear ($[-3, -2]$ and $[2, 3]$) and from regions with negative initial R_{\pm} (around -3 for R_- and $+3$ for R_+); from the shift of the maxima of R_{\pm} due to the contribution of u , one can see that the leftward propagating shock should be favoured in the first case while the rightward one in the second case. The rightmost figure of each row shows the Lagrangian particle displacements $\phi(x, t)$ at successive times $t = .5, 1, 1.5, 2$ (dotted, dashed, dot-dashed and solid lines, respectively); for readability, each curve has been displaced 0.1 upwards relative to the previous one. A shock is a cusp in ϕ . One can see formation of cusps forming at the expected locations and moving in the expected direction on both figures of the right column.

1. if the initial relative vorticity $Q - J = \partial_a v$ is sufficiently negative, breaking always takes place whatever initial conditions are
2. if the relative vorticity is positive as well as the derivatives of the Riemann invariants at the initial moment, breaking never takes place.

Hence, in the adjustment context, shocks should be more easy to produce on the anticyclonic (negative relative vorticity) side of the jet. As one of the Riemann invariants has always a negative derivative for step-wise height profiles, shocks should be always produced by pure height (no v_I) adjustment, as was observed in numerical simulations (Kuo & Polvani, 1997; there, in addition, the initial height profile was itself discontinuous). It seems that shock production in course of adjustment of the front-like perturbation is unavoidable, because these

Zeitlin, Medvedev & Plougonven – 1d RSW.

18

latter never satisfy conditions of Lemma 2 in (Engelberg, 1996). Test simulations done with standard MATHEMATICA routines confirm these conclusions - see figure 4. Although the Lagrangian variables allow to obtain the shock-formation criteria relatively easily it is more convenient to formulate the Rankine-Hugoniot conditions and to proceed with full-scale shock-resolving numerical simulations of adjustment in the Eulerian coordinates. This work is in progress and will be presented elsewhere.

8 Summary and discussion

Thus, by using the Lagrangian coordinates in 1dRSW equations we

- Demonstrated existence and uniqueness of the non-perturbative slow manifold for front-like configurations with non-negative initial PVs;
- Proved that trapped states are impossible in front-like disturbances, but that quasi-stationary states may exist implying, in general, more complex than simple dispersion relaxation to the adjusted state;
- Analysed finite-amplitude periodic non-linear waves existing in the model;
- Established semi-quantitative criteria for the shock formation.

Our analysis confirms, therefore, Rossby's scenario of adjustment for localized fronts but with a restriction to non-negative initial PV distributions and small enough initial departures from the balanced state. The rate of relaxation towards the adjusted state depends on the fine structure of this latter and its capacity to support quasi-stationary states. Shocks do appear during the adjustment process but they do not change the basic scenario as long as they are formed out of the front and are outgoing. We can not exclude at the present stage that very strong initial imbalances may modify the classical scenario even for positive initial PVs by producing either some sort of self-sustained nonlinear oscillations or shocks at the front location.

Probably, the most interesting question is what happens when the initial PV is negative in some region and no proof of existence of the iso-PV balanced state is available. This is a *de facto* strongly nonlinear situation and, as well as strongly nonlinear positive PV case should be investigated numerically. It should be noted that as wave breaking and shock formation with subsequent dissipative effects is the only way for the PV-less wave component of the flow to affect the PV-bearing vortex part, shocks should be resolved with extreme care in numerical simulations. The comparison of reliability of existing Riemann solvers with proper inclusion of rotation is a subject of a related work which is in progress now and will be presented elsewhere.

Acknowledgements V.Z. is grateful to O. Bühler for helpful discussions and for providing his unpublished results. Part of this work was done when V.Z. was visiting Plasma Division of the Courant Institute at NYU. Numerous stimulating discussions with G. Zaslavsky and his kind hospitality at Courant as well

Zeitlin, Medvedev & Plougonven – 1d RSW.

19

as a partial financial support by the US Navy grant are gratefully acknowledged. S.B.M. was supported by RFBR grant No 01-01-00959. R.P. acknowledges support from ACI 'jeunes chercheurs' #0693 of CNRS.

A Existence and uniqueness proof for the adjusted state

The dimensionless equation (35) is written as

$$\frac{d^2 h}{dx^2} - Q(x)h = -1. \quad (\text{A1})$$

We assume that:

$$\begin{aligned} Q(x) &> 0, \\ Q(\pm\infty) &= Q_{\pm} = \text{const} \\ Q'(x) &\text{ has a finite support} \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

A general solution of (A1) has the following form

$$h(x) = C_1 h_1(x) + C_2 h_2(x) + h_1(x) \int_{x_0}^x \frac{h_2(t)}{W} dt - h_2(x) \int_{x_0}^x \frac{h_1(t)}{W} dt, \quad (\text{A3})$$

where $h_1(x), h_2(x)$ is a fundamental set of solutions for (A1) without the right-hand side, and the Wronskian $W = h_1 h_2' - h_1' h_2$ is constant.

We define the two fundamental sets of solutions $\psi_{1,2}(x)$ and $\varphi_{1,2}(x)$ using the asymptotic conditions at infinity. The first set is

$$\psi_1(x) = Q_+^{-1/4} \exp\{-Q_+^{1/2} x\} + o(1), \quad \psi_2(x) = Q_+^{-1/4} \exp\{+Q_+^{1/2} x\} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty \quad (\text{A4})$$

and the second set is

$$\varphi_1(x) = Q_-^{-1/4} \exp\{-Q_-^{1/2} x\} + o(1), \quad \varphi_2(x) = Q_-^{-1/4} \exp\{+Q_-^{1/2} x\} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (\text{A5})$$

Using the first set of solutions and choosing a point $x_0 = x_2$ on the right from the support we have

$$h(x) = C_1 \psi_1(x) + C_2 \psi_2(x) + \frac{1}{2} \psi_1(x) \int_{x_2}^x \psi_2(t) dt - \frac{1}{2} \psi_2(x) \int_{x_2}^x \psi_1(t) dt, \quad (\text{A6})$$

(here $W = \psi_1 \psi_2' - \psi_1' \psi_2 = 2$) and at $(x \rightarrow +\infty)$

$$h(x) = \frac{1}{Q_+} + e^{-x\sqrt{Q_+}} \left(\frac{C_1}{Q_+^{1/4}} - \frac{e^{+x_2\sqrt{Q_+}}}{2Q_+} \right) + e^{+x\sqrt{Q_+}} \left(\frac{C_2}{Q_+^{1/4}} - \frac{e^{-x_2\sqrt{Q_+}}}{2Q_+} \right). \quad (\text{A7})$$

Zeitlin, Medvedev & Plougonven – 1d RSW.

20

To eliminate the growing part of the solution one should put

$$C_2 = \frac{e^{-x_2 Q_+^{1/2}}}{2Q_+^{3/4}} \quad (\text{A8})$$

The first set of the solutions is a linear combination of the second set

$$\psi_1(x) = T_{11}\varphi_1(x) + T_{12}\varphi_2(x), \quad (\text{A9})$$

$$\psi_2(x) = T_{21}\varphi_1(x) + T_{22}\varphi_2(x), \quad (\text{A10})$$

where T is the transition matrix. From the conservation of the Wronskian ($\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2 = 2$) one gets

$$T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1. \quad (\text{A11})$$

Substituting (A9) and (A10) into (A6) we get another representation of the solution

$$h(x) = C_1(T_{11}\varphi_1(x) + T_{12}\varphi_2(x)) + C_2(T_{21}\varphi_1(x) + T_{22}\varphi_2(x)) - \quad (\text{A12})$$

$$-\frac{1}{2}(T_{11}\varphi_1(x) + T_{12}\varphi_2(x)) \int_x^{x_2} (T_{21}\varphi_1(t) + T_{22}\varphi_2(t)) dt + \quad (\text{A13})$$

$$+\frac{1}{2}(T_{21}\varphi_1(x) + T_{22}\varphi_2(x)) \int_x^{x_2} (T_{11}\varphi_1(t) + T_{12}\varphi_2(t)) dt. \quad (\text{A14})$$

For the negative infinity asymptotic we choose a limiting point $x_1 < x_2$ on the left from the support. Then we get for $x \leq x_1$

$$h(x) = C_1 \left(\frac{T_{11}}{Q_-^{1/4}} e^{-xQ_-^{1/2}} + \frac{T_{12}}{Q_-^{1/4}} e^{+xQ_-^{1/2}} \right) + C_2 \left(\frac{T_{21}}{Q_-^{1/4}} e^{-xQ_-^{1/2}} + \frac{T_{22}}{Q_-^{1/4}} e^{+xQ_-^{1/2}} \right) - \quad (\text{A15})$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{T_{11}}{Q_-^{1/4}} e^{-xQ_-^{1/2}} + \frac{T_{12}}{Q_-^{1/4}} e^{+xQ_-^{1/2}} \right) \int_{x_1}^{x_2} (T_{21}\varphi_1(t) + T_{22}\varphi_2(t)) dt - \quad (\text{A16})$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{T_{11}}{Q_-^{1/4}} e^{-xQ_-^{1/2}} + \frac{T_{12}}{Q_-^{1/4}} e^{+xQ_-^{1/2}} \right) \int_x^{x_1} \left(\frac{T_{21}}{Q_-^{1/4}} e^{-tQ_-^{1/2}} + \frac{T_{22}}{Q_-^{1/4}} e^{+tQ_-^{1/2}} \right) dt + \quad (\text{A17})$$

$$+\frac{1}{2} \left(\frac{T_{21}}{Q_-^{1/4}} e^{-xQ_-^{1/2}} + \frac{T_{22}}{Q_-^{1/4}} e^{+xQ_-^{1/2}} \right) \int_{x_1}^{x_2} (T_{11}\varphi_1(t) + T_{12}\varphi_2(t)) dt + \quad (\text{A18})$$

$$+\frac{1}{2} \left(\frac{T_{21}}{Q_-^{1/4}} e^{-xQ_-^{1/2}} + \frac{T_{22}}{Q_-^{1/4}} e^{+xQ_-^{1/2}} \right) \int_x^{x_1} \left(\frac{T_{11}}{Q_-^{1/4}} e^{-tQ_-^{1/2}} + \frac{T_{12}}{Q_-^{1/4}} e^{+tQ_-^{1/2}} \right) dt \quad (\text{A19})$$

After a simplification we get

$$h(x) = \frac{1}{Q_-} + \frac{2C_1 Q_-^{3/4} T_{11} + 2C_2 Q_-^{3/4} T_{21} - e^{x_1 Q_-^{1/2}} - D_2 Q_-^{3/4}}{2Q_-} e^{-x Q_-^{1/2}} + \quad (\text{A20})$$

$$\frac{2C_1 Q_-^{3/4} T_{12} + 2C_2 Q_-^{3/4} T_{22} - e^{-x_1 Q_-^{1/2}} + D_1 Q_-^{3/4}}{2Q_-} e^{x Q_-^{1/2}}, \quad (\text{A21})$$

where

$$D_1 = \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1(t) dt, \quad D_2 = \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2(t) dt. \quad (\text{A22})$$

The solution has finite asymptotics if and only if

$$2C_1 Q_-^{3/4} T_{11} + 2C_2 Q_-^{3/4} T_{21} - e^{x_1 Q_-^{1/2}} - D_2 Q_-^{3/4} = 0. \quad (\text{A23})$$

If $T_{11} \neq 0$ then C_1 can be found from (A23). Now we prove that $T_{11} \neq 0$ for any solution. Assume that $T_{11} = 0$ then from (A11) we get that $T_{12} \neq 0$. Therefore we have

$$\psi_1(x) = T_{12} \varphi_2(x). \quad (\text{A24})$$

From (A5) we have that

$$\psi_1(x) = T_{12} Q_-^{-1/4} \exp\{+Q_-^{1/2} x\} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty.$$

From (A4) we get that $\psi_1(x)$ is an integrable function. Multiplying the homogeneous eq. (A1) by $\psi_1(x)$ for $h(x) = \psi_1(x)$ and integrating we get that

$$\int \psi_1(x) \frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} dx - \int Q(x) \psi_1^2(x) dx = 0. \quad (\text{A25})$$

By integration by parts in the first integral we get a negative value at the left hand side. This value is equal to zero if and only if $\psi_1(x) \equiv 0$. But we assumed that $\psi_1(x)$ is non-trivial solution.

Proposition 1. The equation (A1) has a bounded solution $h(x)$ for positive $Q(x)$ which is unique for the boundary conditions $h(x) = Q_{\pm}$ as $x \rightarrow \pm\infty$.

A1 Positiveness of solution

The result that the solution of (A1) without the right hand side can have either none or single zero is well-known from the Sturm theorems (cf. e.g. Hartmann, 1964). Now we prove this theorem for the full (A1). Assume that $h(x_1) = h(x_2) = 0$ and $h(x) < 0$ for $x_1 < x < x_2$. Integrating (A1) from x_1 to x_2 we get

$$\frac{dh}{dx}(x_2) - \frac{dh}{dx}(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} Q(x) h(x) dx - (x_2 - x_1). \quad (\text{A26})$$

Zeitlin, Medvedev & Plougonven – 1d RSW.

22

Obviously, the left hand side is positive and the right hand side is negative. As a result we get contradiction. Therefore there are no zeros of this kind.

Proposition 2. Any solution $h(x)$ of the equation $-h''(x) + Q(x)h(x) = 1$ has either one zero or no zeros at all for positive $Q(x)$.

We first prove that a non-negative solution $h(x)$ cannot have a singular zero x_0 : $h(x_0) = 0$, $h'(x_0) = 0$.

Assume that $h(x_0) = 0$ and $h'(x_0) = 0$. If $h(x)$ is non-negative then $h''(x_0) \geq 0$. But from (A1) we have $h''(x_0) = -1$ and we arrive to a contradiction.

Proposition 3. Non-negative solutions $h(x)$ have no singular zeros such that $h(x) = 0$ and $h'(x) = 0$.

From Propositions 1, 2, 3 we get

Proposition 4. A solution $h(x)$ with asymptotics $h(\pm\infty) = 1/Q_{\pm} > 0$ is a positive function of x ($h(x) > 0$).

Proof: As proven, $h(x)$ can have 0 or 1 zeros. If $h(x)$ has no zeros then $h(x) > 0$ because $h(\pm\infty) > 0$. If $h(x)$ has one zero at the point x_0 then $h(x_0) = 0$ and $h'(x_0) = 0$, which enters in contradiction with Proposition 3.

Summarizing we formulate the main theorem.

Theorem

Under assumptions (A2) equation (A1) has a unique bounded and positive solution $h(x)$.

The same proof, save positiveness which is inessential there, passes through for eq. (18).

B Lagrangian approach to axisymmetric 1dRSW

Axisymmetric motion in shallow water is described by fields depending on only one space variable: r , the distance to the center. As in the rectilinear case, it is possible to reduce the whole dynamics to a single PDE for a Lagrangian variable, $R(r, t)$, the distance to the center of a particle initially situated at r .

We first rewrite the RSW equations in the Eulerian framework, using cylindrical coordinates (r, θ) and assuming axisymmetry ($\partial_{\theta} \equiv 0$):

$$\begin{aligned} (\partial_t + u_r \partial_r) u_r - u_{\theta} \left(f + \frac{u_{\theta}}{r} \right) + \partial_r h &= 0, \\ (\partial_t + u_r \partial_r) u_{\theta} + u_r \left(f + \frac{u_{\theta}}{r} \right) &= 0, \\ (\partial_t + u_r \partial_r) h + \frac{1}{r} \partial_r (r u_r h) &= 0, \end{aligned} \tag{B27}$$

where u_r (u_{θ}) is the radial (azimuthal) velocity, and h the total height of the fluid. Multiplying the second equation by r , the conservation of angular momentum is recovered:

$$(\partial_t + u_r \partial_r) \left(r u_{\theta} + f \frac{r^2}{2} \right) = 0. \tag{B28}$$

Zeitlin, Medvedev & Plougonven – 1d RSW.

23

The equations can be rewritten using a Lagrangian coordinate for the radial position: $R(r, t)$ is the radial position at time t of the particle that was at r initially. Note that r changes its meaning, from here on, becoming a Lagrangian label instead of Eulerian coordinate.

Equation (B28) may be immediately integrated:

$$R(r, t) u_\theta(r, t) + f \frac{R^2(r, t)}{2} = G(r) . \quad (\text{B29})$$

$G(r)$ is determined from initial conditions: if $u_{\theta I}$ is the initial azimuthal velocity profile, then

$$G(r) = r u_{\theta I}(r) + f \frac{r^2}{2} . \quad (\text{B30})$$

Using the above expression, the term $u_\theta (f + u_\theta/r)$ in the first equation in (B27) is expressed in terms of $R(r, t)$ and G :

$$\begin{aligned} u_\theta \left(f + \frac{u_\theta}{R} \right) &= \frac{1}{R} \left(G - f \frac{R^2}{2} \right) \left(f + \frac{G}{R^2} - \frac{f}{2} \right) , \\ &= \frac{1}{R^3} \left(G^2 - \frac{f^2 R^4}{4} \right) . \end{aligned} \quad (\text{B31})$$

Mass conservation is expressed by the following relation between $h(r, t)$ and the initial height profile $h_I(r)$:

$$h(r, t) R(r, t) dR = h_I(r) r dr . \quad (\text{B32})$$

With the help of (B31) and (B32), the radial momentum equation becomes:

$$\ddot{R} + \frac{f^2}{4} R - \frac{1}{R^3} G^2 + \frac{1}{\partial_r R} \partial_r \left(\frac{a h_I}{R \partial_r R} \right) = 0 , \quad (\text{B33})$$

where $\dot{R}(r, t) = u_r(r, t)$. The form of this equation is similar to the one found in the rectilinear case; the advantages of the Lagrangian formulation apply here as well.

It may seem odd at first glance that the second term be $f^2 R/4$, and not simply $f^2 R$. The habitual rôle of the inertial frequency f is recovered when we linearize the equation for small disturbances. For instance, for small perturbations about the rest-state:

$$R(r, t) = r + \phi(r, t) , \quad (\text{B34})$$

with $|\phi| \ll r$, $h_I(r) = 1$ and $u_{\theta I}(r) = 0$ the following equation is obtained after some algebra:

$$\ddot{\phi} + f^2 \phi - \frac{\partial_r \phi}{r} - \partial_{rr}^2 \phi + \frac{\phi}{r^2} = 0 . \quad (\text{B35})$$

If solutions are sought in the form $\phi(r, t) = \hat{\phi}(r) e^{i\omega t}$, equation (B35) yields, after a change of variables, the canonical equation for Bessel functions, and the

Zeitlin, Medvedev & Plougonven – 1d RSW.

24

familiar axisymmetric solutions involving Bessel functions J_1 are obtained (*cf.* e.g. Landau & Lifshits 1975, on axisymmetric sound waves):

$$\phi(r, t) = C J_1(\sqrt{\omega^2 - f^2} r) e^{i\omega t} + c.c., \quad (\text{B36})$$

where C is the wave amplitude.

References

- [1] Blumen, W., 1972, "Geostrophic adjustment" *Rev. Geophys. Space Phys.*, **10**, 485 - 528.
- [2] Bühler, O., 1993, "A nonlinear wave in rotating shallow water" GFD Summer School preprint (Woods Hole) - *unpublished*.
- [3] S. Engelberg "Formation of singularities in the Euler and Euler-Poisson equations", *Physica D*, 1996, **98**, p. 67 - 74.
- [4] Ford, R., McIntyre, M.E. and Norton, W.A., 2000, "Balance and the slow quasimanifold: some explicit results", *J. Atmos. Sci.*, **57**, 1236 - 1254.
- [5] Gill A.E. "Atmosphere - Ocean Dynamics", Chapt. 7.2, AP, New York, 1982.
- [6] Grimshaw, R.H.G., Ostrovsky, L.A., Shrira, V.I. and Stepanyants, Yu.A., 1998, "Long nonlinear surface and internal gravity waves in a rotating ocean", *Surveys in Geoph.*, **19**, p. 289 - 338.
- [7] Hartman, P., 1964, "Ordinary differential equations" Wiley & Sons, New York -London -Sydney.
- [8] Holton, J.R., 1979, "An introduction to dynamic meteorology", AP.
- [9] Kuo, A.C. and Polvani, L.M., 1997, "Time-dependent fully nonlinear geostrophic adjustment", *J. Phys. Oceanogr.*, **27**, p. 1614-1634.
- [10] Kuo, A.C. and Polvani, L.M., 1999, "Wave-vortex interactions in rotating shallow water. Part 1. One space dimension", *J. Fluid Mech.*, **394**, p. 1-27.
- [11] Landau, L. D. and Lifshits, E.M., 1975, "Hydrodynamics", AP
- [12] Lax, P.D., 1973, "Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves", SIAM, PA.
- [13] Leith C.E., 1980, "Nonlinear normal mode initialization and quasi-geostrophic theory", *J. Atmos. Sci.*, **37**, p. 958 - 968.
- [14] Migdal, A.B., 1977, "Qualitative methods in quantum theory" in "Frontiers in physics", v. 48, Reading, Mass.

Zeitlin, Medvedev & Plougonven – 1d RSW.

25

- [15] Obukhov, A.M., 1949, "On the problem of geostrophic wind", *Izvestia – Geography and Geophysics*, **13**, p. 281-306 (*in Russian*).
- [16] Pedlosky, J., "Geophysical fluid dynamics", Springer, NY, 1982.
- [17] Reznik, G.M., Zeitlin V. and Ben Jelloul, M., 2001, "Nonlinear theory of geostrophic adjustment. Part I. Rotating shallow water" - *J. Fluid Mech.*, **445**, p. 93 - 120.
- [18] Rossby, C.-G., 1938, "On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems, II", *J. Mar. Res.*, **1**, p. 239-263.
- [19] Rozdestvenskii, B.L. and Janenko, N.N., 1978, "Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics", AMS Translation of Mathematical Monographs, v. 55, Providence, RI.
- [20] Shrira, V. I., 1981, "Propagation of long nonlinear waves in the layer of rotating fluid", *Sov. Physics - Izvestija, Atm. Ocean Physics*, **17**, #1, p. 55-59.
- [21] Shrira, V.I., 1986, "On the long strongly nonlinear waves in rotating ocean", *Sov. Physics - Izvestija, Atm. Ocean Physics*, **22**, #4, p. 298-305.
- [22] Whitham, G.B. 1974, "Linear and Nonlinear Waves", Wiley, NY.

2.3.1 Compléments sur la dispersion d'ondes et sur les chocs

Nous apportons ici des explications complémentaires sur deux résultats importants de l'article, les modes quasi-stationnaires et les chocs, dans le but d'en faciliter et d'en approfondir la compréhension. Notamment, nous détaillons dans quelles configurations de l'écoulement des modes quasistationnaires peuvent exister, et présentons des illustrations de chocs permettant de mieux saisir la correspondance entre la l'évolution du champ de déplacement des particules, et celle du champ de hauteur.

Dispersion d'ondes

Nous avons montré qu'il n'existe pas de modes piégés dans le modèle RSW1D, mais qu'il était en revanche possible d'avoir des modes quasi-stationnaires, dont la dynamique est décrite par l'équation (45) de l'article :

$$\frac{d^2\psi}{da^2} + k_\psi^2(a)\psi = 0. \quad (2.10)$$

Nous donnons ci-dessous quelques illustrations du potentiel k_ψ^2 et des modes quasi-stationnaires.

La version linéarisée de l'équation (2.8), avec toutes les constantes égales à 1, a été intégrée à l'aide de MATHEMATICA pour quelques périodes inertielles sur le fond d'un double jet en équilibre (eq. (2.11a) et (2.11b)), avec comme condition initiale une perturbation de u (eq. (2.11c)) :

$$h_b(x) = 1 + Ae^{-x^2}, \quad (2.11a)$$

$$v_b(x) = h'_b(x), \quad (2.11b)$$

$$u_I(x) = 0.1e^{-x^2}. \quad (2.11c)$$

Une simulation de référence avec $A = 0$ (ondes sur fond de fluide au repos) a été effectuée ; elle a permis de vérifier qu'on retrouve, dans ce cas, la décroissance de l'amplitude des ondes en $t^{-1/2}$ [Lig78]. Deux autres simulations ($A = 0.5$ et $A = 1$) ont été effectuées pour évaluer l'effet du double-jet sur la dispersion des ondes.

Le profil h_b et le potentiel k_ψ^2 correspondant pour plusieurs fréquences proches de la fréquence inertielle ($f = 1$) sont montrés sur la figure 2.1a-b. Les profils des déplacements $\phi(x, t)$ sont montrés après un peu plus de quatre périodes inertielles sur la fig. 2.1c, et l'évolution de $\phi(x, t)$ en $x = 0$ est montrée sur la fig. 2.1d. Il apparaît nettement que les ondes de basses fréquences se dispersent plus lentement dans le cas avec un double jet que dans le cas du fluide au repos.

Des modes quasi-stationnaires sont possibles dans le cas où le potentiel k_ψ^2 possède une région positive entourée de deux régions négatives. Pour mieux comprendre le lien entre k_ψ^2 et l'état de base sur lequel nous linéarisons, nous montrons en fig. 2.2 le potentiel pour une marche de hauteur correspondant à un simple jet. Il n'y a alors qu'une région où k_ψ^2 est négatif, et donc il n'y a pas dans ce cas de modes quasi-stationnaires. De manière générale, ce sont les régions où l'on a un gradient de h et de faibles valeurs de h qui permettent d'avoir des régions avec k_ψ^2 négatif. Ce phénomène diffère donc profondément des ondes piégées qui existeront dans le modèle à deux couches et qui seront liées aux régions de forte vorticité relative anticyclonique.

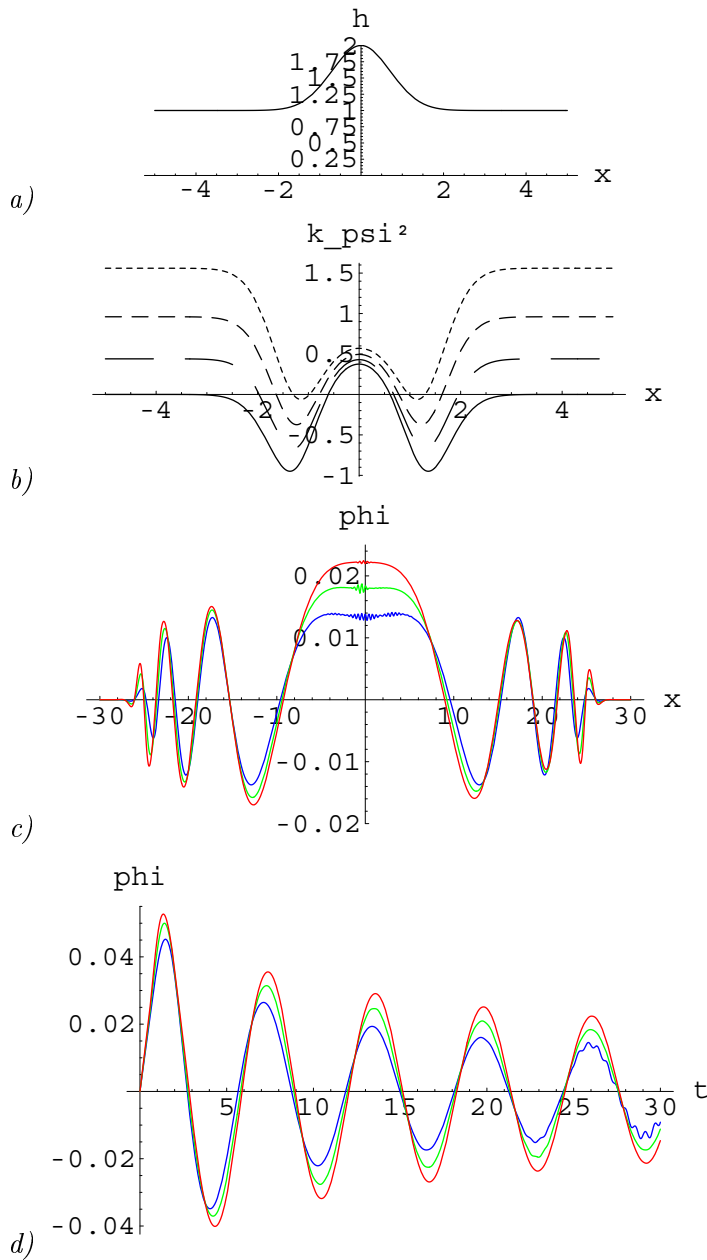


FIG. 2.1 – Comparaison de la dispersion des ondes pour une perturbation sur fond de fluide au repos, et sur fond d'un double jet équilibré : a) : profil de hauteur utilisé pour la seconde simulation ; b) : le potentiel k_{ψ}^2 (cf éq. (44) de l'article) pour quatre valeurs de ω : 1 (trait plein), 1.2 (tiret long), 1.4 (tiret), 1.6 (tiret court). Une région où k_{ψ}^2 est négatif est une région qui repousse en quelque sorte les ondes pour la fréquence considérée. Un îlot positif entouré de deux régions négatives permet d'avoir des modes quasi-stationnaires dont la dispersion sera plus lente que pour des ondes sur fond de fluide au repos. c) : profil de ϕ à $t = 26.2$ pour trois valeurs de A : 0 (gris sombre), 0.5 (gris clair) et 1 (gris). L'amplitude des oscillations de ϕ est plus grande en présence du double jet, conformément à ce que l'on attend. d) : évolution dans le temps de ϕ pour la particule $x = 0$, pour les trois mêmes valeurs de A .

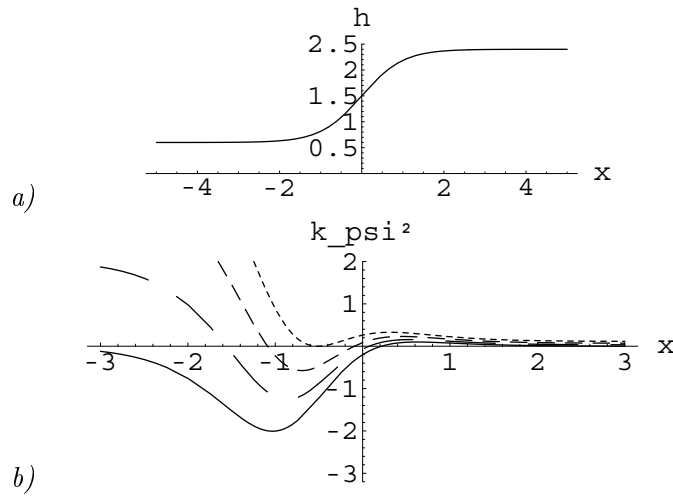


FIG. 2.2 – Profil de hauteur et profils du potentiel k_{ψ}^2 pour un simple jet : a) : profil de hauteur ($h = 1.5 + 0.9 \tanh(a)$) ; b) : le potentiel k_{ψ}^2 pour quatre valeurs de ω : 1 (trait plein), 1.2 (tiret long), 1.4 (tiret), 1.6 (tiret court).

Chocs

Le formalisme lagrangien permet d'obtenir, en suivant la méthode de Lax [Lax73] et le travail d'Engelberg [Eng96], un critère semi-quantitatif indiquant les régions de l'écoulement favorables au déferlement des ondes (c'est-à-dire à l'apparition de chocs). Dans ce qui suit, nous détaillons un peu plus l'identification des régions favorisant la divergence de R_{\pm} (cf section 7 de l'article). Notons bien que cette divergence, et donc l'apparition de chocs, ne se produit pas nécessairement *dans* ces régions, mais le long de caractéristiques *traversant* ou *en provenance* de ces régions. D'après la forme de l'équation (59) de l'article, si R_{\pm} devient quelque part suffisamment négatif, le terme de forçage en R_{\pm}^2 entrainera sa divergence. Seront donc favorables aux chocs les régions ayant initialement R_{\pm} fortement négatif. Or, en revenant au champ de hauteur $h(a, t)$, les quantités R_{\pm} s'expriment de la façon suivante :

$$R_{\pm} = 8 \left(\frac{h}{H} \right)^{3/4} \partial_a \left(u \pm 2 \sqrt{\frac{h}{H}} \right). \quad (2.12)$$

Notons que si l'on part d'une anomalie de u seule, les régions favorables aux chocs seront celles où $\partial_a u$ est fortement négatif, conformément à l'intuition. Pour des profils où la perturbation initiale de hauteur est plus importante, ce seront les régions de forts gradients de hauteur qui seront favorables aux chocs⁶. Enfin, nous pouvons obtenir l'expression des quantités R_{\pm} en fonction

⁶Etant donné que les caractéristiques pour R_+ partent vers la droite, les régions avec un fort gradient $\partial_a h < 0$ sont favorables aux chocs partant vers la droite ; de même, les régions avec un fort gradient $\partial_a h > 0$ sont favorables aux chocs partant vers la gauche. Ceci est vérifié dans les simulations effectuées ; intuitivement, on comprend qu'une onde suffisamment forte se propageant vers une région où il y a moins de fluide risque de déferler.

des dérivées eulériennes :

$$R_{\pm} = 8 \left(\frac{H}{h} \right)^{1/4} \partial_X u \pm \left(\frac{H}{h} \right)^{-3/4} \partial_X h. \quad (2.13)$$

Il apparaît clairement dans cette expression que les régions de faibles hauteur de fluide favorisent les chocs, ce qui est en accord avec ce que Kuo & Polvani observent dans leurs simulations numériques ([KP97], figure 7).

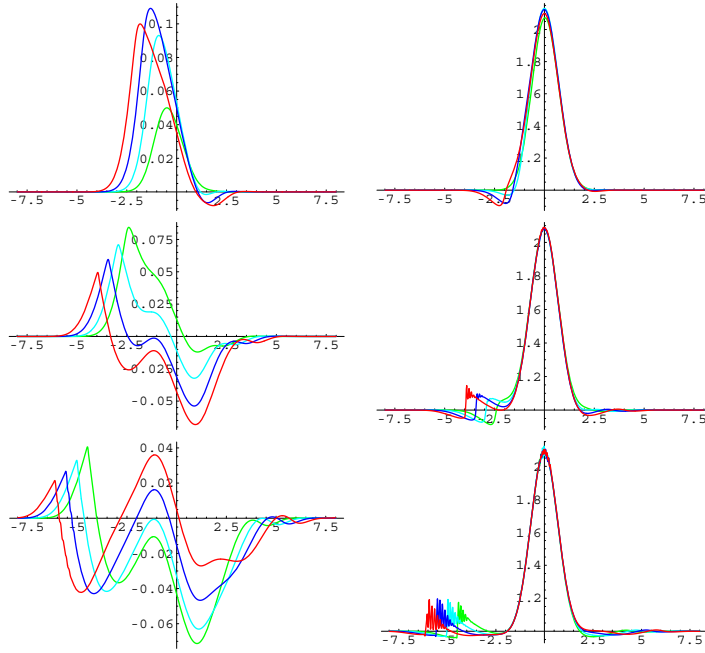


FIG. 2.3 – Formation de chocs, d'après une simulation *MATHEMATICA*, partant des conditions initiales (2.14a-2.14c). Colonne de gauche : profils successifs pour $\phi(x, t)$; colonne de droite : profils de $h(x, t) = 1/(1 + \phi')$. Les profils sont exposés par groupes de quatre, pour des temps séparés de 0.5, allant de 0.5 à 6.

Par ailleurs, à cause du terme de forçage $\partial_a v$, les régions de vorticité relative anticyclonique seront favorable à la formation de chocs le long des caractéristiques qui la traversent.

Sont présentés dans l'article deux exemples illustrant ces points. Nous rajoutons ici (Fig. 2.3) le déplacement des particules et la hauteur obtenus pour une simulation des premiers instants de l'ajustement à partir des conditions initiales utilisées pour la figure 1 de l'article⁷ :

$$h_I = 1 + e^{-x^2}, \quad (2.14a)$$

$$v_I = -2(x + 0.2\sin(x))e^{-x^2}, \quad (2.14b)$$

$$u_I = 0.1e^{-x^2}. \quad (2.14c)$$

⁷Cette intégration avec un pas plus fin montre que la région rugueuse à l'avant du front d'ondes qui part vers la gauche dans la figure 1 de l'article correspond bien à la formation d'un choc.

La hauteur s'obtient à partir du champ de déplacement ϕ par :

$$h(x, t) = \frac{h_I(x)}{1 + \partial_x \phi(x, t)}. \quad (2.15)$$

La formation d'un choc se voit donc dans l'évolution de ϕ par la formation d'un point anguleux où $\partial_x \phi(x, t)$ sera discontinu. Notons que la résolution d'un point anguleux est moins problématique numériquement que la résolution d'une discontinuité. Ces intégrations à l'aide de Mathematica sont suffisamment fiables pour suivre l'évolution du fluide au moins jusqu'à la formation des chocs ; le calcul du champ de hauteur est déjà problématique et très bruyant car il nécessite une dérivation ; il n'est donc exposé ici dans un but illustratif.

2.4 La séparation de l'écoulement en parties lente et rapide

Comme indiqué en introduction (*cf* 1.1, 1.2), la vorticité potentielle joue un rôle clé dans la séparation entre ondes et vortex. Aussi l'inversion de la vorticité potentielle est elle souvent utilis e pour définir la partie vorticale de l'écoulement. Nous montrons ci-dessous en quoi la séparation lagrangienne de l'écoulement permet de mieux comprendre certaines limitations de cette inversion, en nous appuyant sur l'étude des interactions ondes vortex men e par Kuo & Polvani (KP, [KP99]).

2.4.1 Inversion de la vorticité potentielle

L'approche de KP est eulérienne. Ils simulent numériquement le passage d'un train d'ondes de grande amplitude à travers un 'vortex' (un double-jet) en équilibre géostrophique.   chaque instant ils séparent l'écoulement en une composante vorticale et une composante ondulatoire. Ceci leur permet d'étudier les changements d s aux ondes dans la composante vorticale, ce qu'ils désignent comme 'interactions ondes-vortex'.

La partie vorticale de l'écoulement est définie, chez KP, par une inversion instantan e de la distribution eulérienne de la vorticité potentielle (en utilisant nos notations) :

$$\frac{g}{f} \frac{\partial^2 h_g}{\partial X^2} - h_g Q = -f, \quad (2.16)$$

où $Q(X, t)$ est la distribution eulérienne de vorticité potentielle, et h_g est la hauteur de l'état géostrophique recherch ⁸. Les conditions aux limites sont les asymptotiques de h en $\pm\infty$.

Les résultats essentiels de KP sont les suivants :

⁸Cette équation est formellement la même que l'équation (35) de l'article ; la différence est la suivante : dans l'équation (2.16), $Q(X, t)$ est la distribution eulérienne instantan e de PV, et cette équation est utilis e pour déterminer à chaque instant la partie vorticale. L'équation (35) de l'article, en revanche, est obtenue par un changement de variable à partir des équations lagrangiennes, et nous n'étudions cette équation que pour déterminer les conditions sur Q garantissant l'existence et l'unicité de l'état ajusté.

1. il existe une 'interaction ondes-vortex' : lorsque les ondes passent, la partie vorticale varie à l'échelle de temps rapide. Cette interaction est plus forte dans le cas des cyclones (dépression dans le champ de h) que dans le cas des anticyclones (bosse de h). Plus précisément, cette interaction croît avec l'amplitude des cyclones, et décroît avec l'amplitude des anticyclones.
2. il n'y a pas d'effet net de cette interaction après le passage des ondes : pour des temps longs, après le passage des ondes, le vortex retrouve son état initial.

2.4.2 Séparation lagrangienne de l'écoulement

Ces résultats peuvent être reformulés et compris différemment si l'on aborde le problème avec l'approche lagrangienne : étant donné une condition initiale, la partie vorticale ou ajustée de l'écoulement est définie par l'équation (2.9) ; elle existe et est unique si la PV est positive, ce qui est le cas ici. La partie vorticale ainsi définie est plus satisfaisante que celle obtenue par inversion instantanée de la PV, car elle ne varie pas sur l'échelle de temps des ondes : elle est stationnaire. Les résultats de Kuo & Polvani s'interprètent dès lors de la façon suivante :

1. Les variations rapides de la partie vorticale telle qu'ils la définissent proviennent des variations de la distribution eulérienne de la PV, dues à l'advection par les ondes. Le fait que l'interaction soit plus forte avec les cyclones qu'avec les anticyclones se comprend ainsi : dans les cyclones, la hauteur du fluide est moindre que dans les anticyclones. Le flux d'énergie lié aux ondes étant constant, les déplacements dus aux ondes y sont plus grands. Par conséquent, Q et h_g sont davantage affectés par l'advection due aux ondes dans un cyclone que dans un anticyclone.
2. l'état final est déterminé par les profils initiaux de v et h , du moins s'il n'y a pas de processus dissipatifs dans l'évolution vers cet état final. Cet argument est également avancé par KP. Il faut ajouter qu'il n'est pas possible d'avoir des modes piégés dans le modèle RSW1D (*cf* section 4 dans l'article). De plus, les simulations numériques de KP suggèrent, dans les cas étudiés, que les processus dissipatifs dus aux chocs n'ont pas d'effets significatifs sur la partie lente de l'écoulement. KP n'ayant examiné qu'un cas particulier, dans quelle mesure ceci est-il général ?

L'éclairage lagrangien rend plus lisibles les simulations de Kuo & Polvani : ce qu'ils appellent 'interaction' est l'advection de la PV par les ondes. Si l'on définit lagrangiennement la partie vorticale, il n'y a pas de modification de celle-ci par les ondes, du moins tant que celles-ci ne déferlent pas.

2.4.3 Au-delà du modèle uni-dimensionnel

Pour des situations tridimensionnelles, l'inversion de la vorticité potentielle est souvent utilis e pour séparer les parties lente et rapide de l'écoulement [HMR85, ZKDK00]. Le travail de Kuo & Polvani nous montre cependant que dans une telle approche, la séparation se fait avec une imprécision

due à l'advection de la PV par les ondes. Dans quelle mesure les changements de PV dus aux ondes se ressentent lors de l'inversion ?

Premièrement, notons que pour de faibles nombres de Rossby, le problème ne se pose pas, l'inversion de la vorticité potentielle sépare effectivement la partie lente, qui suit la dynamique quasi-géostrophique, des ondes [RZJ01, ZRJ02]. En effet, l'advection de la PV par les ondes ne sera importante qu'en présence de forts gradients, donc de nombres de Rossby d'ordre 1.

Deuxièmement, les modifications du champ de PV dues aux ondes sont-elles significatives pour l'inversion ? Pour un contexte atmosphérique par exemple, des ondes de forte amplitude et de basse fréquence peuvent être responsables de changements de la PV (*cf* chapitre 5 et [OD95]), mais ces changements seront d'échelle relativement petite (échelle horizontale des ondes, 100-500km). Or, comme l'expliquent Hoskins *et al*, les détails de la distribution de PV interviennent peu dans l'inversion (dans le modèle quasi-géostrophique par exemple l'opérateur à inverser est un laplacien). On peut donc s'attendre à ce que ces variations dues aux ondes, de même que les minces filaments de PV, n'aient pas des conséquences très grandes sur les champs obtenus par inversion de la PV. Ce point serait cependant à vérifier quantitativement.

2.5 Perspectives

Les résultats obtenus analytiquement dans ce chapitre et la meilleure compréhension du processus d'ajustement qui en a découlé suggèrent certaines directions à suivre :

1. Ajustement d'anomalies loin de l'équilibre, avec PV positive : nous avons étudié l'ajustement de petites perturbations à un état ajusté, et montré que la partie rapide se propageait au loin⁹. Est-ce toujours le cas lors de l'ajustement de perturbations d'amplitudes finies ?
2. Ajustement d'anomalies avec PV négative : le fluide converge-t-il vers un état stationnaire, et si oui, quel est cet état ? Quel rôle jouent les phénomènes fortement nonlinéaires dans l'évolution du fluide ?
3. Ajustement périodique fortement nonlinéaire : nous avons étudié les ondes nonlinéaires isolément, sur fond de vorticité potentielle uniforme. Existence-elles toujours lorsque la vorticité potentielle n'est pas uniforme, et si oui, en quoi sont-elles modifiées ? Plus généralement, dans le cadre périodique, quelle est l'évolution du fluide à partir d'une condition initiale du fluide loin de l'équilibre ?

Ces questions sont à étudier numériquement, et demandent une résolution soignée des chocs. C'est un travail à part entière, qui est en cours [Som04].

Analytiquement, en revanche, nous pouvons continuer dans la même démarche pour étudier l'ajustement dans un fluide stratifié. Ceci est abordé dans les deux chapitres suivants.

⁹quoiqu'avec une loi de décroissance qui pouvait différer de celle obtenue pour la dispersion d'ondes sur fond de fluide au repos.

Chapitre 3

Ajustement géostrophique dans un fluide à deux couches

'Quand le ciel bas et lourd pèse comme un couvercle'

Charles Baudelaire.

L'étude du modèle unidimensionnel de l'eau peu profonde nous a permis de mieux comprendre l'ajustement géostrophique d'anomalies frontales et notamment la séparation d'un état arbitraire rectiligne en une partie lente et une partie rapide. Il manque cependant à ce modèle une description, aussi rudimentaire soit-elle, de la stratification.

Le premier pas dans la description des effets liés à la stratification est l'utilisation d'un modèle de l'eau peu profonde à deux couches. Ce modèle sera considéré avec un toit rigide : d'une part, c'est avant tout la composante barocline de l'écoulement qui nous intéressera et d'autre part les études de l'ajustement géostrophique auxquelles nous ferons référence dans le chapitre suivant sont effectuées dans ce cadre.

Le modèle de l'eau peu profonde à deux couches a l'avantage de rester relativement simple, ce qui permet d'avancer analytiquement, et de contenir néanmoins une description de la stratification suffisante pour identifier des différences essentielles par rapport au modèle à une couche [Gil82, ZRJ02].

Nous exposons dans ce chapitre des éléments de l'étude de l'ajustement géostrophique dans le modèle de l'eau peu profonde à deux couches, en insistant sur deux différences essentielles par rapport au modèle à une couche :

- Des ondes peuvent être piégées dans les régions de vorticité anticyclonique suffisamment fortes. Ces ondes, ou modes, sont stables et oscillent à des fréquences inférieures à la fréquence inertielle. Si la vorticité relative est suffisamment forte, certains de ces modes peuvent être instables, indiquant la possibilité dans ce modèle de l'instabilité symétrique, qui est absente du modèle à une couche.
- Le modèle à deux couches possède, comme son homologue à une couche, des ondes non linéaires stationnaires qui sont solutions exactes des équations. Ces ondes ont dans certains régimes de paramètres des propriétés analogues à celles du fluide à une couche. En revanche, dans d'autres régimes de paramètres, elles peuvent exhiber des propriétés très diff -

rentes, spécifiques à ce modèle. Au total, trois familles d'ondes nonlinéaires sont identifiées.

Dans la section 3.1 ci-dessous, nous présentons le modèle de l'eau peu profonde à deux couches et discutons brièvement de la séparation de l'écoulement en parties lente et rapide. La possibilité d'avoir des modes piégés est présentée et discutée en section 3.2. Les ondes nonlinéaires stationnaires sont analysées en section 3.3. Enfin, un résumé des principaux résultats et une discussion des perspectives est présentée en section 3.4.

Les sections ci-dessous sont basées sur des parties d'un article en préparation [MPZ02], c'est pourquoi elles sont en anglais.

3.1 Formulation of the two-layer model

The primitive equations and their linear analysis are recalled for reference in subsection 3.1.1. The difficulty of using the Lagrangian description of the flow for the two-layer model is exposed in subsection 3.1.2. The separation of the flow into slow and fast parts may nevertheless be carried out along the same lines as in [ZMP02], and sufficient conditions for the existence and uniqueness of the slow part of the flow are obtained.

3.1.1 Primitive equations and linear analysis

The primitive equations for the two-layer rotating shallow water model with no variations in the y direction are :

$$\partial_t u_1 + u_1 \partial_x u_1 - f v_1 + \rho_1^{-1} \partial_x \pi = 0, \quad (3.1a)$$

$$\partial_t v_1 + u_1 (f + \partial_x v_1) = 0, \quad (3.1b)$$

$$\partial_t u_2 + u_2 \partial_x u_2 - f v_2 + \rho_2^{-1} \partial_x \pi + g' \partial_x \eta = 0, \quad (3.1c)$$

$$\partial_t v_2 + u_2 (f + \partial_x v_2) = 0, \quad (3.1d)$$

$$\partial_t (H_1 - \eta) + \partial_x ((H_1 - \eta) u_1) = 0, \quad (3.1e)$$

$$\partial_t (H_2 + \eta) + \partial_x ((H_2 + \eta) u_2) = 0, \quad (3.1f)$$

where (u_1, v_1) are the velocities in the upper layer, (u_2, v_2) the velocities in the lower layer; π is the barotropic pressure imposed by the rigid lid; η is the interface displacement, H_1 and H_2 are the heights of the two fluid layers at rest ($H = H_1 + H_2$ is the total height); finally, g' is the usual reduced gravity : $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$.

The approximation of the rigid lid allows an important simplification, as (3.1e) and (3.1f) can be combined to yield : $((H_1 - \eta) u_1) + ((H_2 + \eta) u_2) = 0$. The physical meaning of this constraint is simply that there is no transverse barotropic velocity, *i.e.* no transverse volume flux. Because of the rigid lid, any such flux would necessarily be constant from $-\infty$ to $+\infty$.

The potential vorticity for each layer has the following expression :

$$q_1 = \frac{f + \partial_x v_1}{h_1}, \quad \text{and} \quad q_2 = \frac{f + \partial_x v_2}{h_2}. \quad (3.2)$$

Once again, as a consequence of the absence of variations in the along-front direction, the transverse velocity has no contribution to the potential vorticity.

We recall below, for reference, the results of the linear analysis of these equations for a fluid at rest. The linearized equations yield :

$$\partial_t u_1 - f v_1 + \rho_1^{-1} \partial_x \pi = 0 , \quad (3.3a)$$

$$\partial_t v_1 + f u_1 = 0 , \quad (3.3b)$$

$$\partial_t u_2 - f v_2 + \rho_2^{-1} \partial_x \pi + g' \partial_x \eta = 0 , \quad (3.3c)$$

$$\partial_t v_2 + f u_2 = 0 , \quad (3.3d)$$

$$-\partial_t \eta + H_1 \partial_x u_1 = 0 , \quad (3.3e)$$

$$\partial_t \eta + H_2 \partial_x u_2 = 0 . \quad (3.3f)$$

Calculation of eigenvectors of the form $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ shows that there are two kinds of solutions : stationary flows in geostrophic equilibrium and inertia-gravity waves.

The stationary solutions in geostrophic equilibrium are in fact exact solutions to the full equations. They are given by :

$$v_1 = \frac{1}{f \rho_1} \partial_x \pi , \quad (3.4a)$$

$$v_2 = \frac{1}{f \rho_2} \partial_x \pi + \frac{g'}{f} \partial_x \eta . \quad (3.4b)$$

These solutions have a signature on potential vorticity.

The fast motions of the linear approximation are inertia-gravity waves ; their structure can be deduced from the following equation, obtained for the variable $U = H_2 u_2 = -H_1 u_1$ by combining (3.3a)-(3.15f) :

$$(\partial_{tt}^2 + f^2)U - c_e^2 \partial_{xx} U = 0 , \quad (3.5)$$

$$\text{where } c_e^2 = g' H_e , \quad \text{with } H_e = \frac{H_1 H_2}{H_1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} H_2} .$$

H_e is the equivalent height for the baroclinic modes of the model, it is used to define $c_e^2 = g' H_e$, which enters the dispersion relation

$$\omega^2 = f^2 + c_e^2 k^2 , \quad (3.6)$$

for waves with frequency ω and wavenumber k .

3.1.2 Existence of an adjusted state

It appeared in the study of the one-layer model that the Lagrangian description was very advantageous as it allowed to separate the flow into a fast and a slow (stationary) component. In the two-layer model, the Lagrangian approach is no longer so simple : we can follow particles in each layer, noting $X_i(x, t)$ the position at time t of a particle initially at x in layer i . Similarly, $h_i(x, t)$ is the height at time t of layer i at the location occupied by the fluid column initially at x in layer i . Following the same lines as in the one-layer model, we can obtain, for each layer an equation equivalent to 2.8 :

$$\ddot{X}_1 + f^2 X_1 + \frac{1}{\rho_1 X_1'} \pi' = f(v_{1I} + f x) , \quad (3.7a)$$

$$\ddot{X}_2 + f^2 X_2 + \frac{1}{\rho_2 X_2'} \pi' + g' \frac{1}{X_2'} \left(\frac{h_{2I}}{X_2'} \right)' = f(v_{2I} + f x) , \quad (3.7b)$$

where the dot denotes derivation relative to time, the prime denotes derivation relative to initial coordinates x , and the subscript I indicates initial conditions.

The above form a set of two equations for three variables : X_1 , X_2 and π . The additional equation will come from expressing the constraint that the sum of the heights of the two layers¹ at any one location is constant, equal to H . This becomes extremely involved in the Lagrangian description as $h_1(x, t)$ and $h_2(x, t)$ describe the heights of the layers at different locations (or, in other words, $X_1(x, t) \neq X_2(x, t)$ in general) :

$$h_1(x, t) + h_2(X_2^{-1}(X_1(x, t), t), t) = H. \quad (3.8)$$

Nevertheless, although the writing of the equations in Lagrangian form is less practical, they again make the separation of the flow into a slow stationary part and a fast part obvious. The stationary part, if it exists, is the solution to the stationary part of equations (3.7a)-(3.7b), with constraint (3.8). It is the adjusted state with the same lagrangian distributions of geostrophic momentum and PV distribution as the initial state. It will be called the slow part, or the adjusted state of the system.

As in the one-layer model, it is possible to investigate the conditions for existence and uniqueness of the adjusted part of the flow, through a change of variables, in the Eulerian framework. These will be the conditions for existence and uniqueness of solutions to the equations :

$$\frac{f + \partial_x v_1}{h_1} = Q_1(x), \quad (3.9a)$$

$$\frac{f + \partial_x v_2}{h_2} = Q_2(x), \quad (3.9b)$$

where x is now an Eulerian coordinate, Q_1 and Q_2 are potential vorticity distributions, and where v_1 and v_2 are given by (3.4a) and (3.4b). The equations can then be combined to give two ordinary differential equations :

$$\frac{g'}{f} \frac{d^2 h_1}{dx^2} - (Q_2 + r Q_1) h_1 = -(-f(1-r) + H Q_2), \quad (3.10a)$$

$$\frac{g'}{f} \frac{d^2 h_2}{dx^2} - (Q_2 + r Q_1) h_2 = -(f(1-r) + r H Q_1), \quad (3.10b)$$

where the notation $r = \rho_1/\rho_2$ has been introduced. These equations differ from their one-layer counterpart (equation (35) in the article inserted in section 2.3) in that the forcing on the r.h.s. is not constant.

Now, for an equation of the form $h'' - F(x)h = -G(x)$, by the same method as in [ZMP02], one can show that existence and uniqueness of the solution is guaranteed if F and G have constant asymptotics at $\pm\infty$. Furthermore, the solution is positive if F and G are positive. Hence, for states with localized PV anomalies, and such that

$$Q_1 \geq 0, \quad \text{and} \quad Q_2 \geq (1-r)f/H, \quad (3.11)$$

¹The height h_n of a layer is related to X_n by the conservation of mass, which imposes : $h_n = \frac{h_n I}{X_n}$.

the above equations have unique solutions h_1 and h_2 that are everywhere positive. In other terms, provided the above mentioned conditions are met, it is possible to separate the flow uniquely into a slow and a fast part. These conditions are a little more restrictive than those found for the one-layer model². As in the one-layer model, the evolution of the fluid from an initial condition where these conditions are not met is an open question.

3.2 Influence of the jet on inertia-gravity waves in the 2-layer model

We present below a perturbative analysis of the adjustment of small perturbations to an adjusted state, or, equivalently, an analysis of linear waves on the background of a jet in the two-layer model. The equations are scaled (subsection 3.2.1) and linearized about an adjusted jet (subsection 3.2.2). Modes that oscillate with subinertial frequency and are trapped in the region of strong anticyclonic relative vorticity are shown to exist (subsection 3.2.3). Their link to symmetrically unstable modes is discussed. These phenomena were absent in the one-layer model.

3.2.1 Scaling

We scale the primitive equations (3.1a)-(3.1f), scaling u_i as U , v_i as V , and η as $Min(H_1, H_2)$ to allow for large displacements of the interface ; we obtain :

$$\delta \partial_t u_1 + \delta^2 Ro u_1 \partial_x u_1 - v_1 + \partial_x \pi = 0, \quad (3.12a)$$

$$\partial_t v_1 + \delta u_1 (1 + Ro \partial_x v_1) = 0, \quad (3.12b)$$

$$\delta \partial_t u_2 + \delta^2 Ro u_2 \partial_x u_2 - v_2 + r \partial_x \pi + \frac{Bu}{Ro} \partial_x \eta = 0, \quad (3.12c)$$

$$\partial_t v_2 + \delta u_2 (1 + Ro \partial_x v_2) = 0, \quad (3.12d)$$

$$\partial_t (\alpha - \eta) + \delta Ro \partial_x ((\alpha - \eta) u_1) = 0, \quad (3.12e)$$

$$\partial_t (1 - \alpha + \eta) + \delta Ro \partial_x ((1 - \alpha + \eta) u_2) = 0, \quad (3.12f)$$

where the following nondimensional parameters have been introduced :

$$\delta = \frac{U}{V} \quad \text{is the ratio of characteristic cross-jet and along-jet velocities,} \quad (3.13a)$$

$$Ro = \frac{V}{fL} \quad \text{is the along jet Rossby number,} \quad (3.13b)$$

$$Bu = \frac{g' Min(H_1, H_2)}{f^2 L^2} \quad \text{is the Burger number,} \quad (3.13c)$$

$$\alpha = \frac{H_1}{H} \quad \text{and} \quad r = \frac{\rho_1}{\rho_2}. \quad (3.13d)$$

²The more restrictive condition on Q_2 reflects the limitations imposed on the interface displacement by the boundary conditions : because of the rigid lid, the interface height can not exceed H . The precise expression for the constraint can be understood by considering the adjustment of situations with an initially flat interface, and an unbalanced jet in the lower layer.

The ratio δ will be supposed small, and will be used as the small parameter for linearizing. Situations considered are those with strong horizontal shear, and hence we take $Ro \sim 1$. We will keep the parameters r , Bu and α as such in the equations; unlike parameter δ , they do not change the order of the system regarding time derivatives.

3.2.2 Linearization around a jet

We take as background state an adjusted jet, present in both layers. The adjusted jet (*cf* eq. (3.4a)-(3.4b)) is described by velocities V_{ig} , barotropic pressure Π and the heights of both layers h_{ig} :

$$V_{1g} = \partial_x \Pi , \quad (3.14a)$$

$$V_{2g} = r \partial_x \Pi + Bu \partial_x h_{2g} . \quad (3.14b)$$

Note that h_{1g} and h_{2g} are not independent as $h_{1g} + h_{2g} = 1$. Neglecting, in the scaled equations, all terms quadratic in δ , the following linear equations are obtained for perturbation quantities u_i , v_i , η and π :

$$\partial_t u_1 - v_1 + \partial_x \pi = 0 , \quad (3.15a)$$

$$\partial_t v_1 + u_1 (1 + \partial_x V_{1g}) = 0 , \quad (3.15b)$$

$$\partial_t u_2 - v_2 + r \partial_x \pi + Bu \partial_x \eta = 0 , \quad (3.15c)$$

$$\partial_t v_2 + u_2 (1 + \partial_x V_{2g}) = 0 , \quad (3.15d)$$

$$\partial_t \eta - \partial_x (h_{1g} u_1) = 0 , \quad (3.15e)$$

$$\partial_t \eta + \partial_x (h_{2g} u_2) = 0 . \quad (3.15f)$$

The above equations can be combined into a single equation for the variable $U = h_{2g} u_2 = -h_{1g} u_1$:

$$Bu \partial_{xx}^2 U \quad (3.16)$$

$$- \left[\left(\frac{r h_{2g} + h_{1g}}{h_{1g} h_{2g}} \right) (\partial_{tt}^2 + 1) + r \partial_{xx}^2 \Pi \left(\frac{1}{h_{1g} h_{2g}} \right) + Bu \frac{\partial_{xx}^2 h_{2g}}{h_{2g}} \right] U = 0 .$$

It is easy to check that for $h_1 \rightarrow \infty$, we find the corresponding equation for the one-layer model³, or that, in the absence of a jet, the equation reduces to (3.5).

The above equation can be used along the same lines as equation (22) of section 2.3 to investigate the possibility of localized modes (eq. (25)-(26) of section 2.3). For the same reasons as in the one layer model, such localized modes necessarily have frequencies lower than the inertial frequency. For brevity, we will note

$$F(x) = \frac{r h_{2g} + h_{1g}}{h_{1g} h_{2g}} , \quad (3.17)$$

$$G(x) = r \partial_{xx}^2 \Pi \left(\frac{1}{h_{1g} h_{2g}} \right) + Bu \frac{\partial_x h_{2g}}{h_{2g}} . \quad (3.18)$$

³This equation is

$$\partial_{xx}^2 U - \frac{(1 + \partial_{tt}^2 + \partial_{xx}^2 h_g)}{h_g} U = 0 ;$$

it is not displayed in chapter 2, because only the Lagrangian equations were used there.

We consider a Fourier decomposition of $U(x, t) = \int d\omega (\tilde{U}(\omega, x) e^{-i\omega t} + c.c.)$; for each Fourier component $\tilde{U}(\omega, x)$, equation (3.16) becomes :

$$Bu \partial_{xx}^2 \tilde{U} - (F(1 - \omega^2) + G) \tilde{U} = 0. \quad (3.19)$$

This equation is multiplied by \tilde{U}^* and integrated over the whole domain. For localized modes, the following estimation for ω is obtained :

$$\omega^2 = 1 + \frac{Bu \int |\partial_x \tilde{U}|^2 dx + \int G |U|^2 dx}{\int F |\tilde{U}|^2 dx}, \quad (3.20)$$

where $F > 0$ and G may be negative, particularly in regions where $\partial_{xx}^2 \Pi < 0$. Contrarily to the situation in the one-layer model, we do not arrive here at a contradiction excluding the possibility of trapped waves. It will be possible to have subinertial frequencies, and the above expression suggests that small Bu will be favorable to the existence of such modes. It is shown below, by restricting to the case of a barotropic jet, that such trapped modes do exist, hence pointing to a fundamental difference between the one-layer and two-layer fluid.

3.2.3 Existence of trapped modes

We confirm below that equation (3.16) does have trapped mode solutions with subinertial frequencies by considering the particular case of a barotropic jet as the background flow. Hence there is no displacement of the interface ($\eta^{(0)} = 0$), and equation (3.16) then simplifies to :

$$Bu \partial_{xx}^2 U - [(\partial_{tt}^2 + 1) H_e^{-1} + r \partial_{xx}^2 \Pi (H_1 H_2)^{-1}] U = 0. \quad (3.21)$$

We search for solutions of the form $\tilde{U} e^{i\omega t} + c.c.$. The above equation then becomes :

$$\partial_{xx}^2 \tilde{U} + \frac{1}{Bu} [\omega^2 H_e^{-1} - (H_e^{-1} + (H_1 H_2)^{-1} r \partial_{xx}^2 \Pi)] \tilde{U} = 0. \quad (3.22)$$

This equation has the form of a Schrödinger equation for a particle in a potential $V(x)$:

$$\partial_{xx}^2 \psi + (E - V(x)) \psi = 0, \quad (3.23)$$

with $E = \omega^2 (H_e Bu)^{-1}$ as the energy, and $V(x) = Bu^{-1} (H_e^{-1} + (H_1 H_2)^{-1} r \partial_{xx}^2 \Pi)$ as the potential. This potential has constant asymptotics H_e^{-1} at $\pm\infty$. If the potential has a well below H_e^{-1} , this equation is known (*e.g.* [Mes61]) to have both propagating and localized solutions (modes trapped in the region of the well). The former corresponds to a continuous spectrum of frequencies $\omega^2 \geq 1$. The latter corresponds to a discrete spectrum of possible frequencies $\text{Min}(V(x)) H_e Bu < \omega^2 < 1$.

For our problem, the well corresponds to the region of anticyclonic shear, and the corresponding solutions will be localized modes in the region of anticyclonic shear, oscillating at subinertial frequencies. It is worth noting that small Burger numbers will make trapping easier, which is qualitatively consistent with results found in other regimes of parameters in [RZJ01, ZRJ02].

Furthermore, if the potential is deep enough, it is possible to have modes with $\omega^2 < 0$, *i.e.* unstable modes. This is the symmetric instability. This instability can be understood as a two-dimensional form of baroclinic instability, or as inertial instability along isentropes (see Holton [Hol92], section 9.3). It has been much studied near the Equator for both the atmosphere and ocean [Dun81, HMG97], but it has also aroused interest to explain mesoscale rainbands observed alongside fronts (including moist effects) [BH79, CSV93].

In the one-layer model, a very strong jet could be symmetrically unstable ($\partial_{xx}^2 v < -f$) without this instability manifesting itself because of the constraint $\partial_y \equiv 0$. This constraint made it impossible for two neighbouring columns of fluid to 'exchange' their places. Here in the two-layer model, the possibility of a circulation in the plane transverse to the jet makes it possible for symmetric instability to appear when the relative vorticity is strong enough.

We do not analyse these trapped modes further here and restrict ourselves to indicating that they are possible. The equivalent equation is analysed in greater detail in the case of the stratified fluid (section 4.4), for which vertical propagation will also be investigated (section 4.5).

These trapped oscillating modes and the symmetric instability were absent in the one-layer situation. Here, they may alter considerably the adjustment scenario, as not all of the disturbance will propagate away and disperse. Because of trapped modes, the fluid may oscillate, at subinertial frequencies, for very long times around its adjusted state, making the adjustment *incomplete*.

3.3 Stationary waves of finite amplitude in the 2-layer model

The two-layer model possesses waves of finite amplitude that are exact periodic solutions of the equations of motion. In some regimes of parameters, they are analogous to those found in the one-layer model. However, in other regimes (to be detailed below) they exhibit a different behavior, specific to the two-layer model. Three families of waves are thus identified. The equation for these waves is obtained below in the Eulerian description and using the full dimensional equations in section 3.3.1, and their possible behavior are investigated numerically in 3.3.2.

3.3.1 General equation for the stationary waves

We start from the primitive equations, keeping all variables and parameters dimensional. We seek solutions which are functions of $\xi = x - ct$. Using a prime to denote the derivative with respect to ξ the equations can then be

rewritten :

$$-c u_1' + u_1 u_1' - f v_1 + \frac{1}{\rho_1} \pi' = 0, \quad (3.24a)$$

$$-c v_1' + u_1 (f + v_1') = 0, \quad (3.24b)$$

$$-c u_2' + u_2 u_2' - f v_2 + \frac{1}{\rho_2} \pi' + \frac{g \Delta \rho}{\rho_2} \eta' = 0, \quad (3.24c)$$

$$-c v_2' + u_2 (f + v_2') = 0, \quad (3.24d)$$

$$-c (H_1 - \eta)' + (u_1 (H_1 - \eta))' = 0, \quad (3.24e)$$

$$-c (H_2 + \eta)' + (u_2 (H_2 + \eta))' = 0. \quad (3.24f)$$

The two last equations can be integrated to give expressions of u_1 and u_2 involving η and corresponding integration constants C_1 and C_2 :

$$u_1 = c + \frac{C_1}{H_1 - \eta}, \quad (3.25a)$$

$$u_2 = c + \frac{C_2}{H_2 + \eta}. \quad (3.25b)$$

A first relation can be obtained between the two integration constants by writing that the volume flux of the fluid in the x direction is zero : $u_1 (H_1 - \eta) + u_2 (H_2 + \eta) = 0$. This yields :

$$C_1 + C_2 = -cH. \quad (3.26)$$

Expression (3.25a) and (3.25b) are then injected into (3.24a) and (3.24c) ; these are derived to allow replacement of v_1' and v_2' by the expressions given by (3.24b) and (3.24d). Finally combining the two equations thus obtained, the following single equation for η is found :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\rho_2 C_2^2}{(H_2 + \eta)^2} - \frac{\rho_1 C_1^2}{(H_1 - \eta)^2} \right) + \Delta \rho g \eta \right]'' + f^2 c \left(\frac{\rho_2}{C_2} + \frac{\rho_1}{C_1} \right) \eta \\ & + f^2 \left(\Delta \rho + c \left(\frac{\rho_2 H_2}{C_2} - \frac{\rho_1 H_1}{C_1} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Now we will show that the last term, which is constant, is necessarily zero, and this additional constraint will determine C_1 and C_2 .

We look for wave solutions $\eta(\xi)$ that are periodic, with a certain period λ . Eq. (3.27) can be integrated over one period. The first term is the second derivative of an expression which is λ -periodic, hence its contribution will be zero. The second term is proportional to the integral over one period of the interface displacement η ; this is zero on average, by definition. The last term of the r.h.s., when integrated over one period, therefore gives zero, which yields the following constraint :

$$\Delta \rho + c \left(\frac{\rho_2 H_2}{C_2} - \frac{\rho_1 H_1}{C_1} \right) = 0. \quad (3.28)$$

From the two constraints (3.26) and (3.28), the values of C_1 and C_2 can be determined :

$$C_1 = -cH_1, \quad (3.29a)$$

$$C_2 = -cH_2, \quad (3.29b)$$

giving the following expressions for u_1 and u_2 :

$$u_1 = \frac{-c\eta}{H_1 - \eta}, \quad (3.30a)$$

$$u_2 = \frac{c\eta}{H_2 + \eta}. \quad (3.30b)$$

With expressions (3.29a)-(3.29b), the nonlinear equation obtained for η becomes simpler and more readable. After some manipulations, eq. (3.27) becomes :

$$\left[\frac{H_e}{2} \left(\frac{1}{(1 + \frac{\eta}{H_2})^2} - \frac{r}{(1 - \frac{\eta}{H_1})^2} \right) c^2 + c_e^2 \eta \right]'' - f^2 \eta = 0, \quad (3.31)$$

where r is defined in (3.13d). It is straightforward to check the following :

1. upon linearizing the above equation for small values of η , we obtain the linear equation for baroclinic gravity waves of the system

$$(c_e^2 - c^2)\eta'' - f^2\eta = 0,$$

which gives the expected dispersion relation (cf (3.6)) ;

2. in the limit $H_1 \rightarrow \infty$, equation (3.31) takes the form of the equation for nonlinear waves in a one layer model with fluid height H_2 and gravity g' . For comparison, this equation and its derivation is recalled in appendix A.

An integral of motion may be obtained : multiplying (3.27) by the first derivative of the expression in brackets and integrating, we obtain :

$$\frac{1}{2} \left[\frac{H_e}{2} \left(\frac{1}{(1 + \frac{\eta}{H_2})^2} - \frac{r}{(1 - \frac{\eta}{H_1})^2} \right) c^2 + c_e^2 \eta \right]'^2 - \frac{f^2 H_e c^2}{2} \left[\frac{H_2 + 2\eta}{(1 + \frac{\eta}{H_2})^2} + r \frac{H_1 - 2\eta}{(1 - \frac{\eta}{H_1})^2} \right] - \frac{f^2 c_e^2}{2} \eta^2 = \mathcal{C}, \quad (3.32)$$

where \mathcal{C} is an integration constant. In the above expression, it is possible to isolate η'^2 and study the corresponding equation as one describing the motion of a particle in a potential. The expression of this potential is however complicated, making analytical progress difficult. Hence, we investigate below these nonlinear stationary waves numerically, directly from equation (3.31).

3.3.2 Numerical simulations

Equation (3.27) can be solved numerically, in order to understand the structure of the waves for various parameter regimes. Below we identify various types of waves and give indications of the variety of possible behaviors ; an exhaustive and thorough exploration of parameter space needs complementary study.

We have proceeded in the following way : for fixed parameters describing the fluid (H_1 , H_2 , r , c_e^2 and f), we chose a phase velocity $c > c_e$ and integrate equation (3.27) starting from some initial condition $\eta(0) = 0$ and $\eta'(0) \neq 0$.

The latter is first taken small (we recover solutions similar to sinusoidal ones then) and gradually increased as much as possible.

Proceeding this way, three families of nonlinear waves appear : the amplitudes of waves of family A are bounded by a critical value smaller than H_1 and H_2 ; this value corresponds to cusp formation at the crests of the wave profile. Waves of family B have amplitudes which are only limited by the boundaries of the fluid ($-H_2 < \eta < H_1$), and their profiles never develop cusps. Waves of family C are an upside-down version of waves of family A : they are bounded by a critical amplitude, which corresponds to cusp formation at the troughs of the wave profile.

Waves of family A

These waves are typically found when H_1 is large enough⁴ relative to H_2 . These waves are analogous to those of the one-layer model [Shr81, Shr86, ZMP02], which was expected since, for $H_1 \rightarrow \infty$, equation (3.31) yields the one-layer equation. The amplitude of these waves is bounded by a critical amplitude. When the amplitude approaches this critical amplitude, the height profile of the wave tends to a limiting profile exhibiting cusps at the crests. An illustration of waves of this family is given in figure 3.1.

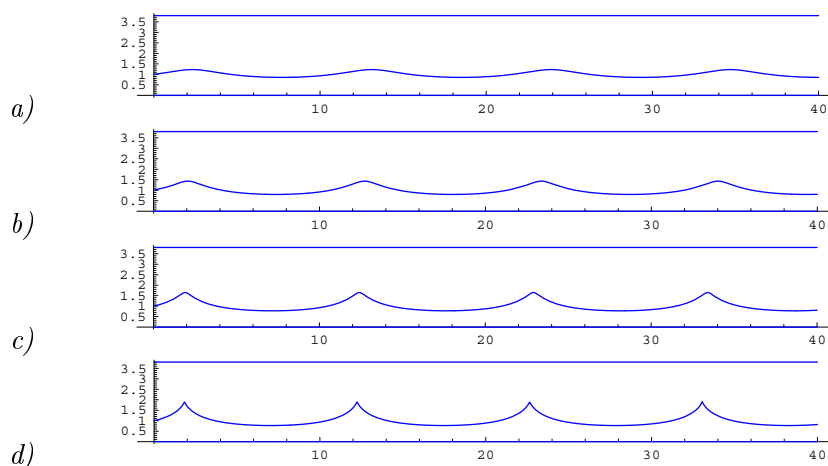


FIG. 3.1 – Waves of family A : all parameters are fixed ($H_1 = 2.8$, $H_2 = 1$, $r = 0.1$, $c = 2$, $c_e = 1$ and $f = 1$), and corresponding waves with larger and larger amplitudes are displayed. Panel d) shows a wave with nearly the limiting amplitude. Initial conditions for integration of (3.27) were $\eta(0) = 0$ for all cases, and the values for $\eta(0)'$ were a) 0.1 ; b) 0.15 ; c) 0.175 ; d) 0.18232.

Waves of family B

For situations where the two layer thicknesses are comparable, $H_1 \sim H_2$, the shape of the waves is modified by the rigid lid. There is no critical amplitude anymore : qualitatively, it appears that the interface 'feels' the top and bottom boundaries, and this prevents the tendency to form cusps.

⁴what this 'enough' precisely means depends on the other parameters.

Wavelength increases with c and with amplitude. An illustration of waves of this family is given in figure 3.2. Note that, although numerically we can

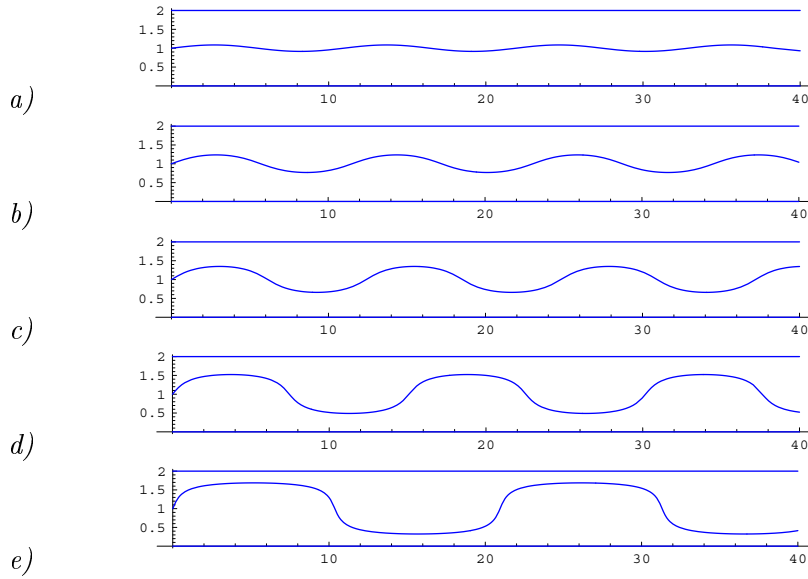


FIG. 3.2 – Waves of family B : these waves ‘feel’ the presence of the rigid lid and are bounded only by the bottom and lid. Parameters are : $H_1 = 1$, $H_2 = 1$, $r = 0.9$, $c = 2$, $c_e = 1$ and $f = 1$ for all cases. Initial conditions for integration of (3.27) were $\eta(0) = 0$ for all cases, and the values for $\eta(0)'$ were a) 0.05 ; b) 0.15 ; c) 0.25 ; d) 0.5 ; e) 1 ;.

obtain profiles with the interface coming arbitrarily close to one or both of the boundaries, such solutions will have unrealistically large transverse velocities (cf (3.30a) and (3.30b)). Onset of Kelvin-Helmholtz instability will limit the waves’ amplitudes for family B. This point requires further study.

Waves of family C

These waves appear for situations with $H_1 \ll H_2$. Qualitatively, they are an upside-down version of family A waves : they are limited by a critical amplitude, but for amplitudes approaching it the interface profile forms cusps in the troughs. Again, the wavelength increases with c and with amplitude. The illustration in figure 3.3 is restricted to the limiting profile, with its tendency to form cusps towards the bottom.

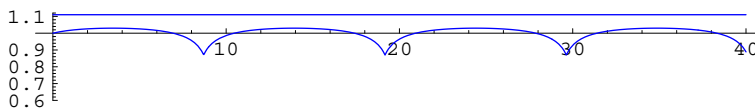


FIG. 3.3 – Waves of family C : only the limiting profile is displayed : note that this is a zoom on the interface. Parameter values are : $H_1 = 0.11$, $H_2 = 1$, $r = 0.9$, $c = 2$, $c_e = 1$ and $f = 1$. Initial condition for integration of (3.27) was $\eta(0) = 0$ and $\eta'(0) = 0.02466$.

Bifurcation in parameter space

For H_1 high enough, it is possible to have as exact solutions both waves of family A (for small c) and of family B (for large c). There is a bifurcation in parameter space as c is increased starting from c_e . Qualitatively, wavelength and limiting amplitude of waves of family A increase with c . Hence, as c is increased, it is possible to find waves with such amplitudes that they will 'feel' the influence of the lid, *i.e.* waves of family B.

The parameters for fig. 3.1 have been chosen precisely such that c is just below the critical phase velocity c_c corresponding to the bifurcation. If c is increased a little bit, keeping all other parameters constant, waves of family B are found, with a dramatically different behavior when their amplitude is increased. This is illustrated in figure 3.4.

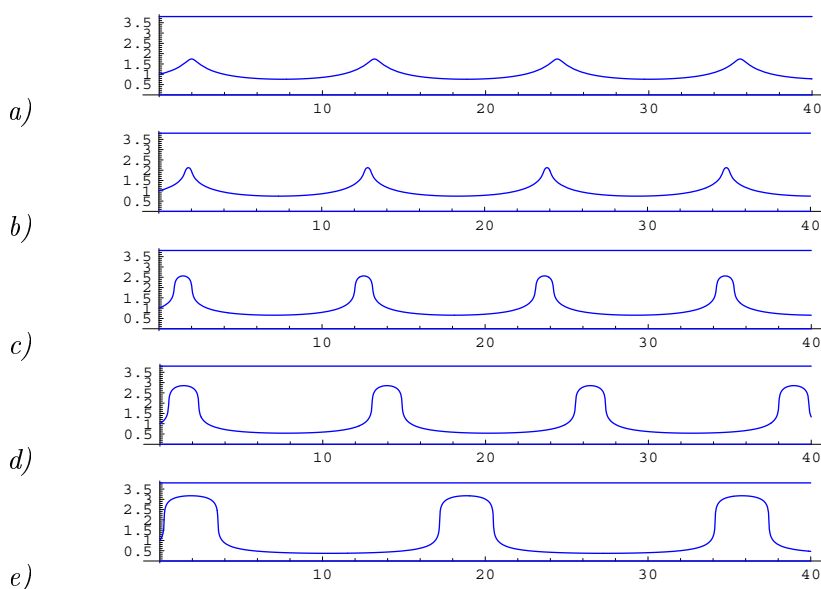


FIG. 3.4 – Nonlinear waves for parameters very close to those used for fig. 3.1. The phase velocity is just taken a little greater ($c = 2.1$ instead of $c = 2$), which will correspond to a longer wavelength. Contrarily to the waves shown in fig. 3.1, there is no cusp formation (Compare the passage from a) to b) above with the passage from c) to d) in fig. 3.1.). For the chosen values of the parameters ($H_1 = 2.8$, $H_2 = 1$, $r = 0.1$, $c_e = 1$ and $f = 1$) there is a critical phase velocity c_c , between 2 and 2.1 which separates waves of family A and waves of family B. Both are possible in this system. Initial conditions for integration of (3.27) were $\eta(0) = 0$ for all cases, and the values for $\eta(0)'$ were a) 0.18 ; b) 0.2 ; c) 0.3 ; d) 0.5 ; e) 1 ;

Similarly, waves of families B and C may both be solutions for certain values of H_1/H_2 . The parameters for figure 3.3 were also chosen so that, by increasing c just a little, waves of family B are obtained. This is illustrated in figure 3.5. It appears from numerical simulations of equation (3.31) that for $H_1 = H_2$ and $r = 0.9$ only waves of family B may exist, which suggests that, for a given system, at most two families (A and B, or B and C) may exist.

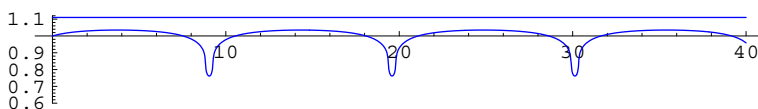


FIG. 3.5 – Profile of a wave of family B in the same system as the one of figure 3.3, but with a slightly increased phase velocity $c = 2.05$. Initial conditions for integration of (3.27) was $\eta(0) = 0$ and $\eta'(0) = 0.03$.

The nonlinear waves found in the 2 layer model display a rich variety of behaviors, some of which are very different from what was observed in the one layer model. These waves may have an important role for adjustment in a periodic domain. Further study will be necessary to determine what family is possible as a function of parameters, and to understand, in particular, how they may interact.

3.4 Conclusions et perspectives

Le modèle unidimensionnel du fluide à deux couches nous a permis d'étudier les différences essentielles introduites dans le scénario d'ajustement par la stratification par rapport au fluide à une couche. Il a été montré, suivant les mêmes lignes que dans le chapitre précédent, que pour des perturbations localisées dont la PV vérifie $Q_1 \geq 0$ et $Q_2 \geq (1-r) f/H$, la partie lente est définie de manière unique. Ici encore, la question de l'ajustement de conditions initiales ne vérifiant pas ces conditions reste ouverte.

Nous avons prouvé l'existence de modes oscillant à des fréquences subinertielles, piégés dans les régions de vorticité relative anticyclonique. Lorsque la vorticité anticyclonique est suffisamment intense, certains de ces modes sont instables : contrairement au fluide à une couche, l'instabilité symétrique est ici possible. L'existence de modes piégés modifiera considérablement le scénario d'ajustement d'un jet proche de l'équilibre : une fraction de la composante rapide de l'écoulement va se trouver piégée dans la région anticyclonique, et y demeurer, oscillant à des fréquences subinertielles. L'ajustement est alors incomplet. L'analyse des effets nonlinéaires de ces modes piégés n'a pas été présentée dans ce chapitre : cette analyse sera effectuée dans le chapitre suivant, dans le cas du fluide stratifié.

Dans le modèle à une couche, l'ajustement d'une anomalie initiale comportant une région de vorticité potentielle négative était resté une question ouverte ; la question est également ouverte dans le modèle du fluide à deux couches, mais la possibilité de l'instabilité symétrique donnera lieu à des évolutions sans doute différentes de celles du fluide à une couche.

Des solutions exactes des équations (ondes d'amplitude finie) ont été trouvées. La connaissance de ces solutions est importante pour l'étude de l'ajustement dans un cadre périodique. Leurs profils peuvent être obtenus à partir d'une unique équation pour le déplacement de l'interface (eq. (3.31)). Ces ondes ont toujours des vitesses de phase supérieures à $c_e^2 = gH_e$, et leurs propriétés varient selon les valeurs des paramètres. Trois familles d'ondes ont été identifiées ; le plus simple pour présenter ces trois familles est de considérer le rapport des hauteurs moyennes des deux couches :

1. Lorsque H_1 est suffisamment grande devant H_2 , les ondes nonlinéaires (famille A, *cf* 3.3.2) sont analogues à celles existant dans le modèle à une couche : leur amplitude est limitée par une valeur critique, et leurs profils développent des crêtes anguleuses lorsqu'on s'approche de cette valeur critique (*cf* la figure 3.1).
2. Lorsque H_1 et H_2 sont de même ordre (famille B, *cf* 3.3.2), l'amplitude des déplacements de l'interface n'est plus limité que par les parois horizontales en haut et en bas (*cf* la figure 3.2). Ces ondes 'sentent' en quelque sorte ces parois.
3. Lorsque H_1 est faible devant H_2 (famille C, *cf* 3.3.2), les ondes sont analogues à celle de la famille A, mais à l'envers : elles sont bornées par une amplitude critique ; lorsque leur amplitude s'en approche, les creux tendent vers des profils anguleux (*cf* la figure 3.3).

La classification des ondes nonlinéaires stationnaires proposée ci-dessus a été présentée en considérant les différentes situations possibles pour le rapport entre les épaisseurs des deux couches. Pour une situation donnée, avec H_1 et H_2 fixés, il a été montré qu'il était possible que les équations acceptent deux familles d'ondes nonlinéaires comme solutions (*cf* 3.3.2).

L'étude de ces ondes est, à notre connaissance, nouvelle. Elle doit être poursuivie afin de déterminer notamment :

- comment ces différentes ondes interagissent-elles, notamment dans les situations où deux familles sont solutions ?
- pour l'ajustement géostrophique dans un cadre périodique, quel rôle jouent ces ondes ? Existente-elles toujours lorsque la vortacité potentielle n'est plus uniforme ? Si oui, comment sont-elles modifiées ?

La stratification a introduit, par rapport au fluide à une couche étudié dans le chapitre 2 de profondes différences. Nous retrouverons dans l'étude de l'ajustement géostrophique dans un fluide continuellement stratifié (chapitre suivant) les modes piégés, qui seront étudiés plus en détail.

Chapitre 4

Ajustement géostrophique dans un fluide continûment stratifié

L'étude du modèle à deux couches a constitué une première étape pour analyser les phénomènes nouveaux, dûs à la stratification, qui modifient l'ajustement par rapport au fluide à une couche. Nous complétons dans le présent chapitre l'approche théorique de l'ajustement géostrophique d'anomalies frontales par l'étude d'un fluide continûment stratifié, toujours sans variation dans la direction du front ($\partial_y(\dots) \equiv 0$).

Cette configuration a été utilisée notamment pour étudier la frontogénèse de déformation à l'aide de l'approximation semi-géostrophique [HB72, Cul83, CP84], et aussi l'ajustement géostrophique de forts gradients horizontaux de température potentielle¹ [Ou84, BW95, WB95, Kal98, Kal00]. Dans ces études de l'ajustement géostrophique, la démarche est *diagnostique* : un état 'final' est déterminé à partir de l'état initial, sans considérer le processus d'ajustement lui-même, et sans montrer que cet état final est atteint. Ce contexte est brièvement rappelé en section 4.1 afin de faciliter, dans la suite, la discussion de la séparation de l'écoulement en parties lente et rapide.

Comme pour le fluide à une couche, la description lagrangienne de l'écoulement peut être utilisée ici. Elle permet de séparer sans ambiguïté une partie lente (que nous appellerons aussi état ajusté) et une partie rapide. La détermination de cet état ajusté et les conditions d'existence sont examinées successivement (section 4.2) dans les approximations du fluide à vorticité potentielle nulle ou uniforme et dans le cas général avec vorticité potentielle arbitraire mais strictement positive.

Dans le deuxième volet de notre étude, l'ajustement de petites perturbations autour d'un état d'équilibre est analysé perturbativement (section 4.3). Nous revenons pour cette partie aux coordonnées eulériennes, qui sont suffisantes si l'on choisit convenablement les conditions initiales, et ont l'avantage d'être plus familières. Une équation décrivant la dynamique, lente et rapide, de la circulation transverse est obtenue, mais elle est, dans le cas général, trop compliquée pour avancer analytiquement. L'étude de l'ajustement est donc poursuivie pour des perturbations autour d'un jet presque barotrope

¹ou, dans un contexte océanographique, des gradients horizontaux de densité. De manière générale, lorsque nous mentionnons et comparons des résultats d'études antérieures dans ce chapitre, nous réécrivons les résultats connus dans nos notations pour faciliter la lecture de l'ensemble.

dans la section 4.4. Nous montrons l'existence de modes piégés dans la région anticyclonique du jet, prolongeant ainsi à des situations à forts nombre de Rossby les résultats obtenus par Kunze [Kun85]. La structure de ces modes piégés et leurs effets nonlinéaires sur la partie lente sont analysés en détail. La propagation d'un paquet d'ondes subinertielles, piégées dans la région anticyclonique d'un jet variant lentement sur la verticale, est étudiée à l'aide d'une approximation WKB (section 4.5). Il est suggéré que les bords supérieurs et inférieurs de la région anticyclonique du jet jouent un rôle particulier vis-à-vis de ces ondes.

4.1 Frontogénèse(s) dans un fluide continûment stratifié bidimensionnel

Le fluide continûment stratifié sans variation dans une direction horizontale a été utilisé pour étudier la frontogénèse, notamment sous l'effet d'un champ de déformation [HB72, Hos82, Cul83, CP84, Ped87], mais aussi pour étudier de manière diagnostique l'ajustement de gradients horizontaux de température potentielle ou de densité [Ou84, BW95, WB95, Kal98, Kal00]. Il sera souvent fait référence à ces travaux dans la section 4.2, et ils sont par conséquent brièvement présentés et discutés ci-dessous.

4.1.1 La description semi-géostrophique de la frontogénèse de déformation

L'approximation semi-géostrophique (SG), comme l'approximation quasi-géostrophique (QG), ne décrit que la partie lente de l'écoulement, excluant, par le choix de l'échelle de temps, les mouvements rapides tels que les ondes d'inertie-gravité (*cf* section 1.2).

Dans l'approximation SG, les accélérations agéostrophiques ($D\mathbf{v}_{ag}/Dt$) sont négligées, mais la vitesse agéostrophique est retenue pour calculer l'advection. Ainsi, la dérivée totale s'écrit :

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla + \mathbf{v}_{ag} \cdot \nabla + w \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.1)$$

Ceci fait de l'approximation SG un cadre adapté pour étudier des situations frontales : les très forts gradients dans la direction transverse font que les vitesses agéostrophiques transverses, même si elles sont faibles devant la vitesse du jet, ont un rôle important pour l'advection.

Hoskins & Bretherton (HB) [HB72] ont considéré la frontogénèse de déformation à l'aide de cette approximation, pour un fluide sans variation dans la direction du front ($\partial_y \equiv 0$). La vorticité potentielle SG a pour expression (eqs. (2.25) et (3.9) dans [HB72]) :

$$q = \frac{1}{r(z)} \left(\left(f + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad (4.2)$$

où $r(z)$ est une pseudo-densité qui vaudra 1 dans le cadre de notre étude ci-dessous (approximation de Boussinesq). Dans cette expression entrent v , vitesse parallèle au jet, et la température potentielle θ . Ces deux variables sont reliées au géopotential ϕ par les équilibres géostrophiques ($v = f^{-1} \partial_x \phi$)

et hydrostatiques ($\theta = \theta_0/g \partial_z \phi$), qui, combinés, donnent le vent thermique. En injectant ceci dans l'expression (4.2), une équation de Monge-Ampère est obtenue :

$$\left(f^2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x \partial z}\right)^2 = \frac{fg}{\theta_0} r q. \quad (4.3)$$

Cette équation est utilisée par HB pour suggérer, en s'appuyant sur un théorème de Heinz [Hei61], que s'il apparaît dans l'écoulement une discontinuité, ce sera sur les bords du domaine, ou au niveau d'une discontinuité de la PV.

Pour décrire l'évolution du fluide sous l'effet du champ de déformation de grande échelle, HB utilisent la description lagrangienne de l'écoulement : celle-ci fait pleinement usage des conservations pour la vorticité potentielle et la température potentielle, et de l'évolution (connue) du moment géostrophique pour chaque particule. Le champ de déformation tend à faire augmenter les gradients dans la direction transverse ; HB décrivent l'intensification de ces gradients par la circulation agéostrophique jusqu'à la formation en un temps fini d'une discontinuité dans les champs de v et θ sur les bords (frontogénèse). En particulier, ils obtiennent explicitement l'état du système à chaque instant pour des fluides à vorticité potentielle nulle ou uniforme. Dans tous les cas, HB arrêtent leur description à la formation d'une discontinuité au bord du domaine.

Cullen, Purser et Norbury [Cul83, CP84, CP89, CNP91] ont proposé une description de l'évolution du fluide dans l'approximation SG pour des temps ultérieurs à la formation de la discontinuité. Après cet instant, l'état du fluide peut être décrit si l'on incorpore une surface de discontinuité dans les champs de v et θ , qui part du bord du domaine vers l'intérieur du fluide. Une partie du fluide qui était initialement sur les bords se trouve aspiré, le long de cette discontinuité, vers l'intérieur du fluide. La construction d'une telle solution est expliquée en détail par Cullen & Purser [Cul83, CP84] pour des fluides ayant initialement des distributions de moment géostrophique et de température potentielle constantes par morceaux. L'état du fluide à un instant donné est obtenu en *réarrageant* les éléments de fluide de manière à obtenir une solution pour ϕ de l'équation de Monge-Ampère (4.3) en respectant les conservations de la température potentielle et du moment géostrophique ; les dérivées de cette solution peuvent être discontinues, et les sauts de température et de vitesse au niveau des ces éventuelles discontinuités doivent obéir à la relation de Margules [Gil82].

Physiquement, Cullen, Puser et Norbury [CP89, CNP91] avancent que ces solutions comportant des discontinuités peuvent décrire en première approximation l'état du fluide : des phénomènes dissipatifs ne permettront certes pas la formation d'une véritable discontinuité dans le fluide, mais ces phénomènes n'occuperont qu'une petite fraction du volume du fluide et ne modifieront pas l'évolution à grande échelle de l'écoulement.

4.1.2 Ajustement géostrophique de gradients horizontaux de densité ou de température potentielle

Plusieurs auteurs ont étudié de manière *diagnostique* l'ajustement géostrophique d'un fluide continûment stratifié sans variation dans une direction.

Toutes ces études se basent sur les conservations de la vorticité potentielle, du moment géostrophique et de la température potentielle pour obtenir un état 'final' du fluide à partir de l'état initial, sans décrire le processus d'ajustement lui-même. La question de savoir si cet état final est atteint n'est pas traitée dans ces études.

Les premières études de l'ajustement géostrophique de gradients horizontaux de densité avaient pour but d'expliquer la forme observée des fronts de densité auprès des côtes dans les lacs ou dans l'océan, et utilisaient des modèles comportant deux ou trois régions de densité homogène, sans variations dans une direction. Ainsi, Csanady [Csa71] a étudié l'ajustement d'un fluide composé de deux régions de densité différentes, initialement au repos et séparée par une interface verticale. Dans l'état final, les sauts de vitesse et de densité à l'interface satisfont la relation de Margules. Csanady retrouve ainsi la forme en 'S' des fronts de densité observés au printemps sur les bords du lac Ontario, où les eaux peu profondes du bord se réchauffent plus vite que le du lac, créant un fort contraste horizontal de densité qui s'ajuste. Dans l'océan, l'apport d'eau douce des estuaires peuvent créer des contrastes horizontaux de salinités se manifestant par des fronts ayant une structure semblable. Ce modèle a été amélioré pour inclure l'effet d'une tension de surface due aux vents parallèles à la côte [Csa78]. Hsueh & Cushman-Roisin [HCR83], motivés notamment par des observations de fronts océaniques près du talus continental, ont analysé l'effet de la topographie du fond, en considérant un fond ayant une pente constante par morceaux. Dans le même but, Ou [Ou83] a examiné l'ajustement lorsque le fond comporte une marche. L'ajustement dans un fluide composé de trois régions homogènes a été analysé par Van Heijst [Hei85] : dans l'état initial, une région au repos comportant deux couches de densités différentes, superposées, est séparé d'une région homogène ayant une densité intermédiaire. Enfin, nous pouvons mentionner que ces modèles ont également été utilisés dans d'autres but : notamment Stommel & Veronis [SV80] ont analysé le transport barotrope que pouvait occasionner l'ajustement d'un gradient horizontal de densité dans des fluides composés de deux ou trois régions homogènes.

Les modèles qui nous intéresseront dans la suite sont ceux pour lesquels la variation de la densité est continue. Le modèle d'ajustement sur fond plat de Csanady [Csa71] est amélioré par Ou [Ou84] qui a considéré l'ajustement d'un gradient horizontal continu de densité pour un fluide initialement au repos. Il décrit analytiquement l'état 'final' quand celui-ci existe, et montre qu'il n'est pas toujours possible de définir un état final continu : quand on augmente l'intensité du gradient initial de densité, il arrive un seuil pour lequel l'état final comporte une discontinuité sur les bords. Pour des gradients initiaux de densité plus intenses, il n'est plus possible de trouver un état 'final' *continu*. Wu & Blumen [WB95] ont généralisé cette étude en considérant des états initiaux à vorticité potentielle nulle avec une distribution de vitesse $v_I(x)$.

Blumen & Wu [BW95] ont considéré l'ajustement d'un gradient initial dans un fluide à vorticité potentielle uniforme : dans l'état initial, le fluide est au repos, avec une stratification constante à laquelle s'ajoute un gradient horizontal² de θ . Ils utilisent comme coordonnées le moment géostrophique

²Température potentielle dans une interprétation atmosphérique, densité dans une interprétation océanographique.

M et la coordonnée verticale finale Z , et obtiennent la distribution finale de θ .

Enfin, Kalashnik [Kal98, Kal00] a proposé une étude de l'ajustement dans un fluide à vorticité potentielle uniforme pour des gradients initiaux de θ au-delà du seuil pour lequel une discontinuité apparaît dans l'état 'final'. Il montre que l'on peut trouver une solution des équations qui respecte les lois de conservation si l'on accepte dans cette solution une discontinuité qui part des bords et rentre vers l'intérieur du fluide. Comme chez Cullen *et al* [CP84, CNP91] l'écoulement au niveau de cette discontinuité obéit à la loi de Margules. Kalashnik décrit cette solution comportant une discontinuité comme 'l'état final' du système, et suggère que l'ajustement géostrophique constitue un mécanisme de frontogénèse autre que la frontogénèse de déformation. Or, un état comportant une discontinuité ne peut pas être considéré un état final du système, des phénomènes turbulents et dissipatifs empêcheront une telle discontinuité de se former. Il faut donc comprendre ces résultats comme indiquant surtout qu'il est possible de trouver des états initiaux pour lesquels il n'existe pas d'état ajusté qui soit continu, et à partir desquels l'évolution du fluide fera vraisemblablement intervenir des déferlements suivis de processus dissipatifs.

Author	Year	PV	v_I	Coordinates	Variables
Ou	1984	Zero	$v_I = 0$	(x, z)	(X, Z)
Wu & Blumen	1995	Zero	$v_I(x)$	(M, Z)	v
Blumen & Wu	1995	Uniform	$v_I = 0$	(M, Z)	θ
Kalashnik	1998, 2000	Uniform	$v_I = 0$	(M, Z)	θ

TAB. 4.1 – *Tableau récapitulatif des études diagnostiques de l'ajustement géostrophique d'un fluide bidimensionnel avec vorticité potentielle nulle ou uniforme.*

Le tableau 4.1 résume quel problème a été traité, et en utilisant quelles coordonnées, par chacun des travaux mentionnés ci-dessus sur l'ajustement dans un fluide stratifié ; (x, z) désignent les coordonnées initiales des particules, (X, Z) désignent les coordonnées courantes ('finales') dans la description lagrangienne, et $M = v + f x$ est le moment géostrophique.

Les parties qui suivent sont basées sur un article en préparation [PZ02a], et sont par conséquent en anglais.

4.2 Nonlinear geostrophic adjustment in the stratified case

In the present and the two following sections, we consider a continuously stratified fluid between a flat bottom and a rigid lid. Here, as in the one layer shallow water model, a Lagrangian description of the flow is possible and has the following advantages :

- essential conservation laws (PV, geostrophic momentum) are explicit in the Lagrangian variables ;

- the full dynamics of the system can be reduced to only two equations for the Lagrangian positions of particles ; moreover, these may be reduced to a single equation when the PV is constant ;
- the form of these equations is such that the separation of the flow into a fast and a slow (or adjusted) component becomes evident.

Below, we present the Lagrangian description of motion (subsection 4.2.2), and focus on the determination of the adjusted part of the flow. The particular cases of initial conditions with zero and uniform potential vorticity are considered in a unified approach in 4.2.3, reproducing known results. In the general case, the adjusted state if it exists is the solution to an elliptic Monge-Ampère equation ; this is discussed in 4.2.4.

4.2.1 The primitive equations

The primitive equations used are inviscid, Boussinesq, hydrostatic and adiabatic (*cf* [HB72, MG80]) :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + f\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} + \nabla_H \phi = 0, \quad (4.4a)$$

$$\phi_z = g \frac{\theta}{\theta_0}, \quad (4.4b)$$

$$\nabla_H \mathbf{u} + w_z = 0, \quad (4.4c)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0, \quad (4.4d)$$

where ϕ is geopotential and g is the gravitational acceleration constant. The meaning of z and θ differ for the oceanic and atmospheric interpretations. For the oceanic context, z is physical height and θ is density. For the atmospheric interpretation of equations (4.4a)-(4.4d), θ is potential temperature, and z is the modified pressure coordinate introduced by Hoskins and Bretherton (pseudo-height) [HB72] :

$$z = z_a \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right], \quad (4.5)$$

with

$$z_a = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0 g}, \quad \text{and} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}. \quad (4.6)$$

In the above, P_0 and ρ_0 are surface pressure and density constants ; c_v and c_p are the specific heats of air at constant volume and constant pressure respectively. Pseudo-height z and physical height h are linked by the following relationship : $\theta dz = \theta_0 dh$.

Invariants of the equations

Extensive use will be made of the Lagrangian invariants of the equations (4.4a)-(4.4d), and they are hence recalled below.

Two invariants of the equations of motion are potential temperature θ and potential vorticity $q = (f\mathbf{k} + \nabla \times \mathbf{u}_H) \cdot \nabla \theta$ (vertical velocity is absent because of the hydrostatic approximation).

Furthermore, we will consider situations with no variation in the along-front (y) direction :

$$\partial_y(\dots) \equiv 0 .$$

The equations then have an additional invariant : the geostrophic momentum $M = v + fx$. Using M , the expression for the potential vorticity is (cf (4.2)) :

$$q = (f + \partial_x v) \partial_z \theta - \partial_z v \partial_x \theta = \frac{\partial(M, \theta)}{\partial(x, z)} . \quad (4.7)$$

Finally, note that the thermal wind balance can also be rewritten using M :

$$f \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial x} . \quad (4.8)$$

The three invariants (θ , q and M) and the above expressions will play an essential rôle in the description of a tentative adjusted state corresponding to a given set of initial conditions.

4.2.2 Lagrangian formulation

In describing adjustment of a stratified fluid towards a geostrophic state, the Lagrangian formulation of the equations, as in the single layer shallow-water context [ZMP02], turns out to be a powerful tool because it makes full use of the conserved quantities.

All quantities being independent of y , we can describe the motion by following the positions of strings of fluid particles parallel to the y axis in the (x, z) plane. These lines of particles always remain straight ; we will simply call them particles.

The independent variables (Lagrangian labels) will be the initial positions x and z , and time t . The dependent variables, $X(x, z, t)$ and $Z(x, z, t)$, define the position at time t of a particle labelled (x, z) . The time derivative of a Lagrangian quantity³ will be denoted by a dot : for example, $\dot{X} = u$. The conservation of θ , M and q takes a simple form in Lagrangian coordinates :

$$\dot{\theta} = 0 , \quad \dot{M} = 0 , \quad \dot{q} = 0 .$$

The incompressibility constraint is :

$$\frac{\partial(X, Z)}{\partial(x, z)} = 1 . \quad (4.9)$$

This equality is used, along with the properties of the Jacobians, to transform the horizontal pressure gradient term in (4.4a), and the vertical pressure gradient in (4.4b). The following equations are thus obtained :

$$\ddot{X} + f^2 X + \frac{\partial(\phi, Z)}{\partial(x, z)} = f(v_I + f x) , \quad (4.10a)$$

$$\frac{\partial(X, \phi)}{\partial(x, z)} = g \frac{\theta_I}{\theta_0} , \quad (4.10b)$$

³By definition, a material derivative.

where $v_I(x, z)$ and $\theta_I(x, z)$ are initial values of the jet velocity and potential temperature.

In the above equations the geopotential ϕ can be eliminated by further differentiation, yielding two nonlinear equations for X and Z :

$$\frac{\partial(X, \ddot{X})}{\partial(x, z)} - \frac{\partial(X, f(v_I + fx))}{\partial(x, z)} + \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial(\theta_I, Z)}{\partial(x, z)} = 0, \quad (4.11a)$$

$$\frac{\partial(X, Z)}{\partial(x, z)} = 1, \quad (4.11b)$$

where only the term \ddot{X} involves time derivatives.

The separation of the flow into a slow (stationary here) and a fast component becomes straightforward in the above equations : the slow component is the solution of the equations without time derivatives, and the fast part is the rest. The slow part thus defined, if it exists, is the stationary state obtained in diagnostic studies of geostrophic adjustment : it is the geostrophically adjusted state that conserves the initial PV and geostrophic momentum. Note that one of the great advantages of the Largangian formulation is that the initial conditions v_I and θ_I are explicitly included in the equations.

Hence, the adjusted state is given by (X_s, Z_s) , which satisfy the equations :

$$-\frac{\partial(X_s, f(v_I + fx))}{\partial(x, z)} + \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial(\theta_I, Z_s)}{\partial(x, z)} = 0, \quad (4.12a)$$

$$\frac{\partial(X_s, Z_s)}{\partial(x, z)} = 1. \quad (4.12b)$$

The first of these equations simply states the thermal wind balance (cf (4.8)). If the fluid reaches a stationary state without dissipation, this state is necessarily the solution to the above equations. However, as before, the problem of existence and uniqueness of solutions arises. This problem is treated below in particular cases, with some indications on what happens in the general case.

Even if the stationary equations do have a unique solution, the following questions arise : does the fluid reach it? On what timescale? What can happen that can prevent the fluid from reaching this solution? Elements of answer to these questions are given in sections 4.3, 4.4 and 4.5.

Finally, note that equations (4.12a) and (4.12b) have been obtained directly from the primitive hydrostatic Boussinesq equations. We will see below that for configurations that are y -independent there is a connection between these exact solutions and approximate solutions obtained from the semi-geostrophic equations.

4.2.3 Uniform potential vorticity cases

Equations (4.12a)-(4.12b) can be simplified considerably in cases of zero potential vorticity (ZPV) and uniform, positive potential vorticity (UPV). These cases have been considered in detail in the existing literature, starting from Hoskins & Bretherton [HB72] in the context of the semi-geostrophic equations. The paper [HB72] was focused on describing frontogenesis due to a deformation field. A diagnostic approach of the geostrophic adjustment of

a horizontal density gradient has been considered by Ou [Ou84] and by Wu & Blumen [WB95] for the ZPV case, and by Blumen & Wu [BW95] and Kalashnik [Kal98, Kal00] for the UPV case.

Below we describe ZPV and UPV cases using the Lagrangian approach, and appropriate changes of coordinates.

The zero PV case

Geostrophic adjustment of a horizontal gradient of density or potential temperature in an initially motionless fluid was investigated by Ou [Ou84], who determined diagnostically the final positions of fluid particles. Wu & Blumen extended this result to a case with an initial barotropic distribution of velocity $v_I(x)$, solving for the final velocity v . We describe below how the solution is obtained for the coordinates of Lagrangian particles (X, Z) for an initial condition including a non-zero velocity $v_I(x)$.

The simplest class of initial states one can chose in order to have zero potential vorticity consists of states with purely horizontal density gradients and no vertical shear in v . Hence we take

$$\theta_I = \theta_I(x) \quad \text{and} \quad v = v_I(x) \quad (4.13)$$

as initial conditions. Injected into eq. (4.12a), this yields⁴ :

$$\frac{\partial X}{\partial z} f(v'_I + f) + \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{g\theta'_I}{\theta_0} = 0, \quad (4.14)$$

where the prime denotes the x -derivatives of functions which depend only on x . For brevity we note $v'_I + f = M'$, and introduce $\Theta' = g\theta'_I/\theta_0$. The above equation can be integrated to give :

$$X = \frac{\mathcal{F}(x)}{fM'} - \frac{\Theta'}{fM'} Z. \quad (4.15)$$

where $\mathcal{F}(x)$ is a function yet to be determined. As M and θ_I depend only on x , the above equation shows that isentropes (or isolines of geostrophic momentum) are straight lines in the final state.

Expression (4.15) can then be injected into eq. (4.11b), yielding an expression that can be integrated for Z :

$$Z^2 \left(\frac{\Theta'}{fM'} \right)' - 2 \left(\frac{\mathcal{F}}{fM'} \right)' Z + 2(\mathcal{G}(x) + z) = 0, \quad (4.16)$$

where $\mathcal{G}(x)$ is a second function of x to be determined. The two functions $\mathcal{F}(x)$ and $\mathcal{G}(x)$ can be determined by requiring that fluid parcels initially on the upper and lower boundaries remain there :

$$Z(x, 0) = 0, \quad \text{and} \quad Z(x, 1) = 1. \quad (4.17)$$

The following expressions are thus obtained :

$$X = x + \mathcal{A}(x) \left(\frac{1}{2} - Z \right), \quad (4.18a)$$

$$Z = \frac{1}{\mathcal{A}'(x)} \left[1 + \frac{1}{2} \mathcal{A}'(x) - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} \mathcal{A}'(x) \right)^2 - 2z \mathcal{A}'(x)} \right], \quad (4.18b)$$

⁴For brevity, we drop the subscript s .

where we introduce the notation $\mathcal{A} = \frac{\theta'}{fM}$. Parcels initially on the horizontal line $z = 1/2$ do not move, as can be seen by taking $Z = 1/2$ in (4.18a).

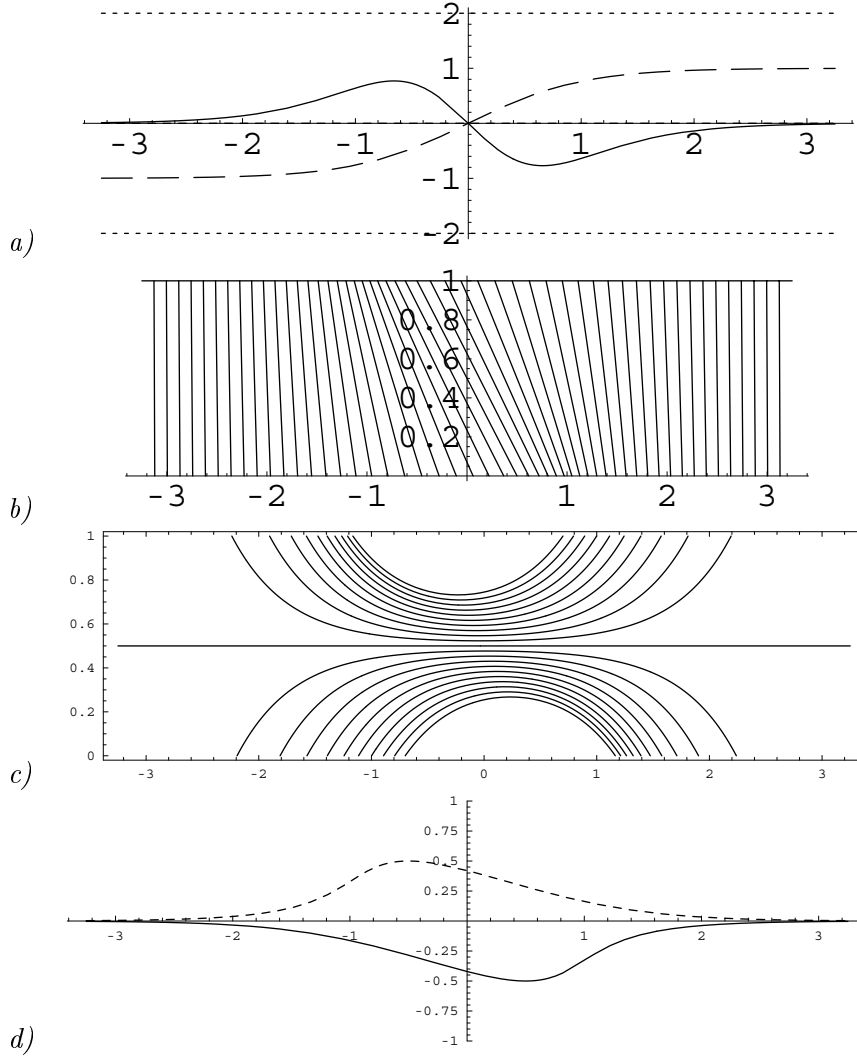


FIG. 4.1 – Geostrophically adjusted state for an initial state with zero potential vorticity and $v_I(x) = 0$. a) displays the profiles for $\theta_I = \tanh(x)$ (dashed; defined up to an additive constant), and \mathcal{A}' (plain); b) displays the positions of the isentropes in the corresponding adjusted state (these isentropes are chosen to be equally spaced in x at $z = 1/2$); c) shows isotachs of the velocity field, and the velocity on top (dotted) and bottom boundaries (plain) as a function of X is shown in d). All constants being taken equal to 1, the threshold for the formation of a discontinuity is $\mathcal{A}' = \pm 2$; this is indicated in a) by dotted lines.

If a discontinuity forms, it will be on a boundary [HB72], where $\partial_x X(x, 0) = 0$ or $\partial_x X(x, z_a) = 0$, *i.e.* where isentropes 'graze each other' [Ou84]. From (4.18a), this will happen if :

$$\frac{\partial X}{\partial x}(x, 0) = 1 \pm \frac{1}{2}\mathcal{A}'(x) = 0, \quad (4.19)$$

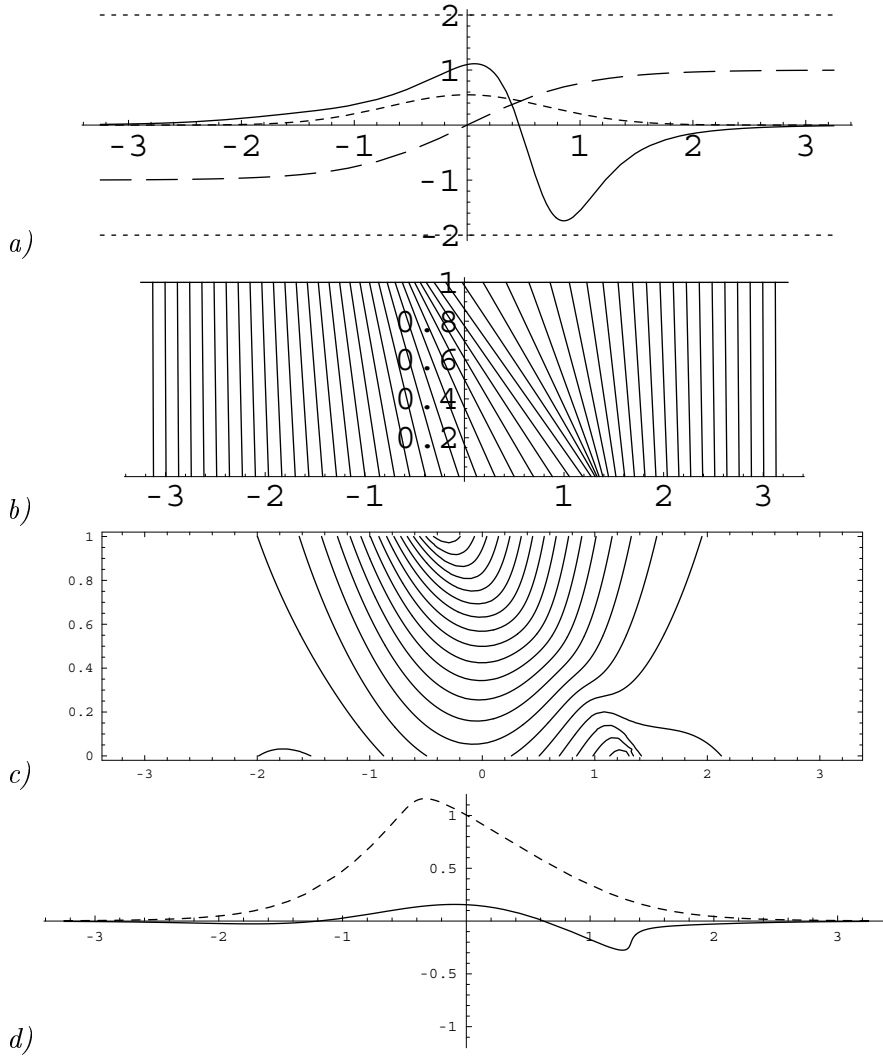


FIG. 4.2 – Same as figure 4.1, but from an initial condition including a non-zero velocity distribution $v_I(x) = 0.55 e^{-x^2}$, shown in a) as the short-dashed line. The region of anticyclonic shear corresponds to the region where θ_I' is negative, and hence favors the formation of a discontinuity near the ground, as can be seen. Note however that the maximum positive value of \mathcal{A}' is also to be found in the anticyclonic region.

or, coming back to original notation :

$$\frac{g}{f\theta_0} \left(\frac{\theta_I'}{f + v_I'} \right)' = \frac{g}{f\theta_0} \left(\frac{\theta_I''}{f + v_I'} - \frac{\theta_I' v_I''}{(f + v_I')^2} \right) = \pm 2. \quad (4.20)$$

This condition was found already in [BW95]. The presence of an initial v_I can be seen to have the following consequences :

1. The slopes of isentropes in regions which were initially anticyclonic $v_I' < 0$ will have shallower slopes than without the initial velocity distribution (cf (4.18a)). v_I acts to locally lower the Coriolis force, hence allowing the fluid to spread further. Conversely, in regions of initial cyclonic shear, this shear enhances locally the Coriolis force and the fluid spreads less, yielding steeper slopes for the isentropes (cf (4.18a)).

2. Because of the above, the regions of anticyclonic shear will be favorable to the appearance of the discontinuity, either on the ground or near the lid.

This is illustrated in figures 4.1 and 4.2. Although the case of zero PV is a crude simplification, it gives indications on the effect of an initial shear that we could not obtain analytically for more realistic situations. In particular, the anticyclonic regions favour the formation of a discontinuity.

We have described above the adjusted state for situations with zero potential vorticity, and identified the condition for the final state to be well-defined ($|\mathcal{A}'| < 2$). The study of the ZPV case shows that it may be impossible to find a smooth adjusted state for initial states of the fluid with strong horizontal gradients of potential temperature. A solution with a discontinuity in the along jet velocity extending into the fluid, as in [Cul83, CP84, Kal98, Kal00], is not acceptable as it is not possible for the fluid to evolve to such a state (turbulent processes would prevent the formation of such a discontinuity). The possibility that no smooth adjusted state exists, even for smooth initial conditions with positive PV (see below) makes a profound difference between adjustment in the one-layer homogeneous fluid and adjustment in the stratified fluid. The adjustment of unbalanced conditions with zero PV has been investigated analytically by Blumen [Blu00] and numerically by Blumen and Williams [BW01] up to the formation of a discontinuity. The adjustment of initial states for which no slow part is defined remains an open question.

Geostrophic adjustment and deformation frontogenesis in the zero potential vorticity case

In the following, we use our notation to describe the approach of Hoskins & Bretherton (HB) [HB72], and show how the semi-geostrophic description of deformation frontogenesis is equivalent to a succession of geostrophic adjustment problems.

In their study, the fluid has initially small nonzero horizontal gradient of θ , no v , and is embedded in a large scale barotropic deformation field. Hence the expression of the full horizontal velocity is ($u = -\alpha x + u'$, $v = \alpha y + v'$). Geostrophic momentum is defined by $M = fx + v'$ (only the part of the y -velocity that is not associated with the deformation field is used). With a proper definition for ϕ , the following equation is obtained :

$$\dot{M} = -\alpha M . \quad (4.21)$$

The potential temperature and potential vorticity are conserved, so that the evolution of the Lagrangian variables θ , q and M is known. As PV is zero, θ is, at any time t , a function of M (cf eq. (4.7)). Now as M varies with time, this function $\theta(M)$ changes, with t as a parameter :

$$\theta(x) = \theta \left(\frac{M(x, 0)}{f} \right) = \theta \left(\frac{M(x, t)}{f} e^\beta \right) , \quad (4.22)$$

$$\text{where } \beta = \int_0^t \alpha(t') dt' . \quad (4.23)$$

At every t , HB answer the question : 'how does the fluid rearrange itself to satisfy thermal wind balance and conserve θ and q ?'

In other words, the semi-geostrophic solution given by HB is a succession of exact solutions to the problem of the geostrophic adjustment with tighter and tighter initial θ -distributions (distributions rescaled by $e^{\beta(t)}$).

The approximation that makes this analogy possible is that HB suppose that at any t , the y -velocity is nearly in geostrophic balance, and their expression for PV, as it only takes into account the geostrophic part of v , is the same as the exact expression for the PV in a stationary adjusted solution of the full equations.

It appears that Ou solved the adjustment of a motionless ZPV fluid independently, as he does not cite [HB72]; other authors [BW95, WB95] who treat geostrophic adjustment in the zero PV frame mention [HB72], but do not mention this analogy.

In fact, this analogy is valid for the general case of arbitrary initial PV. In particular, the description of discontinuities penetrating the fluid by Cullen & Purser [Cul83, CP84] in the semi-geostrophic context parallels that of discontinuities in the 'final' states described by Kalashnik : although the mathematical formulations are not the same, the principles used are : conservations of Lagrangian quantities, and the Margules relation for jumps of M and θ at the discontinuity. This analogy will be important below as it will allow to use in our context the results obtained for the semi-geostrophic problem.

One immediate consequence is the following : in the semi-geostrophic description of deformation frontogenesis, discontinuities are known to form not only in the ZPV fluid, but for any initial condition with a horizontal potential temperature gradient if we let the deformation field act for a long enough time. Hence, what was shown above in the particular case of ZPV is not specific to this case : for an initial condition with a given horizontal gradient of θ , it is always possible to rescale the θ distribution so that no adjusted state will exist. Hence there are initial conditions for which it is impossible to reach a continuous steady state without dissipation and, hence, the slow part of the flow is not well-defined. This makes a profound difference with the one-layer case : there we proved that an arbitrary state with a localized perturbation could be split into a well-defined (existence and uniqueness) slow part and a fast part if the PV was positive.

Uniform potential vorticity case

Geostrophic adjustment of a fluid with uniform PV was described by Blumen & Wu [BW95]. Using geostrophic momentum and final Z as coordinates (*cf* [HB72]), they obtained a Laplace equation for the potential temperature. Below, we show that the determination of the positions of particles in the adjusted state is also equivalent to the resolution of a Laplace equation, but that the Lagrangian formulation has additional advantages : an equation is obtained which describes not only the steady state but the full dynamics of the fluid, and in particular fully nonlinear inertia-gravity waves.

For a state of uniform nonzero PV, we take

$$v_I = 0, \quad \text{and} \quad \theta_I = \theta_0 \left(\frac{N^2}{g} z + \psi(x) \right), \quad (4.24)$$

as initial conditions, where $\psi(x)$ is an arbitrary function, say, with a compact support derivative, and N^2 is constant. Injected into (4.11a), this yields the

following equations for the evolution of the system :

$$\frac{\partial(X, \ddot{X} - f^2 x)}{\partial(x, z)} + g \left(\psi' \frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{N^2}{g} \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = 0, \quad (4.25a)$$

$$\frac{\partial(X, Z)}{\partial(x, z)} = 1. \quad (4.25b)$$

We propose to change variables, and use the final vertical position Z of a fluid particle instead of the initial z (this is, up to a factor f , the same change of variables as that used by HB). Hence the dependent variables are now $X(x, Z)$ and $z(x, Z)$. The Jacobian of the transformation is :

$$\frac{\partial(x, Z)}{\partial(x, z)} = \frac{\partial Z}{\partial z}. \quad (4.26)$$

In this new system of coordinates, equations (4.25a) and (4.25b) become :

$$\frac{\partial(X, \ddot{X} - f^2 x)}{\partial(x, Z)} + g\psi' - N^2 \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad (4.27a)$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial Z} = 0. \quad (4.27b)$$

The advantage of using (x, Z) coordinates is clear, it linearizes the incompressibility constraint. Equations (4.27a) and (4.27b) can be combined into a single equation :

$$\frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial(X, \ddot{X} - f^2 x)}{\partial(x, Z)} + \frac{N^2}{g} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0. \quad (4.28)$$

This equation describes the full dynamics of the UPV case. It is straightforward to check that the linearization of this equation yields the expected equation for linear internal-gravity waves. However, behind its attractive simplicity are hidden important nonlinearities : the time derivative in \ddot{X} is understood as a derivative taken at x and z constant. As the change of variable depends on time, this term becomes complicated and involves important nonlinearities when transformed into derivatives at x and Z constant. Hence, this change of variables is only useful to describe the stationary part of the flow.

Taking the stationary part of this equation, we obtain a Laplace equation which describes the adjusted state to which the fluid will try to adjust :

$$f^2 \frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} + \frac{N^2}{g} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0. \quad (4.29)$$

Boundary conditions will be of Neumann type : they are obtained by using (4.27a) and the fact that particles which are on the boundaries in the adjusted state were initially on the boundaries too : $z(x, 0) = 0$ and $z(x, 1) = 1$. The following boundary conditions are obtained :

$$\frac{\partial X}{\partial Z} = -\frac{g}{f^2} \psi'. \quad (4.30)$$

By standard methods using the Schwarz integral for the strip in the complex plane [LS87], solutions for the Laplace equation (4.29), with boundary conditions given by (4.30), may be obtained.

However, the solution obtained for X does not always correspond to a physical solution. For X to describe a physical solution, the Jacobian (4.26) has to be nonzero everywhere, implying from (4.27b) that

$$\frac{\partial X}{\partial x} > 0$$

everywhere. As illustrated by the particular examples of previous studies [BW95, Kal98, Kal00], there is, for a given form of ψ , a critical intensity of the initial θ -gradient for which a discontinuity appears at the boundary. For initial gradients stronger than that critical value, a well-defined, continuous adjusted state no longer exists.

4.2.4 General case : arbitrary PV

In the general case, if the PV is strictly positive, it is possible, to change variables and use M and θ as spatial coordinates. The Jacobian of the transformation is the PV (*cf* (4.7)). With this change of variables, we will show that the adjusted state of the fluid is a solution of an elliptic Monge-Ampère equation. Known mathematical results on this equation, however, do not allow us to give general conditions for the existence of an adjusted state.

In (M, θ) coordinates, the thermal wind becomes :

$$f \frac{\partial X}{\partial \theta} = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial Z}{\partial M}. \quad (4.31)$$

Hence the final positions of the fluid particles can be considered as the derivatives of some function Ψ :

$$X = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \Psi}{\partial M}, \quad (4.32a)$$

$$Z = f \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}. \quad (4.32b)$$

The transformation from (x, z) to (X, Z) yields :

$$\frac{\partial(X, Z)}{\partial(M, \theta)} \frac{\partial(M, \theta)}{\partial(x, z)} = 1, \quad (4.33)$$

from which we can obtain, replacing X and Z by their expressions (4.32a)-(4.32b) the following Monge-Ampère equation for the function Ψ :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial M^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial M \partial \theta} \right)^2 = \frac{\theta_0}{gf} \frac{1}{q}. \quad (4.34)$$

This equation has oblique Neumann-type boundary conditions⁵ :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}(M_{\pm}(s), \theta_{\pm}(s)) = \frac{z_{\pm}}{f}, \quad (4.35a)$$

$$\left(\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \Psi}{\partial M}, f \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \rightarrow (x(M, \theta), z(M, \theta)) \quad \text{as } M \rightarrow \pm\infty, \quad (4.35b)$$

⁵the condition is on the gradient at the boundary, but not necessarily in the direction normal to the boundary

where $(M_{\pm}(s), \theta_{\pm}(s))$ define the upper and lower boundaries in the (M, θ) space (s is an arbitrary coordinate along those boundaries), x and z are initial positions. In the above boundary conditions, it is assumed that fluid on the boundaries remain there.

Much research has been carried out on the Monge-Ampère equation, particularly in the framework of the semi-geostrophic equations. Solutions to an elliptic Monge-Ampère equation in a bounded convex domain were extensively studied by Cullen and collaborators [Cul83, CP84, CP89, CNP91] in view of extending the semi-geostrophic description of frontogenesis beyond the point where a discontinuity forms. The semi-geostrophic description of the flow involves the resolution, at each timestep, of an elliptic Monge-Ampère equation similar to (4.3). Positiveness of the PV was shown to be a key issue for stability [SC87] and a necessary condition for solving this equation, and it was shown [CP84, CP89, CNP91] that it was always possible to rearrange fluid elements, respecting conservation of potential temperature and the Lagrangian evolution of geostrophic momentum, in order to obtain a solution. However, these solutions may include discontinuities in v and θ , making them unacceptable as adjusted states. Hence, although the parallel between geostrophic adjustment and the semi-geostrophic description of deformation frontogenesis seems promising, it appears that their results cannot be used to determine conditions for the existence of a smooth solution to (4.34), at least not directly.

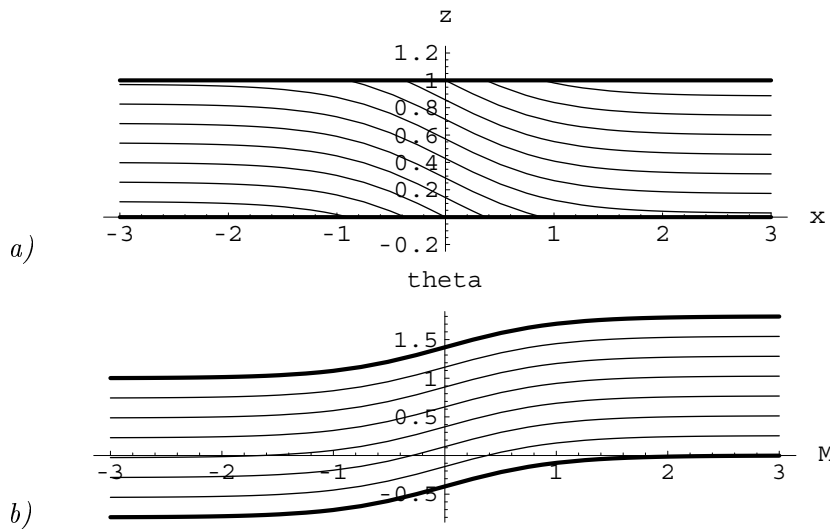


FIG. 4.3 – Description of the initial conditions for the fluid for two sets of coordinates : a) in (x, z) coordinates : the lines shown are isentropes (heavy fluid to the left) ; b) in (M, θ) coordinates : the lines are isolines of z .

To our knowledge, more general mathematical studies on elliptic Monge-Ampère with Neumann boundary conditions [LTU86, Urb98] do not allow us to conclude either, in particular because they are restricted to convex domains. Indeed, our equation does not have standard Neumann boundary conditions, but oblique Neumann type boundary conditions. Moreover, and more importantly, the domain in (M, θ) space is generally not convex, as shown in fig. 4.3.

4.2.5 Summary

The separation of frontal anomalies into a slow and a fast part has been investigated in a continuously stratified fluid with no variations in one direction. The Lagrangian description of the motion gives equations which unambiguously define this separation. However, continuous solutions for the slow part do not always exist, even for smooth initial conditions with positive PV.

In a fluid with zero PV, we obtained the condition for the existence of the slow (or adjusted) part of the flow. This latter was explicitly given. An analogy between the semi-geostrophic description of deformation frontogenesis and the geostrophic adjustment problem was made, providing insight for the latter.

The determination of the adjusted part of the flow in a uniform PV fluid was shown to be equivalent to solving a Laplace equation with Neumann boundary conditions. This equation can be solved using standard methods, and we gave the criterion to decide if the obtained solution corresponds to a physical state of the fluid or not.

Finally, for the general case with strictly positive PV, it was shown that the adjusted state is a solution to a Monge-Ampère equation with oblique Neumann boundary conditions. Mathematical results on the conditions for the existence of smooth solutions to this equation are not known.

Hence there is a fundamental difference between the one or two-layer fluids and the continuously stratified fluid for the problem of separating the flow into slow and fast parts. In the one and two-layer fluids, sufficient conditions for the existence and uniqueness of the adjusted state were obtained. In the stratified case, it is possible that no continuous adjusted state exists for a given initial condition with positive PV.

4.3 Perturbative approach for waves on the background of a jet in the stratified case

In the previous sections, we advanced analytically as far as we could in the description of the adjusted state. Even if a smooth adjusted state exists, however, it is not guaranteed that the fluid will reach it as its final state. A first obstacle will be strongly nonlinear phenomena leading to dissipative processes, linked for instance to wave breaking. Another obstacle is the possibility of trapped waves, which were found already in the two-layer model. It is on these that we focus in the present and following sections.

We attempt to understand analytically the behavior of the fast part of the flow in the late stages of adjustment (*i.e.* when the tentative adjusted state is nearly achieved); equivalently, this is the study of the behavior of linear waves on the background of a jet and of the weak nonlinear effects of these waves on the jet, if any.

The three next sections consider this problem, successively in the general case, for a nearly barotropic jet, and for a jet varying slowly in the vertical. This is investigated using perturbative multi-timescale analysis in Eulerian coordinates, which are sufficient for present purposes. We will use the fact that the transverse velocities u and w have no influence on the adjusted state

of the fluid (*cf* eq. (4.12a)-(4.12b)), and consider an initial state consisting of a jet in geostrophic equilibrium and a perturbation on u and w . In this way, we have an exact knowledge of the slow part of the flow (the adjusted jet), and can hence understand unambiguously the nonlinear contributions of the waves.

The general case is described in the present section, with a deformation field included in order to make the comparison with the Sawyer-Eliassen equation clearer. Unfortunately, it is difficult to progress analytically in the general case. Thus, in section 4.4, the jet is assumed to be nearly barotropic, making it possible to describe analytically the solutions and to examine the effect of the wave-wave nonlinear terms on the slow fields. Finally, in section 4.5, the case of a jet varying slowly in the vertical is considered using a WKB approximation, indicating the possibility of singular levels where the waves dissipate.

4.3.1 Scaling of the equations

The scaling of the primitive equations essentially follows the same lines as for the semi-geostrophic analysis of a front, except that time is scaled as $1/f$, so that fast motions are not filtered out.

The typical x -lengthscale will be L , vertical lengthscale will be H . Velocities are scaled as V in the y -direction (along-front), and as U in the x -direction, with $\delta = U/V$ a small parameter. Vertical velocity is scaled as $W = UH/L$.

The scaled equations are :

$$\delta \partial_t u + \delta^2 Ro (u \partial_x + w \partial_z) u - v + \phi_x = 0, \quad (4.36a)$$

$$\partial_t v + \delta Ro (u \partial_x + w \partial_z) v + \delta u = 0, \quad (4.36b)$$

$$u_x + w_z = 0, \quad (4.36c)$$

$$\partial_t \phi_z + \delta Ro (u \partial_x + w \partial_z) \phi_z = 0, \quad (4.36d)$$

where Ro is the along-front Rossby number (measure of the jet's relative vorticity) :

$$Ro = \frac{V}{fL}, \quad (4.37)$$

which we will suppose to be equal to 1.

The transverse circulation will be described using a streamfunction ψ :

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.38)$$

The motion is considered for a layer of fluid bounded by a flat bottom and a flat, rigid lid, at $z = 0$ and $z = 1$, as in [HB72]. The boundary conditions are that $w = 0$ on both of these horizontal surfaces, imposing that ψ be constant on these surfaces.

The deformation field

For comparison with the classical situation of deformation frontogenesis (*cf* [HB72]), a horizontal deformation field which enhances cross-front gradients can be included : $u_d = -\delta \alpha x$ and $v_d = \delta \alpha y$. This velocity field is

supposed to be barotropic and geostrophic. The associated geopotential anomaly such that advection of the deformation field by itself will not be present in the equations is :

$$\phi_d(x, y) = \delta\alpha xy - \frac{\delta\alpha^2}{2}(x^2 + y^2). \quad (4.39)$$

Below, to restrict attention to the geostrophic adjustment problem, one needs only to set α to zero.

Scaled equations with the deformation field are :

$$-\delta\psi_{zt} - \delta^2 \mathcal{J}(\psi, \psi_z) + \delta^2 \alpha(\psi_z + x\psi_{zx}) - v + \phi_x = 0, \quad (4.40a)$$

$$v_t + \delta \mathcal{J}(\psi, v) + \delta \alpha(v - xv_x) - \delta \psi_z = 0, \quad (4.40b)$$

$$\phi_{zt} + \delta \mathcal{J}(\psi, \phi_z) - \delta \alpha x \phi_{zx} = 0, \quad (4.40c)$$

where \mathcal{J} is the Jacobian operator, and where we have aligned time derivatives, advection terms, terms due to the deformation field, Coriolis and pressure terms.

4.3.2 The equations at successive orders

At the leading order, the equations are diagnostic and yield the geostrophic equilibrium :

$$v^{(0)} = \phi_x^{(0)}, \quad (4.41)$$

where both $v^{(0)}$ and $\phi^{(0)}$ are independent of the fast time t .

Order 1 equations

At order 1, terms describing the advection of the jet velocity and the associated geopotential appear in the second and third equations.

$$-\psi_{zt}^{(0)} - v^{(1)} + \phi_x^{(1)} = 0, \quad (4.42a)$$

$$v_{t_1}^{(0)} + v_t^{(1)} + \mathcal{J}(\psi^{(0)}, v^{(0)}) + \alpha(v^{(0)} - xv_x^{(0)}) - \psi_z^{(0)} = 0, \quad (4.42b)$$

$$\phi_{zt_1}^{(0)} + \phi_{zt}^{(1)} + \mathcal{J}(\psi^{(0)}, \phi_z^{(0)}) - \alpha x \phi_{zx}^{(0)} = 0. \quad (4.42c)$$

The deformation field appears only starting from this order.

Equation for the transverse circulation Our main interest focuses on the equation for the transverse circulation responsible for frontogenesis. Replacing $v^{(0)}$ and $v^{(1)}$ by their expressions given by (4.41) and (4.42a), and taking $-\partial_z(4.42b) + \partial_x(4.42c)$, the following equation for $\psi^{(0)}$ is obtained :

$$\mathcal{L}_{\phi^{(0)}}[\psi^{(0)}] = (1 + \phi_{xx}^{(0)} + \partial_{tt})\psi_{zz}^{(0)} - 2\psi_{xz}^{(0)}\phi_{xz}^{(0)} + \psi_{xx}^{(0)}\phi_{zz}^{(0)} = 2\alpha\phi_{xz}^{(0)}, \quad (4.43)$$

where we have introduced the notation $\mathcal{L}_{\phi^{(0)}}$ for the linear differential operator on the l.h.s. When averaged over fast-time, this equation yields the Sawyer-Eliassen equation (*e.g.* [Hol92]) :

$$\mathcal{L}_{\phi^{(0)}}[\overline{\psi}^{(0)}] = (1 + \phi_{xx}^{(0)})\overline{\psi}_{zz}^{(0)} - 2\overline{\psi}_{xz}^{(0)}\phi_{xz}^{(0)} + \overline{\psi}_{xx}^{(0)}\phi_{zz}^{(0)} = 2\alpha\phi_{xz}^{(0)}. \quad (4.44)$$

Such time-averaging is justified when there is a scale separation between the timescales of waves and of the frontal circulation, which is also a condition for the validity of the semi-geostrophic approximation [Hos82].

When frontogenesis is studied using the semi-geostrophic equations, the Sawyer-Eliassen (SE) equation (4.44) yields diagnostically the transverse circulation needed at each instant to maintain the thermal wind balance for the along-front wind. It is elliptic as long as PV is positive, and, given the boundary conditions, has a non-zero solution (*i.e.* there is a slow transverse circulation $\bar{\psi}^{(0)}$) only if the forcing on the r.h.s. is nonzero (only if $\alpha \neq 0$). This point will be important later on.

Fast motions in the general case

Contrarily to (4.44), equation (4.43) includes a double-time derivative, and hence is not diagnostic. The forcing term on the r.h.s. is slow, hence the solution is the sum of the slow transverse circulation obtained from (4.44), and fast solutions to the homogeneous equation $\mathcal{L}_{\phi^{(0)}}[\psi] = 0$, describing linear waves on the background of the jet.

Some insight can be gained regarding these by considering naively a Fourier decomposition of $\psi^{(0)}$. For the spatial structure of the Fourier component at frequency ω ($\psi_{\omega}^{(0)}(x, z)$) the homogeneous part of eq. (4.43) becomes :

$$(1 + \phi_{xx}^{(0)} - \omega^2)\psi_{\omega,zz}^{(0)} - 2\psi_{\omega,xz}^{(0)}\phi_{xz}^{(0)} + \psi_{\omega,xx}^{(0)}\phi_{zz}^{(0)} = 0. \quad (4.45)$$

This equation is elliptic in variables x and z when

$$(1 + \phi_{xx}^{(0)} - \omega^2)\phi_{zz}^{(0)} - \left(\phi_{xz}^{(0)}\right)^2 = q^{(0)} - \phi_{zz}^{(0)}\omega^2 > 0, \quad (4.46)$$

and hyperbolic otherwise⁶ (in the above, $q^{(0)}$ is the leading order PV). Given the boundary conditions, hyperbolicity of this equation in some region is a necessary condition for a non zero solution, *i.e.* for waves at frequency ω to exist. For $\omega < 1$, this equation may be hyperbolic locally in regions of anticyclonic shear. Now, modes with $\omega < 1$, if they may exist, would be evanescent outside of the anticyclonic region of the jet ; hence they would be trapped.

Qualitatively [KT95], the relative vorticity of the jet modifies locally the Coriolis parameter to the value $1 + v_x^{(0)}$, making it possible to have waves with subinertial frequency $1 + v_x^{(0)} < \omega < 1$ [Kun85].

However, equation (4.46), and more generally equation (4.43), are too complicated in the general baroclinic case to make progress analytically. We cannot determine whether it is possible, inside a localized jet, to have a trapped mode with a fixed spatial structure ($\tilde{\psi}^{(0)} \propto \hat{\psi}(x, z)e^{i\omega t} + c.c.$), although it seems unlikely (*cf* section 4.5). Furthermore, the presence of the time-derivative in (4.43) makes the usual change of variables used to investigate the Sawyer-Eliassen equation ineffective. Hence, the simplifying assumption that the jet is nearly barotropic will be made (section 4.4 onwards) to allow further analytical investigation of this equation.

⁶Away from the jet, $q^{(0)} \sim \phi_{zz}^{(0)}$ and the equation is hyperbolic for all $\omega > 1$.

Order 2 equations

Once the order 1 quantities, among which the waves, are known, it will be necessary to go to next order in order to determine possible nonlinear effects of these waves on the slow geostrophic flow. These are the ones that interest us as they are excluded from the semi-geostrophic equations. The equations at order 2 are :

$$-\psi_{zt}^{(1)} - v^{(2)} + \phi_x^{(2)} = +\mathcal{J}(\psi^{(0)}, \psi_z^{(0)}) - \alpha(\psi_z^{(0)} + x\psi_{zx}^{(0)}), \quad (4.47a)$$

$$v_t^{(2)} + \mathcal{J}(\psi^{(1)}, v^{(0)}) - \psi_z^{(1)} = -\mathcal{J}(\psi^{(0)}, v^{(1)}) - \alpha(v^{(1)} - xv_x^{(1)}), \quad (4.47b)$$

$$\phi_{zt}^{(2)} + \mathcal{J}(\psi^{(1)}, \phi_z^{(0)}) = -\mathcal{J}(\psi^{(0)}, \phi_z^{(1)}) + \alpha x \phi_{zx}^{(1)}. \quad (4.47c)$$

Once again, $v^{(0)}$, $v^{(1)}$ and $v^{(2)}$ are replaced in (4.47b) by their expressions from (4.41), (4.42a) and (4.47a). Then, taking $-\partial_z(4.47b) + \partial_x(4.47c)$, the following equation for $\psi^{(1)}$ is obtained :

$$\mathcal{L}_{\phi^{(0)}}[\psi^{(1)}] = -2\psi_{zztt_1}^{(0)} + \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2, \quad (4.48a)$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 = & -\psi_{zz}^{(0)}\phi_{xx}^{(1)} + 2\psi_{xz}^{(0)}\phi_{xz}^{(1)} - \psi_{xx}^{(0)}\phi_{zz}^{(1)} \\ & - \left[\mathcal{J}(\psi^{(0)}, \psi_{zz}^{(0)}) \right]_t - \left[\mathcal{J}(\psi^{(0)}, \psi_{zt}^{(0)}) \right]_z, \end{aligned} \quad (4.48b)$$

and

$$\mathcal{N}_2 = 2\alpha(\phi_{xz}^{(1)} + x\psi_{xzzt}^{(0)}). \quad (4.48c)$$

The terms in \mathcal{N}_1 and \mathcal{N}_2 on the right of (4.48a) are of five kinds : the terms in \mathcal{N}_1 , present whether there is a deformation field or not, are quadratic combinations of the fast motions, the slow ageostrophic circulation, and the slow order 1 corrections to the jet. The terms in \mathcal{N}_2 indicate the effect of the deformation field and will not be examined here. From here on, the deformation field is omitted.

About potential vorticity

It is worth noting that the inversion of PV does not identify exactly the slow part of the flow in this context. Indeed, the PV of the jet is $\mathcal{O}(1)$, and the trapped waves have a small $\mathcal{O}(\delta)$ signature on PV through advection, as the expansion for $q = (1 + v_x)\phi_{zz} - v_z\phi_{xz}$ shows :

$$q^{(0)} = \left(1 + v_x^{(0)}\right) \phi_{zz}^{(0)} - \left(v_z^{(0)}\right)^2, \quad (4.49a)$$

$$q^{(1)} = \left(1 + v_x^{(0)}\right) \phi_{zz}^{(1)} + v_x^{(1)} \phi_{zz}^{(0)} - 2v_z^{(0)}v_z^{(1)}. \quad (4.49b)$$

The slow part of the flow is exactly known, it is $\phi^{(0)}$ and the associated $v^{(0)}$. Hence the PV linked to the slow part of the flow is exactly $q^{(0)}$, and the waves have a $\mathcal{O}(\delta)$ signature on the PV, given by $q^{(1)}$. As a consequence, the inversion of an instantaneous PV distribution to separate fast and slow parts of the flow will not have precision better than $\mathcal{O}(1)$. Moreover, the 'vortical part' thus obtained would not be slow : it would vary on the same timescale as the waves, as illustrated in the one layer model for strongly nonlinear situations in [KP99].

4.4 Barotropic jet example

Equation (4.43) is too complex to proceed analytically in the general case, but it can be greatly simplified if the jet is considered barotropic at leading order. This assumption will be made in the present section, allowing us to investigate the structure of the waves and the nonlinear terms associated with them. It will be shown that, as in the two-layer model, trapped modes are possible (subsection 4.4.1). It will also be shown that these trapped modes do not force any slow transverse circulation, but that they do induce a second order correction to time averaged fields : for instance, the time-averaged PV in a jet with a trapped mode differs from the PV of the jet alone by a quantity of order 2.

Technically, an important point is to clearly identify a slow and a fast component. Hence, we will consider the geostrophic adjustment of a perturbation of u and w on the background of a nearly barotropic adjusted jet. The latter is defined by $v_I = \partial_x \phi_I$, which we separate⁷ into a barotropic leading order term $v^{(0)}(x) = \partial_x \phi^{(0)}$, and first order baroclinic corrections $v^{(1)}(x, z) = \partial_x \phi^{(1)}$.

4.4.1 First order calculation and existence of trapped modes

The geopotential at leading order describes the jet and the mean stratification which we suppose constant :

$$\phi^{(0)} = \Phi(x) + \frac{z^2}{2}. \quad (4.50)$$

The leading order jet velocity is $v^{(0)} = \Phi'$ where the prime denotes x -derivative $\Phi' = \partial\Phi/\partial x$.

An explicit example which will allow for analytical solution for the waves is considered for illustration. It consists of a compact jet for which the relative vorticity is piecewise linear and antisymmetric relative to $x = 0$. The corresponding profile is shown in (fig. 4.4).

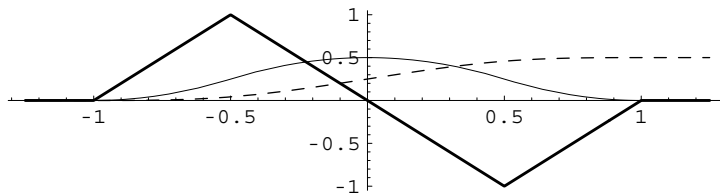


FIG. 4.4 – Profiles used to obtain analytical solutions : Φ (dashed), jet velocity Φ' (plain) and relative vorticity Φ'' (thick) for the jet used for explicit calculations in appendix B. The parameters are the half-width and the maximum value of the relative vorticity; here both are taken equal to 1.

⁷Contrarily to what was done in the previous section, the slow part of the flow will not be described only by $\phi^{(0)}$ and $v^{(0)}$.

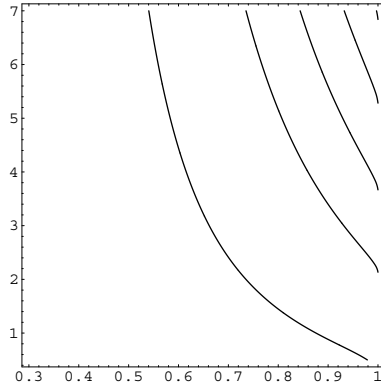


FIG. 4.5 – Dispersion relation for the trapped modes in a jet with profile given in Appendix B, with $M = 0.9$ and $L = 1$; horizontal axis is ω , vertical axis is n . If this had been plotted for greater n , the vertical asymptote $\omega = \sqrt{0.1} = 0.32$ would appear.

Equation for the transverse circulation

The assumption of a nearly barotropic jet greatly simplifies the equation for the fast part of the flow (4.43), which becomes :

$$(1 + \Phi'' + \partial_{tt}) \psi_{zz}^{(0)} + \psi_{xx}^{(0)} = 0. \quad (4.51)$$

This equation allows separation of variables and a regular Sturm-Liouville problem is obtained in the vertical; given the boundary conditions, the family of eigenfunctions are $\sin(n\pi z)$. Hence the solutions will be of the form :

$$\psi^{(0)}(x, z, t) = \sum_n \sin(n\pi z) \psi_n^{(0)}(x, t). \quad (4.52)$$

We search solutions for $\psi_n^{(0)}(x, t)$ with a time dependence of the form $e^{-i\omega t}$. A singular⁸ Sturm-Liouville problem is obtained in the horizontal. We note $\hat{\psi}_{n\omega}(x)$ the horizontal structure of a mode with vertical wavenumber n and frequency ω . The equation for $\hat{\psi}_{n\omega}(x)$ takes the form of a Shrödinger equation for stationary states of a particle in a potential (*e.g.* [Mes61]) :

$$\partial_{xx} \hat{\psi}_{n\omega} - n^2 \pi^2 (1 + \Phi'' - \omega^2) \hat{\psi}_{n\omega} = 0. \quad (4.53)$$

Discussion of this equation becomes easier if we make the factor $n^2 \pi^2$ disappear by rescaling x as $X = n\pi x$, yielding the equation :

$$\psi_{XX} - (1 + \Phi''(X/n\pi) - \omega^2) \psi = 0. \quad (4.54)$$

Here the potential is clearly identified as $1 + \Phi''(X/n\pi)$, and the eigenvalues are the ω^2 . For any given profile of Φ , the depth of the potential will always be the same, but its width will depend on the vertical wavenumber $n\pi$: the smaller the vertical scale of the waves, the wider the potential.

It is known that the Shrödinger equation (4.54) has a continuous and a discrete spectrum (*e.g.* [Mes61]) of eigenvalues ω^2 . In our case, both asymptots of the potential $(1 + \Phi'')$ are equal to one; hence, for a given n , we have

⁸with $x \in]-\infty, +\infty[$

- a continuous spectrum of solutions with $\omega > 1$. This part of the spectrum is doubly degenerate (two independent solutions for each eigenvalue ω) and corresponds to free (propagating) waves (the usual inertia-gravity waves).
- a discrete spectrum of solutions with subinertial frequencies :

$$\sqrt{\text{Min}(1 + \Phi'')} < \omega < 1. \quad (4.55)$$

This part of the spectrum is nondegenerate, and corresponds to localized solutions. These solutions are exponentially decaying outside the region where $(1 + \Phi'' - \omega^2) < 0$, and have an oscillatory character inside that region : they are trapped in the anticyclonic region of the jet. For any given n , the fundamental mode ('mode 0', lowest possible ω) has a horizontal structure with no node ; the next mode ('mode 1'), if it exists, will have one node (*cf* fig. 4.6), etc...

Such trapped subinertial modes have been investigated in rectilinear jets with small Rossby numbers by Kunze, using a WKB approximation [Kun85]. The minimal value that he obtained for the frequencies of trapped waves is the linear approximation of the one given in (4.55). Subinertial modes in cyclonic vortices have also been investigated [KB98, Smi99].

It is important to note that for a jet with relative vorticity lower than $-f$, unstable modes (with $\omega^2 < 0$) are possible. This is the criterion for inertial instability. It is worth noting that trapped modes, if they exist, manifest themselves in the anticyclonic regions : they are the stable counterpart of what appears as symmetrically unstable modes when the anticyclonic vorticity is strong enough.

The transverse circulation $\psi^{(0)}$ may be projected on thus obtained eigenmodes, and can be written in a general form :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^{(0)} = \sum_n \sin(n\pi z) & \left(\sum_{\omega} a_{n\omega}^{(0)} \hat{\psi}_{n\omega}(x) \right. \\ & \left. + \int_{\omega>1} d\omega \left(a_{n\omega+}^{(0)} \hat{\psi}_{n\omega+}(x) + a_{n\omega-}^{(0)} \hat{\psi}_{n\omega-}(x) \right) e^{i\omega t} + c.c. \right). \end{aligned} \quad (4.56)$$

For simplicity, we suppose below that we only have one trapped mode, as this will prove sufficient for our purposes (only the nonlinear interactions of a mode with itself may have a nonzero effect on the slow part of the flow) :

$$\tilde{\psi}^{(0)} = \sin(n\pi z) a \hat{\psi}_{n\omega}(x) \cos(\omega t). \quad (4.57)$$

For illustration, the discrete spectrum for the jet displayed in fig. 4.4 have been investigated. It is possible to calculate analytically the form of the trapped modes, using Airy functions (details in Appendix B). The dispersion relationship linking ω and n is shown in fig. 4.5. For the fundamental mode, the frequency tends very slowly towards the lower bound when $n \rightarrow \infty$.

The fast variables $\tilde{\phi}^{(1)}$ and $\tilde{v}^{(1)}$ can be obtained from eqs. (4.42c) and (4.42b). Both will be written as $\tilde{\psi}^{(0)}$ in forms similar to (4.57) :

$$\tilde{\phi}^{(1)} = -a \cos(n\pi z) \frac{1}{n\pi\omega} \hat{\psi}'_{n\omega}(x) \sin(\omega t), \quad (4.58)$$

$$\tilde{v}^{(1)} = a \cos(n\pi z) \frac{n\pi}{\omega} (1 + \Phi'') \hat{\psi}_{n\omega}(x) \sin(\omega t). \quad (4.59)$$

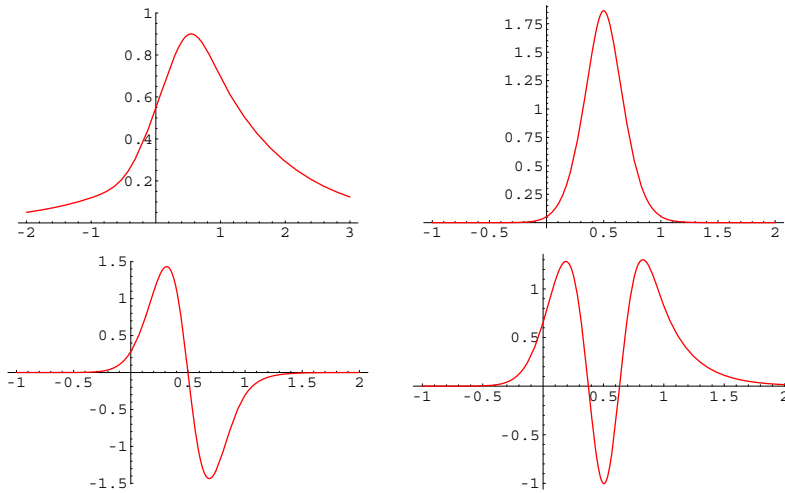


FIG. 4.6 – *Horizontal structure for the trapped modes, with $M = 0.5$ and $L = 1$; upper-left : fundamental mode for $n = 1$. The other three figures are the three possible modes for $n = 6$ (upper-right $\omega = 0.80$, lower-left $\omega = 0.91$, and lower-right $\omega = 0.98$). Note how increase in n , and to a lesser extent decrease in ω , make the wave more localized within the anticyclonic part of the jet.*

We specify also that $\tilde{u}^{(0)}$ can also be expressed in the form given in (4.58), with $\hat{\phi}_{n\omega}$ replaced by :

$$\tilde{u}^{(0)} = -a \cos(n\pi z) n\pi \hat{\psi}_{n\omega}(x) \cos(\omega t), \quad (4.60)$$

indicating that the hodograph will not have the same aspect in the cyclonic and anticyclonic sides of the jet : with ω close to the inertial frequency, it may display an ellipse oriented across the jet for a sounding in the anticyclonic region, and an ellipse oriented along the jet in the cyclonic region. This is of importance for data analysis as the orientation of the ellipse in an hodograph, obtained for instance from radiosoundings, is used to determine the direction of the wave-vector of the corresponding wave. As low-frequency waves display nearly circular hodographs, it is already difficult to determine the orientation of their wave-vector. The above analysis suggests that for large scale waves of low frequency near a jet, one should proceed with caution in interpreting hodographs.

4.4.2 Nonlinear contributions of the waves to the slow fields

Contrary to the more general case of section 4.3, it is possible here to investigate the nonlinear effects of the waves as we have analytical expressions for them. The question of interest is : are there any Reynolds stresses associated with the waves that contribute to the forcing of the slow Sawyer-Eliassen equation (4.48a) ? It is shown below that the answer is no. On the other hand, there are non-zero Reynolds stresses associated with the trapped modes. These are responsible for a stationary deviation, at order 2, of the time averaged fields from their adjusted value.

Reynolds stresses for the transverse circulation

In the time-averaged (4.48a), a slow transverse circulation $\bar{\psi}^{(1)}$ can be forced by two kinds of nonlinear terms : terms involving two slow terms, which are the standard terms appearing in semi-geostrophic theory, and terms involving two fast terms, which did not exist in semigeostrophic theory. The averaged wave-wave terms have the form :

$$\bar{\mathcal{N}}_1 = \overline{-\tilde{\psi}_{zz}^{(0)} \tilde{\phi}_{xx}^{(1)} + 2\tilde{\psi}_{xz}^{(0)} \tilde{\phi}_{xz}^{(1)} - \tilde{\psi}_{xx}^{(0)} \tilde{\phi}_{zz}^{(1)}} + \overline{\left[\mathcal{J}(\tilde{\psi}^{(0)}, \tilde{\psi}_{zt}^{(0)}) \right]_z}. \quad (4.61)$$

In (4.61), only the interactions of each mode with itself are retained, because of the time averaging. Here, as in [RZJ01], it can be shown that the free modes propagate away and do not yield any slow forcing. That is why we only consider, for simplicity of presentation, a perturbation consisting of only one trapped mode.

Now, as seen from (4.57) and (4.58), the time dependencies of $\tilde{\psi}^{(0)}$ and $\tilde{\phi}^{(1)}$ are in quadrature. Hence, $\bar{\mathcal{N}}_1$ is zero. There is no transverse circulation $\bar{\psi}^{(1)}$ due to the waves.

Order 2 deviations from geostrophic equilibrium

The waves do not yield any Reynolds stress in the the combination of equations yielding (4.48a); however, in the individual equations, there is a non-zero Reynolds stress term. In the time-averaged equation (4.47a), the advection of $\tilde{u}^{(0)}$ by itself, will be compensated by a small deviation from geostrophic equilibrium in $\bar{v}^{(2)}$ and $\bar{\phi}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} -\bar{v}^{(2)} + \bar{\phi}_x^{(2)} &= \overline{\mathcal{J}(\tilde{\psi}^{(0)}, \tilde{\psi}_z^{(0)})} \\ &= -\frac{1}{2} a^2 n^2 \pi^2 \hat{\psi}'_{n\omega} \hat{\psi}'_{n\omega}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

This Reynolds stress appears because of the lateral trapping of the waves ; it is felt barotropically over the whole height of the fluid, it has no vertical structure. It can be accounted for by a localized change of the barotropic pressure $\bar{\phi}^{(2)}$ or a change in $\bar{v}^{(2)}$. In all cases, this will represent a deviation from geostrophic equilibrium for the slow fields, and an $\mathcal{O}(\delta^2)$ difference between the true adjusted state ($\phi^{(0)} + \bar{\phi}^{(1)}$ and $v^{(0)} + \bar{v}^{(1)}$), and the time-averaged state.

Wave contributions to the slow order 2 potential vorticity Continuing the calculation of PV at successive orders started in section 4.3.2, the following expression is obtained :

$$q^{(2)} = (1 + v_x^{(0)})\phi_{zz}^{(2)} + v_x^{(1)}\phi_{zz}^{(1)} - v_z^{(1)}\phi_{xz}^{(1)} + v_x^{(2)}\phi_{zz}^{(0)}. \quad (4.63)$$

The two terms involving $v^{(1)}$ and $\phi^{(1)}$ can lead to wave-wave contributions when averaged over time :

$$\overline{+v_x^{(1)} \tilde{\phi}_{zz}^{(1)} - v_z^{(1)} \tilde{\phi}_{xz}^{(1)}} = -\frac{1}{2} a^2 n^2 \pi^2 (\hat{v}'_{n\omega} \hat{\phi}_{n\omega} \cos^2(n\pi z) + \hat{v}_{n\omega} \hat{\phi}'_{n\omega} \sin^2(n\pi z)). \quad (4.64)$$

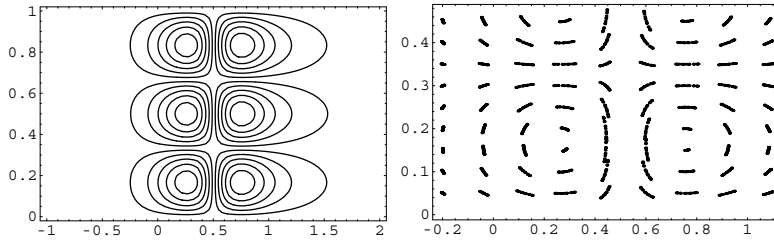


FIG. 4.7 – a) *Streamlines for a trapped wave with $n = 3$, and $\omega = 0.93$. b) trajectories for some particles for the same wave, in a smaller domain. Note that these trajectories are curved, making the mean position of the particles different from the position they would have in the absence of waves.*

It is important to note that this contribution to PV has a structure in the vertical, contrary to the changes induced in $\overline{\phi}^{(2)}$ or $\overline{v}^{(2)}$ discussed above. Hence the barotropic term $\overline{v}^{(2)}$ existing because of the Reynolds stress pointed out in the previous paragraph cannot compensate this contribution : there is a nonzero contribution of the trapped waves to the slow PV at order 2.

The Lagrangian formulation for the problem, and more specifically the consideration of the trajectories of the particles explain the origin of this contribution : as illustrated in fig. 4.7 the trajectories of particles are curved. The mean position of a particle is therefore not the position this particle would have in a flow consisting only of the adjusted component.

Thus, the study of small perturbations on a nearly barotropic adjusted jet showed the possibility of subinertial modes trapped in the region of anticyclonic shear. They are the stable counterpart of symmetrically unstable modes which exist when the relative vorticity is lower than $-f$. Their presence alters considerably the classical scenario of geostrophic adjustment as part of the perturbation to the adjusted part of the flow remains in the jet instead of propagating away. The Reynolds stresses associated with these modes do not induce any additional forcing to the equation for the transverse circulation. However, they do introduce a deviation in time-averaged fields from their adjusted values, implying for instance a limitation to the use of time-averaging to filter out those waves.

4.5 WKB approximation for the baroclinic jet

The simple configuration of a barotropic jet made it possible to solve analytically the equation for the fast motions (4.43). The jet was limited in the vertical by the flat bottom and rigid lid. Are these boundaries crucial? Is it still possible to have trapped modes (modes that can be expressed as $(\psi(x, z)e^{i\omega t} + c.c.)$) in a localized baroclinic jet?

Insight may be gained using the previous section by considering waves with small vertical wavelength with respect to the characteristic vertical scale of the jet. Locally, the jet will be considered barotropic, and waves which are trapped horizontally in the anticyclonic region of the jet will propagate vertically. Their evolution can be described using a Liouville-Green (or WKB) approximation.

4.5.1 Description of the waves and their propagation

In the absence of horizontal boundaries, for an infinite barotropic jet, solutions to (4.51) may be written as :

$$\psi^{(0)} = \int dm \int d\omega a_{m\omega} \hat{\psi}_{m\omega}(x) e^{i(mz-\omega t)} + c.c. \quad (4.65)$$

In this case, we have a continuum of possible vertical wavenumbers. As can be seen from figure 4.5 (the dispersion relationship in the $(\omega, m/\pi)$ -plane) the vertical group velocity goes to zero for m going to infinity.

The jet was chosen with the same horizontal profile as that shown in fig. 4.4; the two parameters defining this profile, at each level z , are B , the maximum of the relative vorticity, and L , the half-width of the jet. The parameter B was chosen to vary slowly in the vertical, as a gaussian centered on $z = 0$, so that the jet is limited in space. For simplicity, L was chosen constant :

$$L = L_0, \quad B = B_0 e^{-\frac{z^2}{8}}, \quad (4.66)$$

which gives a smooth, although somewhat rectangular, profile for velocity, as shown in fig. 4.8.

The form of a trapped wave in an infinite barotropic jet can be written :

$$\psi(x, z, t) = a(Z) \hat{\psi}_{m,\omega}(x) e^{i\phi} + c.c., \quad (4.67)$$

where a is the amplitude, $\hat{\psi}_{m,\omega}(x)$ is obtained as the solution of equation (4.53) in which $n^2 \pi^2$ is replaced by m^2 , and the phase function ϕ verifies :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = m, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\omega. \quad (4.68)$$

The propagation of a wave packet is now considered; at each altitude, its wavenumber and frequency verify the dispersion relation valid for the local parameters :

$$\omega = \Omega(m, B, L), \quad (4.69)$$

or $\omega = \Omega(m(Z), B(Z), L(Z))$ to insist on the Z -dependence. Using the standard manipulations, we obtain :

$$\frac{Dm}{Dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial Z} - \frac{\partial \Omega}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial Z}. \quad (4.70)$$

A similar equation for $D\omega/Dt$ shows that the wave's frequency changes only if the environment changes with time. As we consider a stationary jet, ω will remain constant.

Propagation

The ray tracing is here limited to following the altitude and vertical wavenumber of the trapped wave as it propagates within the jet. We will consider that it starts at $z = 0$; taking m and ω positive, the group velocity will be negative⁹. As the wave packet descends, it enters regions less favorable

⁹Because the jet is symmetric with respect to $z = 0$, the results are the same for a wave with a group velocity upwards.

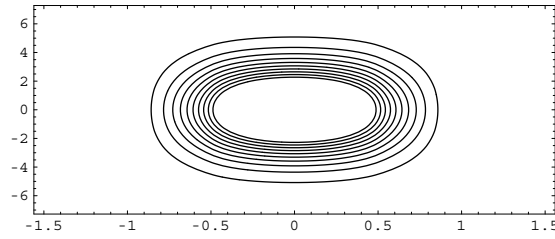
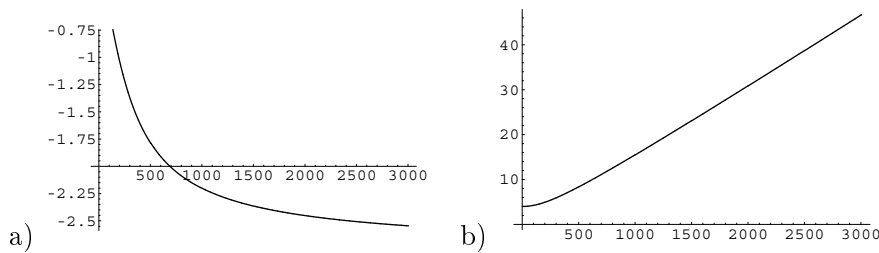


FIG. 4.8 – Jet velocity profile.

for trapping : the graph of the dispersion relation changes, the lines tighten towards the right, towards $\omega = 1$. Hence, m increases, the group velocity decreases, and the wave packet propagates more and more slowly, its vertical wavelength becoming smaller and smaller. Figure 4.9 displays the vertical propagation of a wave packet, and the evolution of its wavenumber. The initial wave parameters were chosen as :

$$m = 4, \quad \omega = 0.792 . \quad (4.71)$$

FIG. 4.9 – a) Ray ; note that the first instants of descent (starting from $z = 0$) have been cut off; time is $0.1n$, n is indicated; b) Evolution of m with time.

As the wave frequency ω is lower than f , the wave can not propagate beyond the level at which ω is equal to the lower bound for the frequencies of trapped modes (cf eq. (4.55)). In the case displayed above, determination of Z such that $\sqrt{\text{Min}_x(1 + \Phi''(x, Z))} = \omega = 0.792$ gave $Z = -2.8$, in agreement with the simulations. Kunze calls this the critical level because, as for waves approaching a critical level the wavenumber diverges and the group velocity vanishes ; note however that there is no phase velocity in the direction of the mean flow. Now, the wavenumber cannot grow indefinitely ; the corresponding increase of gradients will lead to the the onset of dissipative processes.

This first observation indicates that there probably aren't any trapped modes of the form $\psi(x, z) e^{i\omega t} + c.c.$ in the baroclinic case. Indeed, the WKB approximation for the propagation of a subinertial wave packet of small horizontal extent in a barotropic jet would show that the wave packet is reflected laterally, and hence trapped in the anticyclonic region. There is no counterpart of the trapping in the vertical as the waves are not reflected as they propagate vertically. Hence, the trapped modes displayed in the previous section may owe their existence to the upper and lower boundaries of the domain.

This WKB calculation also suggests that the geostrophic adjustment of a perturbation inside a jet leads to dissipative processes as subinertial waves approach their critical level. This constitutes a modification to the classical scenario of geostrophic adjustment. One interesting point is that large amplitude of the initial perturbation is not necessary to trigger it as the result was obtained for linear waves on the background of the jet.

However, the considered configuration was rather specific, and hence it should be regarded as indicative of what may happen during the adjustment of a truly baroclinic anomaly. Moreover, as discussed below, the WKB approximation above requires that the vertical scale of the waves be not too small, because of the cross-derivative term in eq. (4.43).

4.5.2 Limitations

In the scaling used in 4.3.1, we assumed there was only one vertical length. The question here is what are the limitations on the vertical scale of the waves for the application of the equation for waves in a nearly barotropic jet (eq. (4.51)) ?

Approximating the jet as barotropic becomes erroneous in equation (4.43) if the term with cross derivatives $\phi_{xz}\psi_{xz}$ becomes comparable to $\phi_{zz}\psi_{xx}$. Scaling directly the terms of this equation, it is thus obtained that we need to have :

$$h \gg \frac{fVL}{N^2 H_v}, \quad (4.72)$$

where H_v is the vertical scale of the jet, and h the scale of the waves. For a moderate and tall jet ($30ms^{-1}$, $200km$ wide, $5km$ tall), in strongly stratified fluid ($f = 10^{-4}$, $N = 2 \cdot 10^{-2}$), h has to be larger than $300m$.

This constraint is rather restrictive, but this WKB study provides nevertheless some useful indications suggesting that the upper and lower limits of a jet act as critical levels for subinertial waves trapped in the anticyclonic part of the jet. Hence, these are regions where low-frequency inertia-gravity waves are likely to be observed with important amplitudes (this is consistent, for example with numerical simulations of [OD95]), and eventually to dissipate. Nevertheless, the present work is to be complemented by a high-resolution numerical study for the adjustment within a truly baroclinic jet of a perturbation with same characteristic scales as the jet.

4.6 Conclusions et perspectives

Nous avons considéré dans ce chapitre l'ajustement géostrophique d'anomalies frontales dans un fluide continûment stratifié sans variation dans une direction. La description lagrangienne de l'écoulement a été utilisée, avec les mêmes avantages que pour le modèle à une couche (chapitre 2). La séparation de l'écoulement en parties lente et rapide est ainsi bien posée, mais considérablement plus complexe que dans les modèles à une ou deux couches.

Dans le cas particulier d'un fluide à vorticité potentielle nulle, la partie lente est explicitement résolue [Ou84, WB95]. Les conditions sur l'état initial pour que cette partie lente existe en sont déduites. Il est montré que la séparation de l'écoulement en parties lente et rapide n'est pas toujours possible.

L'analyse détaillée de ce cas permet également de montrer que la description semi-géostrophique de la frontogénèse de déformation [HB72] peut être interprétée comme une succession de problèmes d'ajustement géostrophique pour des distributions initiales de θ paramétrées par le temps. Le cas du modèle à vortacité potentielle uniforme est considéré suivant la même approche. Enfin, le problème de la séparation est posé dans le cas général : l'état ajusté, s'il existe, est solution d'une équation de Monge-Ampère elliptique. Les résultats mathématiques connus ne nous permettent pas de conclure quant aux conditions d'existence et d'unicité de cet état ajusté.

La question des processus tels que les déferlements, qui peuvent empêcher le fluide d'atteindre l'état ajusté si celui-ci existe, n'a pas été abordée à ce stade. De plus, la question de l'évolution du fluide lorsque la condition initiale ne possède pas d'état ajusté reste ouverte. Notamment, la pertinence, vis-à-vis de l'évolution du fluide dans une telle situation, des solutions avec discontinuité présentées par Kalashnik [Kal98, Kal00] serait à examiner.

Le processus d'ajustement a été considéré ensuite pour des écarts faibles à l'équilibre, ce qui a permis d'adopter une approche perturbative. Nous sommes revenus pour cette partie à une description eulérienne du fluide : d'une part, grâce à la compréhension de la séparation acquise à l'aide de la description lagrangienne nous pouvons choisir des conditions initiales permettant de séparer exactement les parties lentes et rapides de l'écoulement, ce qui retire toute ambiguïté de la discussion des effets nonlinéaires ; d'autre part, elle est plus lisible, notamment pour comparer les équations obtenues avec des équations connues (équation de Sawyer-Elisassen).

Une équation prognostique a été obtenue pour la circulation transverse, à comparer à l'équation diagnostique de Sawyer-Elisassen que l'on obtient dans le modèle semi-géostrophique. Afin de pouvoir avancer analytiquement, nous avons considéré l'ajustement autour d'un jet presque barotrope. La partie rapide de l'écoulement a pu être dans ce cas complètement décrite. Nous retrouvons notamment des modes subinertiels piégés dans la région anticyclonique. La structure et les propriétés de ces modes piégés sont étudiés ici pour des nombres de Rossby proches de 1, et pour des ondes d'échelle comparable à celle du jet. Comme dans le fluide à deux couches, ces modes sont la contrepartie stable de l'instabilité symétrique. Les effets nonlinéaires de ces modes piégés sont étudiés : au premier ordre où ces effets nonlinéaires apparaissent, ils ne forcent aucune évolution de la partie ajustée de l'écoulement. En revanche, ils modifient les quantités moyennées dans le temps : ainsi par exemple, la valeur de la PV moyennée dans le temps diffère à l'ordre 2 de la valeur de la PV de la partie lente de l'écoulement. L'état moyenné dans le temps diffère de la partie lente de l'écoulement.

Enfin, une approximation WKB a été utilisée pour comprendre la structure et l'évolution de ces ondes subinertielles dans un jet barocline variant lentement sur la verticale. Cette analyse suggère qu'une partie de la perturbation initiale, dans un jet barocline, mène à des processus dissipatifs dans les bords supérieurs et inférieurs du jet. Ceci modifie le scénario d'ajustement classique, même pour des perturbations initiales de faible amplitude.

Chapitre 5

Ondes émises par le jet troposphérique dans les données FASTEX

*'Aun es temprano - respondio Sancho,
porque no ha sino un mes que andamos buscando las aventuras
y hasta ahora no hemos topado con ninguna que lo sea.
Y tal vez hay que se busca una y se halla otra¹.'*
Miguel de Cervantes.

L'ajustement géostrophique a été étudié dans les précédents chapitres en mettant l'accent sur la partie lente de l'écoulement, et sur l'ajustement vers celle-ci, mais ce processus est aussi à étudier en tant que source d'ondes. Ces dernières sont en effet une composante du mouvement dont il faut tenir compte pour avoir une compréhension globale de la dynamique de l'atmosphère ou de l'océan. Le transport de quantité de mouvement par les ondes de gravité et d'inertie-gravité est en effet indispensable pour expliquer la circulation générale de l'atmosphère [AHL87, HHM⁺95]. Les ondes jouent également un rôle, encore mal quantifié, dans le mélange [DHS⁺91], [SE96], [MTvVK99], [SH02] ; enfin, les ondes de gravité de grande amplitude peuvent avoir des effets significatifs en météorologie méso-échelle [UK87, ZKDK01].

Fritts & Nastrom [FN92] ont montré à l'aide d'observations que le jet était une source d'ondes importante. L'ajustement géostrophique a été avancé par plusieurs études antérieures [TY82, UK87] comme pouvant être le mécanisme physique à l'origine des ondes. Motivés par ces idées Fritts & Luo [FL92] ont étudié l'ajustement d'une anomalie initiale de vitesse ayant la structure d'un jet gaussien rectiligne (pas de variation dans une direction, profil gaussien dans le plan vertical, avec un rapport d'aspect de 1 :100), dans un fluide au repos. Les ondes émises sont principalement des ondes quasi-inertielles, la sélection de la fréquence étant déterminée par les dimensions de l'anomalie. Cette analyse néglige toutefois l'effet sur les ondes de l'écoulement de base,

¹*Laissez-nous le temps; il y a à peine un mois que nous avons commencé à chercher les aventures, et, jusqu'à présent, ça n'a rien donné. Et puis, ce n'est pas parce qu'on cherche qu'on trouve.*

et notamment la possibilité d'avoir des ondes sub-inertielles piégées [Kun85]. Notre analyse perturbative de l'ajustement effectuée dans les chapitres précédents complète l'étude de [FL92], et souligne notamment l'asymétrie entre les régions cycloniques et anticyclonique du jet. Luo & Fritts [LF93] ont par ailleurs également étudié l'ajustement d'une anomalie variant lentement dans la direction du jet, en s'intéressant notamment à la direction de propagation des ondes en différents points le long du jet.

Vis-à-vis de ces études théoriques d'ajustement géostrophiques, une question essentielle se pose : *qu'est-ce qui s'ajuste ?* Le déséquilibre qui s'ajuste peut être dû par exemple à une instabilité de cisaillement [BMS99], ou à des ondes de relief [SLTL98]. Il peut provenir également de la dynamique de l'écoulement de grande échelle lui-même [TY82, OD95, RG96], et c'est cette possibilité qui nous intéresse ci-dessous. Deux situations dans lesquelles la dynamique de l'écoulement équilibré peut générer des ondes par ajustement géostrophique ont particulièrement été étudiées : la frontogénèse (bidimensionnelle, voir par exemple [SSR93, GR96, RG96]), et l'évolution tridimensionnelle d'un jet.

L'ajustement géostrophique dû à l'évolution de l'écoulement balancé lui-même a notamment été étudié dans le cadre de l'évolution tri-dimensionnelle d'un jet. Van Tuyl & Young [TY82] ont utilisé un modèle à deux couches pour simuler l'évolution d'un maximum de vent et diagnostiquer les ondes émises. Ils suggèrent que celles-ci peuvent être considérables au voisinage du maximum de vent. Leur modèle, toutefois, n'est qu'un modèle à deux couches, et ne peut donc pas décrire des ondes ayant une véritable structure verticale. O'Sullivan & Dunkerton [OD95] ont simulé dans un GCM le développement d'une onde barocline instable, et observé la génération d'ondes d'inertie-gravité au voisinage du jet, particulièrement dans la région de sortie du jet. Leurs résultats étaient quantitativement sensibles à la résolution du modèle ; toutefois, qualitativement, les régions de l'écoulement significatives pour l'émission d'ondes étaient identifiées même avec une résolution relativement basse.

La région de sortie du jet a également été soulignée par des études d'observations comme étant liée à la génération d'ondes. Uccellini & Koch [UK87] ont passé en revue treize études d'ondes de gravité de grande amplitude observées à la surface des Etats-Unis, et ont remarqué que tous ces événements se produisaient à la sortie d'un maximum du vent qui avance vers une dorsale du géopotentiel, du côté anticyclonique. Ils suggèrent que l'ajustement géostrophique est la source la plus probable des ondes observées. Les simulations méso-échelles d'un événement d'une situation réelle de 1994 réalisées par [ZKDK01] ont elles aussi souligné le rôle de la région de sortie du jet. Ces simulations numériques ont également permis de tester la pertinence de plusieurs outils servant à diagnostiquer les régions hors équilibre [OD95, ZKDK00], notamment le nombre de Rossby lagrangien.

Des analyses de données récentes, faisant référence à [OD95], ont mis en évidence des ondes émises dans des régions où le jet est fortement déformé, comparables à celle exhibée par [OD95]. Thomas, Worthington & McDonald [TWM99] ont analysé des observations radar d'ondes dans la région de sortie du jet générées vers 9 – 10 km. Ils soulignent que ces ondes ont l'originalité d'être clairement visibles non seulement dans la stratosphère, mais aussi

dans la troposphère, et qu'elles sont orientées dans la direction du jet, au lieu d'être transverses comme on le suppose fréquemment. Pavelin, White-way & Vaughan [PWV01] montrent des observations radar d'une onde de grande amplitude et de grande longévité, à nouveau dans une région où le jet est fortement déformé ; ils avancent l'ajustement géostrophique comme mécanisme source, mais n'ont pas identifié précisément de région hors équilibre dans l'écoulement. Enfin, [HSH01] ont déterminé l'origine d'une onde observée en basse stratosphère à l'aide d'un Lidar par des tracés de rayons ; leur analyse indique que la branche du jet orientée vers le sud-est, dans une région où le jet est déformée vers le sud, serait à l'origine de l'onde observée.

Nous présentons dans ce chapitre une étude des ondes d'inertie-gravité observées dans les radiosondages de la campagne FASTEX (Fronts and Atlantic Stormtracks Experiment, [JJS⁺97, JBB⁺99]), visant à mieux identifier les sources des ondes de la troposphère et surtout de la basse stratosphère au-dessus de l'Atlantique [PTZ02]. De nombreux radiosondages ont été effectués au cours de cette campagne depuis des navires dans l'Atlantique Nord, loin des côtes et donc des sources d'ondes orographiques. Nous avons cherché à analyser ces radiosondages en fonction de la situation synoptique, par opposition aux études des variations saisonnières ou géographiques des ondes basées sur les radiosondages d'une seule station. Une des difficultés d'une telle étude est de quantifier la situation synoptique, ou d'identifier différentes situations synoptiques. Nous étudions l'intensité des ondes en fonction de la distance du radiosondage au jet à 9km d'altitude. Cette approche confirme que le jet est, au-dessus de l'océan, la principale source d'ondes.

Plusieurs mécanismes générant des ondes peuvent être associés au jet : instabilités du jet, instabilité de Kelvin-Helmholtz, ajustement géostrophique. Afin de montrer l'importance de l'ajustement géostrophique, notamment comme source d'ondes de grande amplitude, de grande échelle et de basse fréquence, un événement particulier d'émission d'ondes de basse fréquence est étudié en détail (5-6 février 1997).

Les données utilisées, leur traitement et la méthode d'analyse sont présentés en section 5.1. L'étude de l'intensité des ondes en fonction de la distance au jet est exposée dans la section 5.2 ; elle permet notamment d'identifier les régions du jet et les configurations de celui-ci les plus favorables à la génération d'ondes, suggérant quels cas particuliers seraient intéressants à étudier en détail. Une étude d'un événement d'ajustement est exposée en détail dans la section 5.3. Cet événement particulier d'ajustement géostrophique montre l'importance de ce mécanisme comme source d'ondes, et souligne le rôle d'effets tridimensionnels, qui étaient absents dans les chapitres théoriques qui précèdent. Enfin, la signification de ces résultats et les perspectives sont discutés en section 5.4.

5.1 Données disponibles et outils d'analyse

5.1.1 Les radiosondages issus de FASTEX

L'expérience FASTEX (Fronts and Atlantic Stormtracks Experiment) a eu lieu entre le 5 janvier et le 27 février 1997 dans le but d'étudier la formation et l'évolution des dépressions typiques des moyennes latitudes

[JJS⁺97, JBB⁺99]. Une vaste base de données a été constituée, comprenant notamment de nombreux radiosondages sur l'Atlantique Nord et sur les côtes, avec une résolution temporelle allant jusqu'à 8 sondages par jour². Ces nombreux radiosondages sont un excellent outil pour les études sur les ondes d'inertie-gravité, et ont déjà été utilisés à cet effet [MLT02].

Nous avons choisi ici de nous restreindre aux sondages du mois de février obtenus par les navires dans l'Atlantique Nord, dans une fenêtre allant de 30°N à 70°N en latitude, et de -50° à 0° en longitude. Parmi ces radiosondages, nous n'avons retenu pour l'analyse que ceux qui donnaient les profils de vitesse jusqu'à 20km. Au total, 224 radiosondages ont été retenus. Leurs localisations sont représentées sur la figure 5.1. La majorité des radiosondages se trouvait entre 35°N et 50°N de latitude, et entre -30° et -40° de longitude.

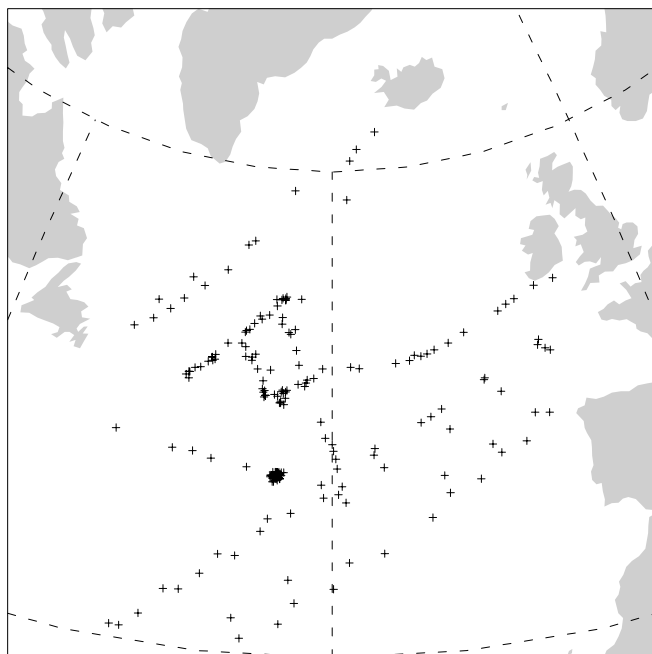


FIG. 5.1 – Localisations des points de lancements des 224 radiosondages utilisés.

La résolution de ces radiosondages était typiquement de l'ordre de la cinquantaine de mètres. Ces profils ont tout d'abord été interpolés (spline cubique) pour des points espacés de 25m. Les profils interpolés ont ensuite été filtrés afin de séparer le vent horizontal en un vent moyen et une perturbation :

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}'$$

Nous avons utilisé pour cela un filtre non récursif (cf [MLT02, SLTL98]) avec une fenêtre allant de 250m à 7.5km. La partie ainsi isolée est la perturbation

²La résolution temporelle des radiosondages lancés depuis des navires est cependant moindre.

que nous étudierons pour quantifier les ondes, la partie variant lentement sur la verticale est identifiée comme vent moyen \mathbf{V} .

Dans chaque radiosondage, nous isolons deux segments :

- segment troposphérique : 2 – 10km. Ce segment ne commence qu'à 2km afin d'éviter la couche limite ;
- segment stratosphérique : 12 – 20km : ce segment commence à 12km pour éviter la tropopause. L'altitude maximale atteinte par les radiosondages s'étalait typiquement entre 15 et 25km. Nous n'avons retenu que les sondages allant jusqu'à 20km, compromis permettant d'avoir un segment stratosphérique de longueur raisonnable et de retenir un assez grand nombre de radiosondages.

Nous quantifions l'intensité des ondes dans chaque segment par la valeur moyenne du carré de la perturbation de vitesse :

$$A = \frac{1}{z_2 - z_1} \int_{z_1}^{z_2} |\mathbf{v}'|^2 dz . \quad (5.1)$$

Si les ondes fournissent l'essentiel de \mathbf{v}' , comme on peut le vérifier sur des profils, notamment pour les plus fortes valeurs de A , d'autres types de mouvements que les ondes peuvent néanmoins contribuer à cette quantité A , surtout dans la troposphère (cisaillement vertical lié au jet). Ce point est discuté plus loin (section 5.2.1).

D'autres méthodes sont parfois utilisées pour séparer le 'vent moyen' de la perturbation, notamment des 'fits polynomiaux', d'ordre 3, 4 ou 5 typiquement [GRMK00]. Le filtre utilisé ici est a priori plus fiable ; les fits polynomiaux ont cependant été testés, et ils est apparu que les résultats étaient globalement inchangés.

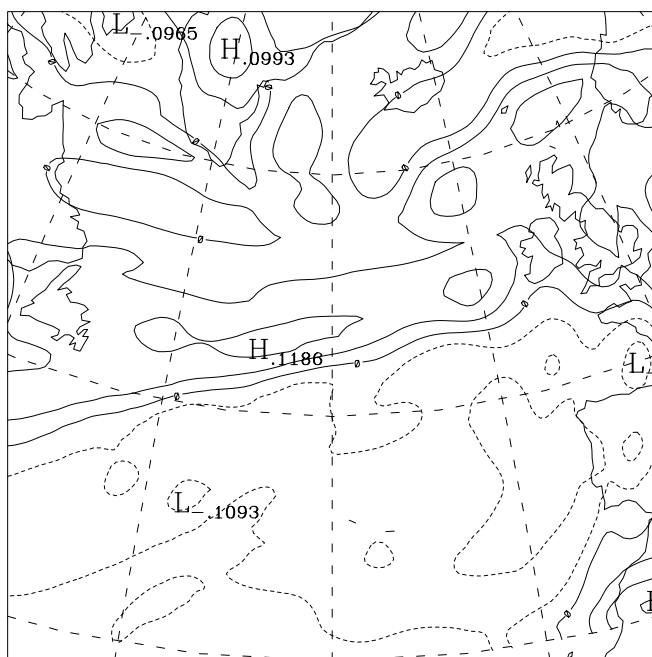
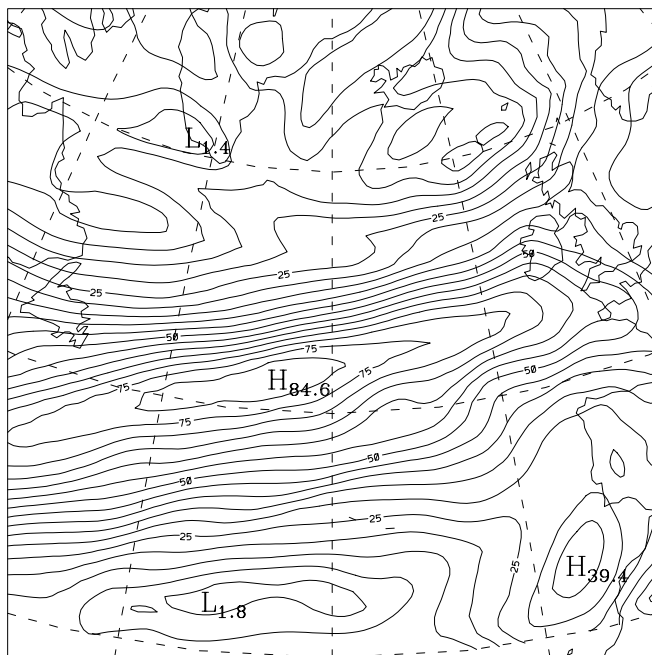
5.1.2 La situation synoptique d'après les analyses du Centre Européen

Notre but, pour l'analyse de l'ensemble des radiosondages retenus, est de quantifier les ondes relativement à la situation synoptique. Une question cruciale est alors : quel élément de la situation synoptique retenir, comment le définir et comment quantifier la position du radiosondage par rapport à lui ?

Au-dessus de l'Atlantique, loin des côtes et des sources d'ondes orographiques, nous nous attendons à ce que la principale source d'ondes soit les systèmes front/jet. Ces systèmes sont souvent considérés, en première approximation, comme étant unidimensionnels. Par ailleurs, des études numériques [OD95, RG96] ont montré que les ondes présentes dans la stratosphère au-dessus de tels systèmes avaient plutôt leur origine dans le jet de la haute troposphère, et qu'elles étaient peu sensibles à la frontogénèse près de la surface.

Ainsi nous avons choisi comme critère la distance du lieu de lancement du radiosondage au jet de haute troposphère. Nous détaillons ci-dessous comment le jet est défini et comment cette distance est calculée.

Les analyses du Centre Européen pour la Prévision à Moyen Terme (ECMWF) sont utilisées pour définir le jet et situer les radiosondages relativement à celui-ci. Les cartes d'intensité du vent à l'altitude $Z = 9km$



CONTOUR FROM -1 TO 1 BY .05

FIG. 5.2 – En haut : intensité du vent à $Z = 9\text{km}$, le 24 février à 12GMT ; le jet est défini comme la ligne de crête (analyse subjective) des isolignes de l'intensité du vent. En bas : vorticité relative à la même altitude, permettant de vérifier que les deux critères concordent bien là où le jet est suffisamment bien défini.

(*log*-pression), ont été tracées du 1er au 25 février, toutes les six heures. Sur ces cartes, le jet est obtenu comme la ligne de crête (analyse subjective) des isolignes d'intensité du vent.

Il a été vérifié que cette définition n'était pas trop sensible à l'altitude de la surface choisie. La surface $Z = 9km$ a été choisie car le vent y était souvent maximal. Il a aussi été vérifié qu'un autre critère possible et plus objectif (la ligne de vorticité relative nulle) donnait des résultats très semblables. Notons toutefois que la définition du jet devient incertaine dans les régions où le vent est faible ; ceci n'est pas très fréquent et ne devrait pas avoir énormément de conséquences pour notre analyse car les ondes, dans les régions où le vent est faible, seront, en général, également faibles. Que la distance au jet soit mal définie pour un sondage contenant peu d'ondes ne porte pas à conséquence.

Ces deux critères sont illustrés sur la figure 5.2. De plus, les figures 5.8 permettent de vérifier la pertinence de la direction du vent sugg r e par les cartes de $|\mathbf{v}|$ dans les régions de maximum de vent. Par ailleurs, le jet peut aussi se diagnostiquer d'après les cartes de vorticité potentielle sur des surfaces isentropes : la comparaison des figures 5.8a) et 5.9 montre qu'il y a là accord entre les deux points de vue. Notons aussi que les nombres de Rossby associés au jet sont typiquement d'ordre 1 ($U \sim 70ms^{-1}$, $f \sim 10^{-4}$ et $L \sim 500 - 1000km$).

La distance d'un radiosondage au jet est finalement calcul e à l'aide des coordonn es du lieu de lancement du radiosondage et des coordonn es du point le plus proche sur le jet (ligne de crête des isolignes de l'intensité du vent). Cette distance est compt e négative du côté anticyclonique du jet. L'advection horizontale du ballon au cours de son ascension peut être importante si le ballon passe à proximité du jet, mais ces déplacements sont parallèles au jet et ne changent donc pas ou peu le calcul de la distance du radiosondage au jet.

5.2 Activité ondulatoire vue en fonction de la distance au jet

La méthode propos e dans la section précédente permet de décrire l'intensité des ondes en fonction de la distance au jet. Nous présentons ci-dessous les résultats obtenus pour l'intensité des ondes en fonction de la distance au jet. Cette analyse d'ensemble est prise comme point de départ pour tenter de comprendre plus en détail quelles régions de l'écoulement sont les plus favorables à la génération d'ondes.

5.2.1 Vue d'ensemble : importance du jet comme source d'ondes

L'intensité des ondes dans la troposphère et dans la stratosphère sont trac es pour les 224 sondages en figure 5.3. Une nette corrélation appar it entre la proximité au jet et les plus grandes intensités des ondes : dans les deux graphes, les points forment un nuage plutôt triangulaire. Le pic de ce nuage est situé pour la stratosphère du côté anticyclonique du jet, en accord avec les résultats du chapitre pr c dent montrant que cette région était plus favorable aux ondes (possibilité de piégeage). La moyenne de l'intensité des

ondes pour les segments troposphériques est $11m^2s^{-2}$, et pour les segments stratosphériques $14.3m^2s^{-2}$.

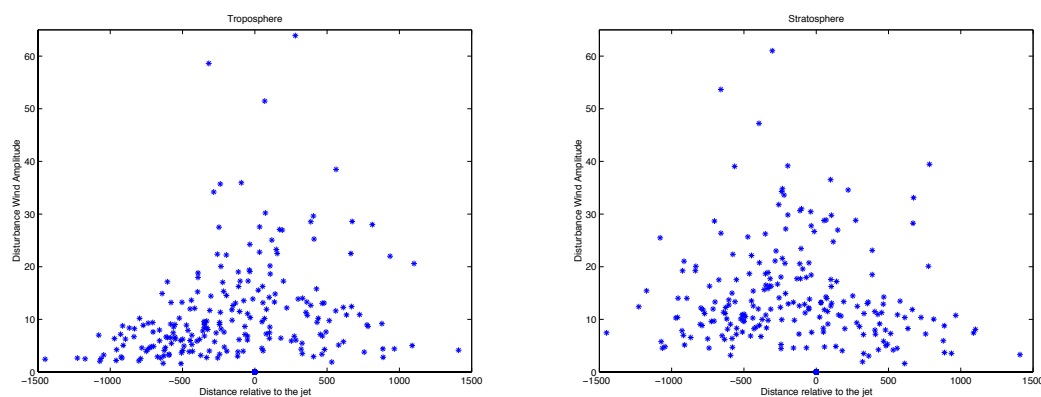


FIG. 5.3 – *Activité ondulatoire A en fonction de la distance au jet ; à gauche : segments troposphériques ; à droite : segments stratosphériques. En abscisse, la distance au jet, en km, comptée négativement du côté anticyclonique.*

Le signal dans la troposphère est moindre, ce qui est cohérent avec la plus grande stratification et la plus faible densité de la stratosphère. Il peut même être surprenant que l'écart ne soit pas plus grand. Ceci est peut-être dû, en partie, au fait que le jet est inclus dans les segments troposphériques, contribuant dans les régions de fort cisaillement vertical au calcul de A . Le paramètre A servant à quantifier l'intensité des ondes est donc plus fiable dans la stratosphère.

Par ailleurs, le nuage de points pour la troposphère est plus resserré autour du jet que celui décrivant la stratosphère. Le biais introduit par la présence du jet dans les segments troposphériques constitue une partie de l'explication. La propagation des ondes dans la stratosphère est un autre élément d'explication³.

Il faut garder une certaine prudence dans l'analyse de ces graphes : notamment, un petit nombre de points (les points correspondant aux plus fortes intensités ; une douzaine de points sur chaque graphe, soit 5% de l'échantillon) ont une grande influence sur l'impression subjective de la forme du nuage de points. Par exemple, il semble que les intensités des ondes dans la stratosphère soient plus importantes du côté anticyclonique que du côté cyclonique. A y regarder de plus près, cette impression dépend d'une demi-douzaine de points, et du fait que le côté anticyclonique et le côté cyclonique du jet ne sont pas également représentés dans notre échantillon de radiosondages (le côté anticyclonique est surreprésenté).

Enfin, les points de ces graphes ne représentent pas des expériences indépendantes les unes des autres. En regardant de plus près à quels radiosondages correspondent les valeurs les plus fortes de A , on découvre que la majorité de ces points correspondent aux seules journées du 16 au 18 février

³si le jet est la source des ondes, celles-ci peuvent se propager sur de grandes distances horizontales avant d'atteindre le haut de notre 'segment stratosphérique' ; de plus, les ondes émises par le jet, par ajustement géostrophique notamment, seront plutôt de basse fréquence, donc leur vitesse de groupe peu inclinée par rapport à l'horizontale [HSH01].

(*cf* fig. 5.4).

Il semble donc prudent et instructif d'utiliser cette analyse pour identifier les jours et les configurations synoptiques qui ont été les plus favorables aux ondes de forte intensité. Ceci permettra de mieux comprendre quelles régions de l'écoulement peuvent être à l'origine des ondes et de s'assurer de la signification des graphes de la figure 5.3.

5.2.2 Identification de configurations favorables aux ondes

Afin de mieux comprendre le rôle du jet en tant que source d'ondes, il faut raffiner un peu l'analyse de la situations synoptique : le critère retenu (la distance au jet) est imprécis. Ce critère ne nous indique pas, par exemple, si le radiosondage a été effectué près d'un maximum du jet ou non, près d'une région très incurvée ou non. Nous cherchons donc, ci-dessous, à préciser notre description de la situation synoptique et à identifier les configurations qui ressortent comme favorables aux ondes. Un premier pas consiste à regarder l'intensité des ondes non plus en fonction de la distance au jet, mais en fonction du temps (*cf* fig. 5.4).

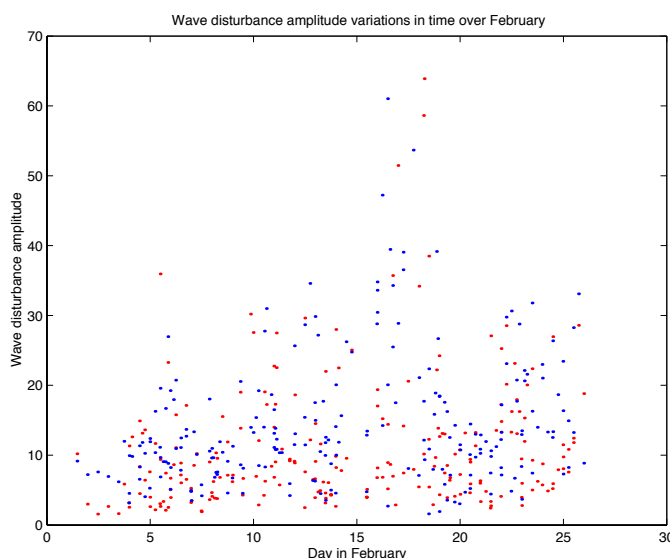


FIG. 5.4 – *Intensité des ondes en fonction du temps (en abscisse, le temps en jour du mois de février) ; les segments troposphériques sont indiqués en rouge, stratosphériques en bleu.*

Ce graphe montre pour notre échantillon de points de mesure une très forte variabilité dans le temps de l'intensité des ondes. Notamment, la période du 16 au 18 février correspond sans ambiguïté à une période d'activité ondulatoire très intense. D'autres pics assez bien délimités sont également présents : les 5-6 février, du 10 au 14, du 22 au 25 enfin.

Si on regarde à quelle configuration du jet ces pics correspondent, on voit ressortir deux localisations typiques pour les radiosondages correspondants aux fortes valeurs de A : d'une part, ceux qui sont près des maxima du jet, et d'autre part ceux situés dans une région où le jet a été très fortement déformé, où le vent a une forte courbure. Pour tester la pertinence de ces ob-

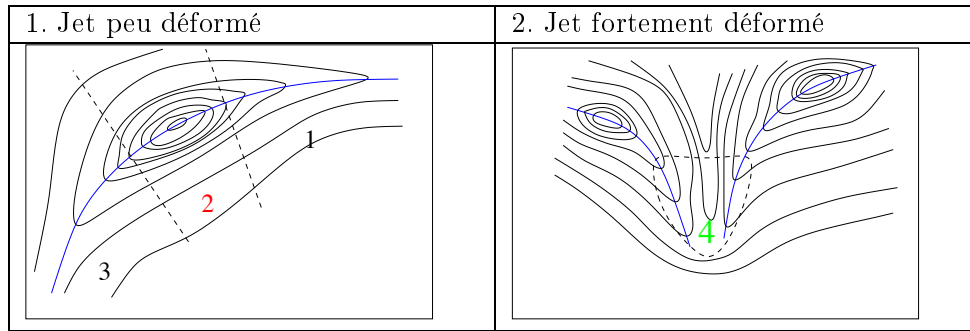


FIG. 5.5 – Classification des radiosondages en fonction de leur position par rapport au maximum du jet ou par rapport aux régions de très forte courbure : 1 et 3 : régions de sortie et d'entrée du jet ; 2 bande comprenant le maximum du jet (vitesses supérieures à $0.8U_{max}$ au niveau de la ligne de crête) ; 4 région où le jet est très fortement déformé.

servation, les radiosondages ont été classés en fonction de leur situation par rapport au jet comme indiqué dans la figure 5.5. Les graphes de l'intensité du vent en fonction de la distance au jet ont été tracés de nouveau en fig. 5.6, en indiquant cette fois en vert les radiosondages proches d'une région de vent fortement courbé, en rouge les radiosondages proches des maxima du jet. Il apparaît assez nettement que ces deux configurations rendent compte de la quasi-totalité des radiosondages pour lesquels l'intensité des ondes était élevée. Des analyses d'observations radar [TWM99, PWV01], ou d'observations lidar associées à des calculs de tracé de rayons [HSH01], ont souligné déjà le rôle de telles régions comme sources d'ondes.

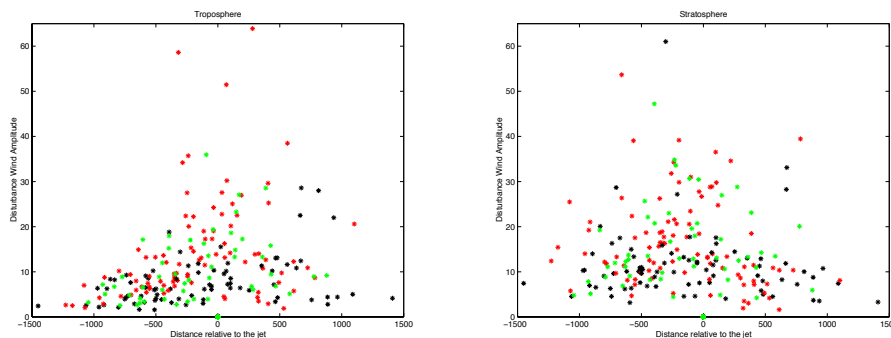


FIG. 5.6 – Intensité des ondes en fonction de la distance au jet, en distinguant les sondages proches des maxima de vent (rouge), ceux proches de régions où le jet est fortement courbé (vert), et les autres (noirs).

L'analyse qui précède a confirmé le rôle du jet comme source d'ondes prépondérante pour la troposphère et la basse stratosphère au-dessus de l'Atlantique Nord. Elle a permis également d'identifier les régions de l'écoulement et les configurations de celui-ci les plus favorables à de fortes présence d'ondes : près des maxima de vent, et près des régions de fortes courbure, conformément à ce qu'on pouvait attendre. Cette dernière région apparaît quand le jet est fortement courbé.

Pour aller plus loin, il semble préférable de ne plus chercher à analyser l'ensemble des radiosondages par des classifications de plus en plus précises, mais au contraire de chercher à comprendre en détail certains événements. Ceci permettra éventuellement de mieux comprendre quels sont, dans la dynamique du jet, les éléments essentiels pour la génération d'ondes. Une analyse détaillée d'un événement d'émission d'ondes correspondant à la configuration du jet fortement courbé (5-6 février) est présenté dans la section suivante.

5.3 Un exemple d'ajustement géostrophique

La période du 5-6 février est typique de la configuration du jet fortement courbé, favorable à de fortes émissions d'ondes. Lorsque le jet se trouve dans cette configuration, il forme un 'V' qui se déplace en une à deux journées au dessus de l'Atlantique sans que sa forme soit beaucoup modifiée (*cf* fig. 5.8). Ceci nous a permis de reporter sur un schéma les amplitudes des ondes dans les différents radiosondages disponibles pour ces journées (*cf* fig. 5.7). Les navires restant à peu près immobiles tandis que la forme en V dessinée par le jet se déplace vers l'est, ces radiosondages nous fournissent en quelque sorte une coupe de cette configuration (à prendre avec réserve puisque les radiosondages sont étalés, temporellement, sur deux jours).

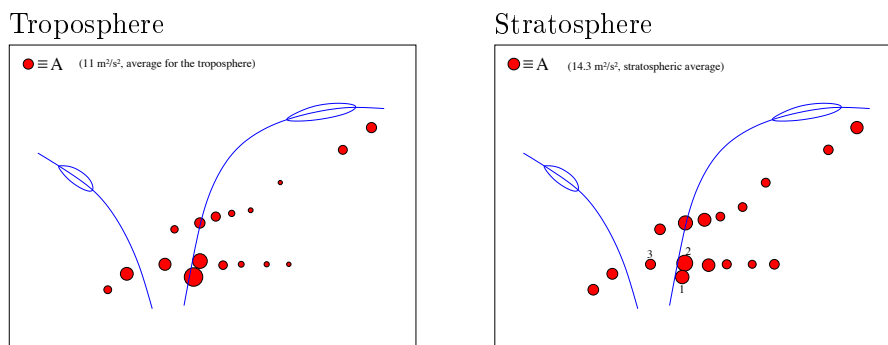


FIG. 5.7 – 'Coupe transversale' d'une configuration de jet très déformé du 5-6 février; chaque point rouge représente un sondage, et sa position relative au motif en 'V' du jet. La surface de chaque point rouge est proportionnelle à l'activité ondulatoire dans ce sondage.

Trois radiosondages durant la période du 5-6 février contiennent des ondes de basse fréquence et de forte amplitude dans la basse stratosphère, de 10 à 15km. La configuration du jet et la localisation des différents radiosondages sont données par les cartes de la figure 5.8. La déformation du jet peut être interprétée comme liée à une onde de Rossby qui déferle, comme le montre la carte de vorticité potentielle sur la surface isentrope, figure 5.9.

La localisation des trois radiosondages est indiquée sur la figure 5.8, qui montre aussi la norme du vent à $Z = 9km$.

Nous montrons ci-dessous, notamment à l'aide des hodographes des trois radiosondages, que nous pouvons interpréter l'activité ondulatoire forte dans la région où le jet est fortement déformé, les 5 et 6 février, comme l'émission

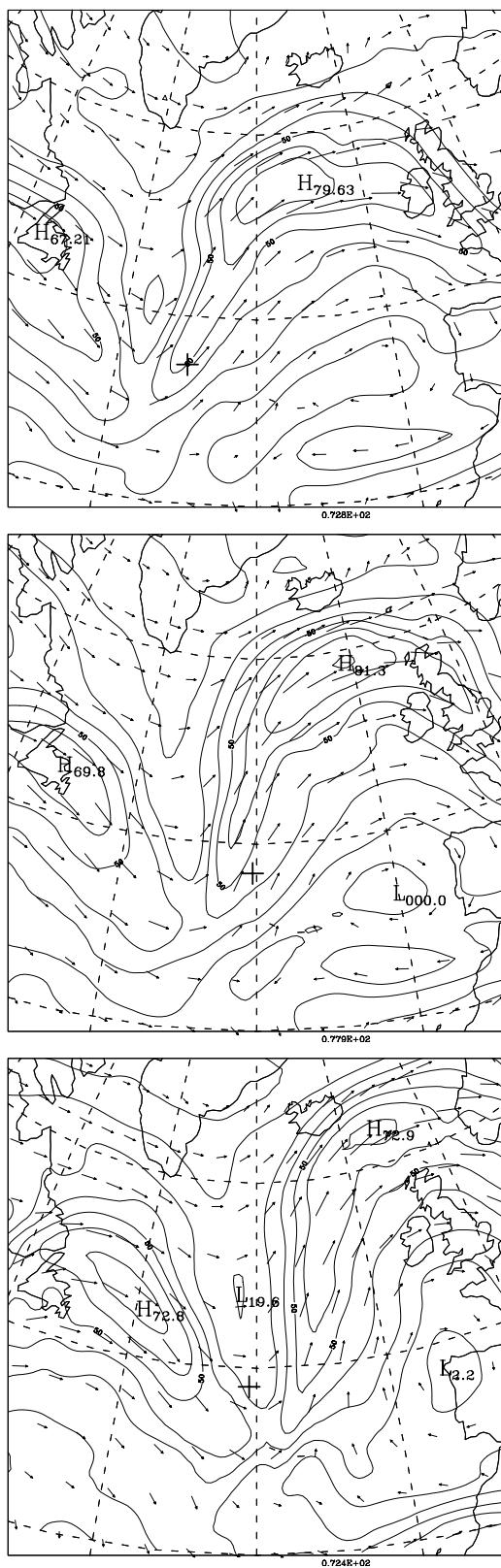


FIG. 5.8 – Vent et norme du vent à $Z = 9\text{km}$ le 05/02 à 12.00GMT (en haut), le 05/02 à 18h00GMT, et le 06/02 à 06.00GMT. Les croix indiquent l'emplacement des bateaux pour les sondages correspondants.

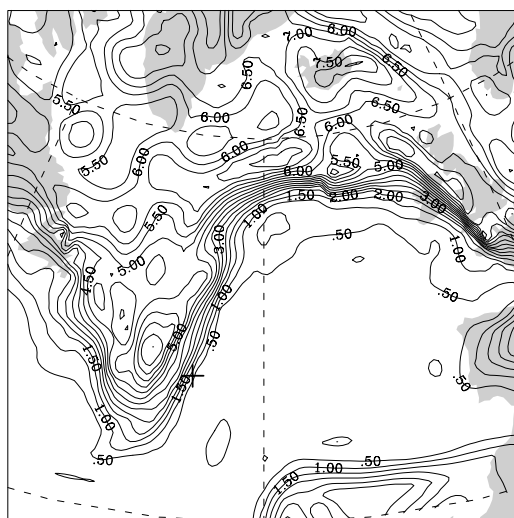


FIG. 5.9 – Vorticité potentielle sur la surface 320K, le 5 février à 12GMT ; le radiosondage correspondant est indiqué par une croix. L'altitude de cette surface isentrope est comprise entre 9 et 11km. Les régions de forts gradients de vorticité potentielle coïncident bien avec le jet indiquée par les cartes de norme du vent données en figure 5.8.

par ajustement géostrophique d'un paquet d'ondes de basse fréquence et de forte amplitude.

5.3.1 Evolution de la région de vent agéostrophique

Pour mettre en évidence l'ajustement géostrophique, nous montrons ci-dessous, à l'aide des analyses du Centre Européen, que les trois radiosondages ont été effectués dans ou à proximité (sous le vent) d'une région fortement hors équilibre.

Une première approche pour identifier les régions de l'écoulement qui sont hors équilibre consiste à regarder la norme du vent agéostrophique. Elle a été tracée à $Z = 9km$ à l'aide des données du Centre Européen (panneaux du haut des figures 5.10, 5.11 et 5.12). Un noyau de vent agéostrophique intense très important et très bien défini apparait là où le vent change fortement de direction. Ce noyau de vent agéostrophique se trouve au sud-est des deux premiers radiosondages (ces deux premiers radiosondages sont 'sous le vent' de cette région hors équilibre), et au sud du dernier. Sur la verticale, ce noyau d'agéostrophie s'étale de 5 à 10km, son maximum de situant entre 7 et 8km en général. Temporellement, il est présent au moins dès le 05/02 à 00h, et il est maximal le 06/02 entre 00h et 06h.

Utiliser la norme du vent agéostrophique pour repérer les régions hors équilibre a cependant des inconvénients : notamment, l'équilibre du vent peut être autre que géostrophique (vent du gradient par exemple). Ceci est particulièrement vrai dans les régions où le vent a une forte courbure.

D'autres critères servant à repérer les régions fortement hors équilibre ont été mis au point en analysant les ordres de grandeur des différents termes des équations. Zhang *et al* [ZKDK00] ont comparé différentes mé-

thodes pour identifier les régions hors équilibre. Ils suggèrent d'utiliser le nombre de Rossby lagrangien comme critère pour diagnostiquer les zones hors équilibre [KD88, OD95, ZKDK01]. Le nombre de Rossby lagrangien compare l'accélération des particules à la force de Coriolis :

$$Ro_L = \frac{|D\mathbf{v}/Dt|}{f|\mathbf{v}|} = \frac{|f\mathbf{v}_{ag} \times \mathbf{e}_z|}{f|\mathbf{v}|} = \frac{|\mathbf{v}_{ag}|}{|\mathbf{v}|}, \quad (5.2)$$

où \mathbf{v}_{ag} est le vent agéostrophique. Ce nombre de Rossby lagrangien a été tracé : ses maxima sont légèrement supérieurs à 1, et concordent très bien avec le noyau de vent agéostrophique mentionné ci-dessus. Ces cartes⁴ ne sont pas montrées ici.

Koch & Dorian [KD88] suggèrent qu'il est plus pertinent de définir le nombre de Rossby lagrangien en utilisant uniquement la partie de la vitesse agéostrophique qui est normale au vent \mathbf{v}_{ag}^\perp :

$$Ro_\perp = \frac{|\mathbf{v}_{ag}^\perp|}{|\mathbf{v}|}, \quad (5.3a)$$

En effet, une partie de $|\mathbf{v}_{ag}|$ correspond, surtout dans les régions à forte courbure, à l'écart entre le vent géostrophique et le vent du gradient. Or, cet écart contribue à la composante tangentielle du vent agéostrophique. Par conséquent, c'est avant tout la composante normale du vent agéostrophique qui doit être prise en compte dans le calcul du nombre de Rossby lagrangien [KD88, ZKDK00]. Zhang *et al* [ZKDK00] indiquent que l'utilisation de Ro_\perp pour identifier les régions hors équilibre donne des résultats en accord avec d'autres indicateurs plus sophistiqués (utilisables dans des simulations numériques [ZKDK01], mais pas ici).

⁴Elles indiquent notamment que les régions de forts vent agéostrophique coïncident avec les maxima du jet (régions qui sont également mises en valeur par les cartes de $|\mathbf{v}_{ag}|$) sont caractérisés par des valeurs de Ro_L faibles (moins de 0.3).

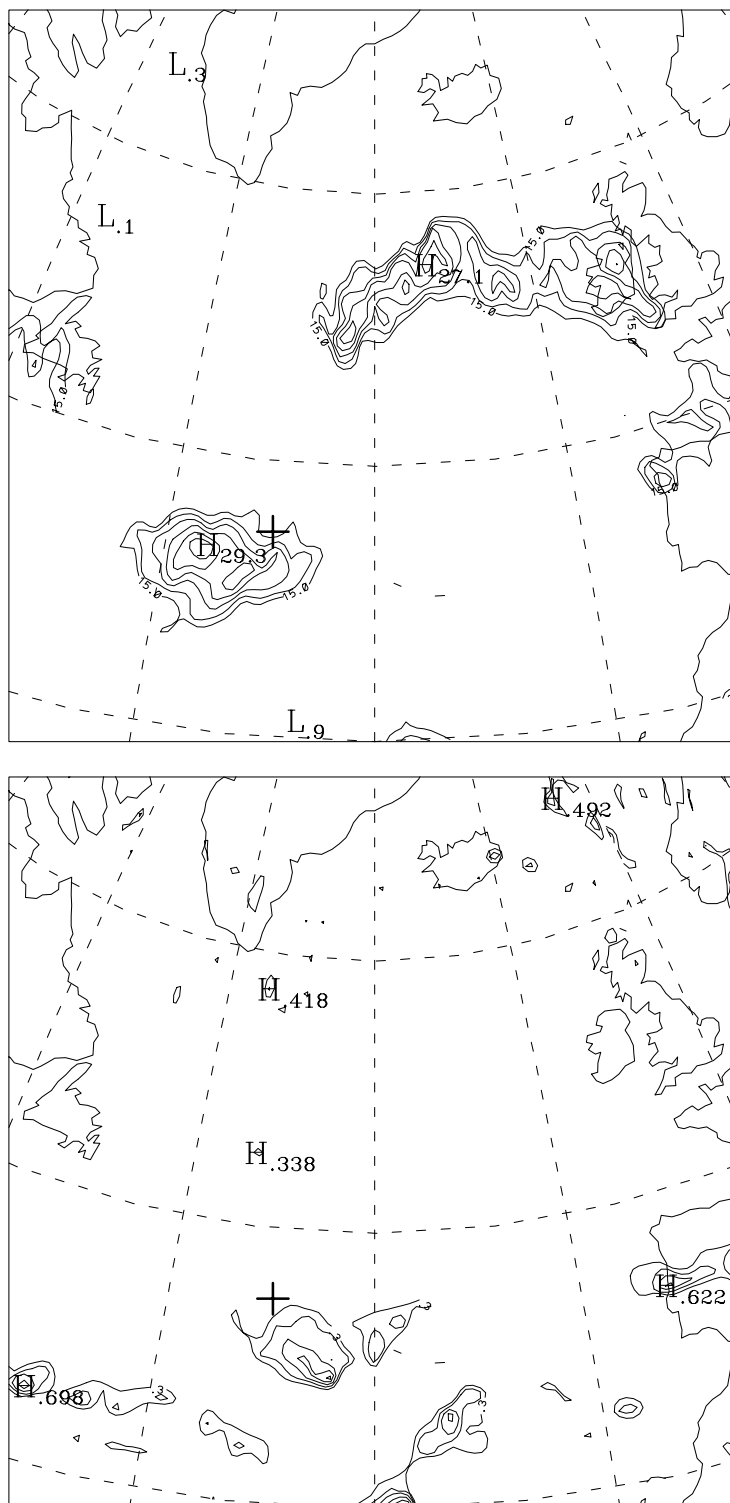


FIG. 5.10 – Norme du vent agéostrophique (en haut, 2.5ms^{-1} d'un contour au suivant, contours en trait plein à partir de 20ms^{-1}), et nombre de Rossby lagrangien Ro_{\perp} (en bas, (0.1 d'un contour au suivant, trait plein à partir de 0.3), pour le 05/02 à 12.00GMT, à $Z = 9\text{km}$. Le lieu de lancement du radiosondage 1 est indiqué par une croix.

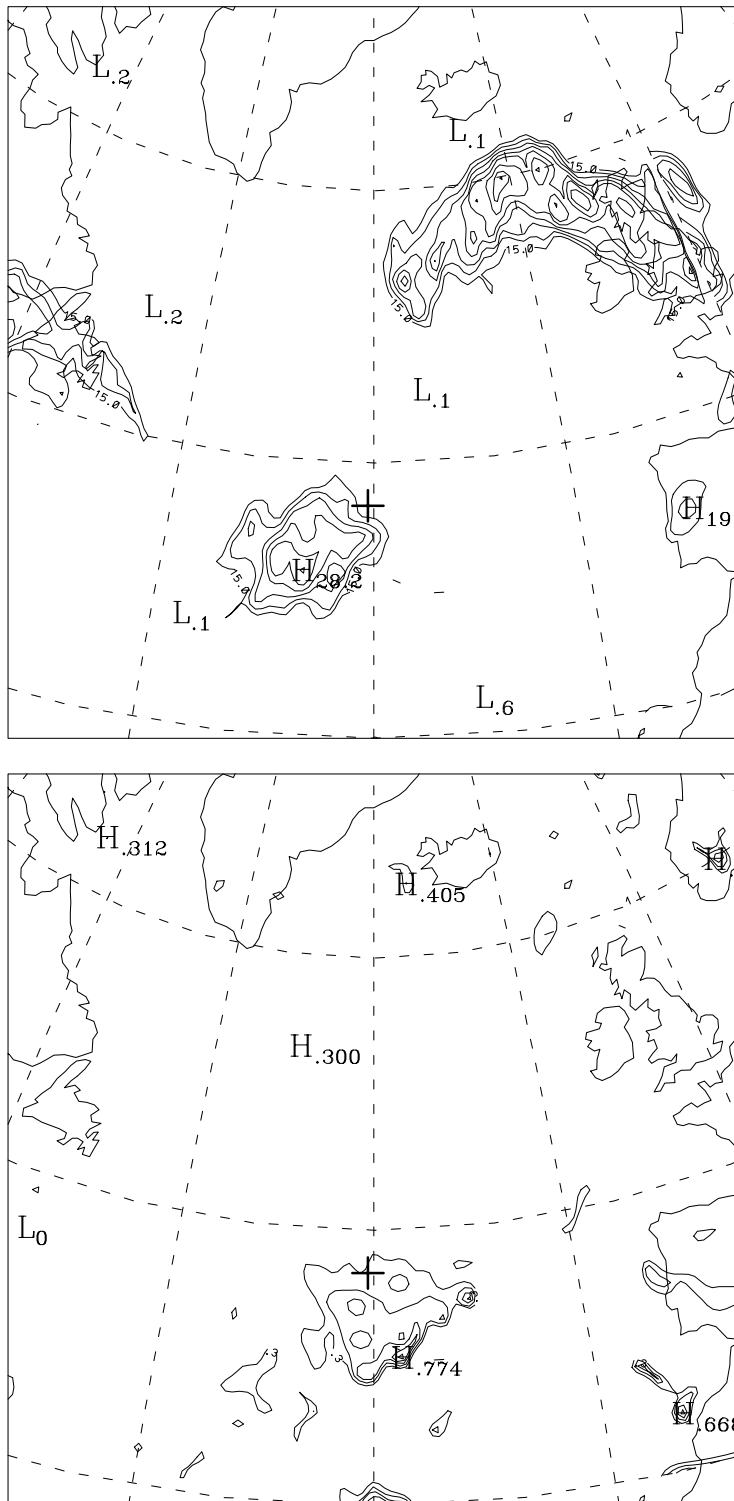


FIG. 5.11 – Comme la figure 5.10, mais pour le 05/02 à 18.00GMT.

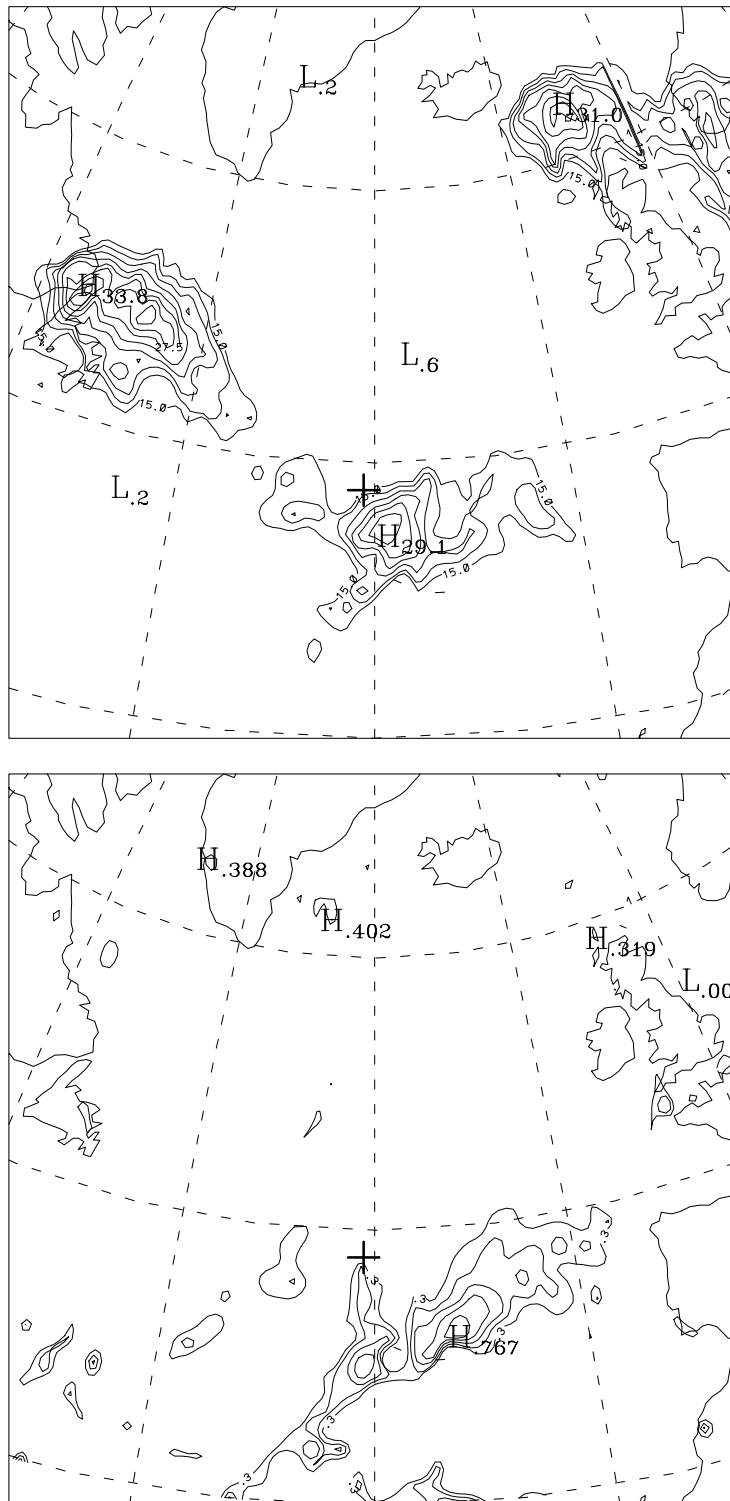


FIG. 5.12 – Comme la figure 5.10, mais pour le 06/02 à 06.00GMT.

En revanche, le nombre de Rossby lagrangien Ro_{\perp} , à cause du dénominateur, a l'inconvénient de mettre en valeur les régions de faible vent qui ne sont pas significatives. Il a donc été tracé uniquement pour les régions où le vent est supérieur à $15ms^{-1}$ (panneaux du bas dans les figures 5.10, 5.11 et 5.12). En combinant les informations données par ces deux indicateurs ($|\mathbf{v}_{ag}|$ et Ro_{\perp}) et en gardant à l'esprit leurs défauts respectifs, il apparaît assez clairement que les radiosondages ont été effectués juste au nord d'une région fortement hors équilibre. Cette région est située à la pointe, ou un peu à l'est de la pointe, du V formé par le jet.

5.3.2 L'émission d'ondes d'après les radiosondages

Les heures et emplacements des lancements des trois radiosondages utilisés sont indiqués dans le tableau 5.1.

Sondage	Bateau	jour	heure	latitude	longitude
1	Victor Bugaev	05/02	11h30	-37.45	+41.28
2	Le Suroit	05/02	20h31	-30.45	+42.79
3	Le Suroit	06/02	05h36	-30.85	+43.64

TAB. 5.1 – Informations sur les trois radiosondages utilisés.

Dans la figure 5.7, les points correspondants à ces radiosondages ont été indiqués par les chiffres correspondants. Dans chacun de ces radiosondages, nous observons une onde très nette de très basse fréquence entre $10km$ et $15km$ environ.

Une transformée de Fourier effectuée sur la perturbation du vent \mathbf{v}' pour chacun de ces sondages nous indique dans quelle fenêtre nous pouvons filtrer \mathbf{v}' afin d'isoler l'onde qui domine le signal entre 10 et $15km$ pour en étudier les caractéristiques (rapport d'aspect, longueur d'onde verticale, estimations de la fréquence, direction et sens du vecteur d'onde). Ces informations sont résumées dans le tableau 5.2.

Sondage	λ_z	Fenêtre	Rapport d'aspect
05/02, 11h30	$2.2 \pm 0.35km$	$1.5 - 5km$	1-1.5
05/02, 20h31	$2.2 \pm 0.15km$	$1.5 - 3.5km$	1-1.5
06/02, 05h36	$2.1 \pm 0.3km$	$1.5 - 3km$	1.4-1.6

TAB. 5.2 – Fenêtre utilisée pour filtrer \mathbf{v}' et isoler l'ondes dans les trois sondages et caractéristiques de l'onde obtenues d'après ces profils filtrés.

Pour estimer la fréquence intrinsèque de l'onde, on peut d'une part utiliser les rapports d'aspects dans les hodographes filtrés : ces ondes sont des ondes de très basse fréquence $f < \omega < 1.5f$.

Par ailleurs, pour estimer la fréquence absolue de l'onde, on peut aussi mesurer de combien descendent⁵, dans les profils filtrés, les maxima de vitesse entre les deux radiosondages pris du même bateau (radiosondages 2 et 3) : on obtient une période $15.1 \pm 2.2h$, à comparer avec la période inertielle qui est $17.4h$ environ à ces latitudes.

⁵L'analyse des hodographes montrent que nous avons à faire à une onde dont l'énergie se propage vers le haut ; sa phase se propage donc vers le sol.

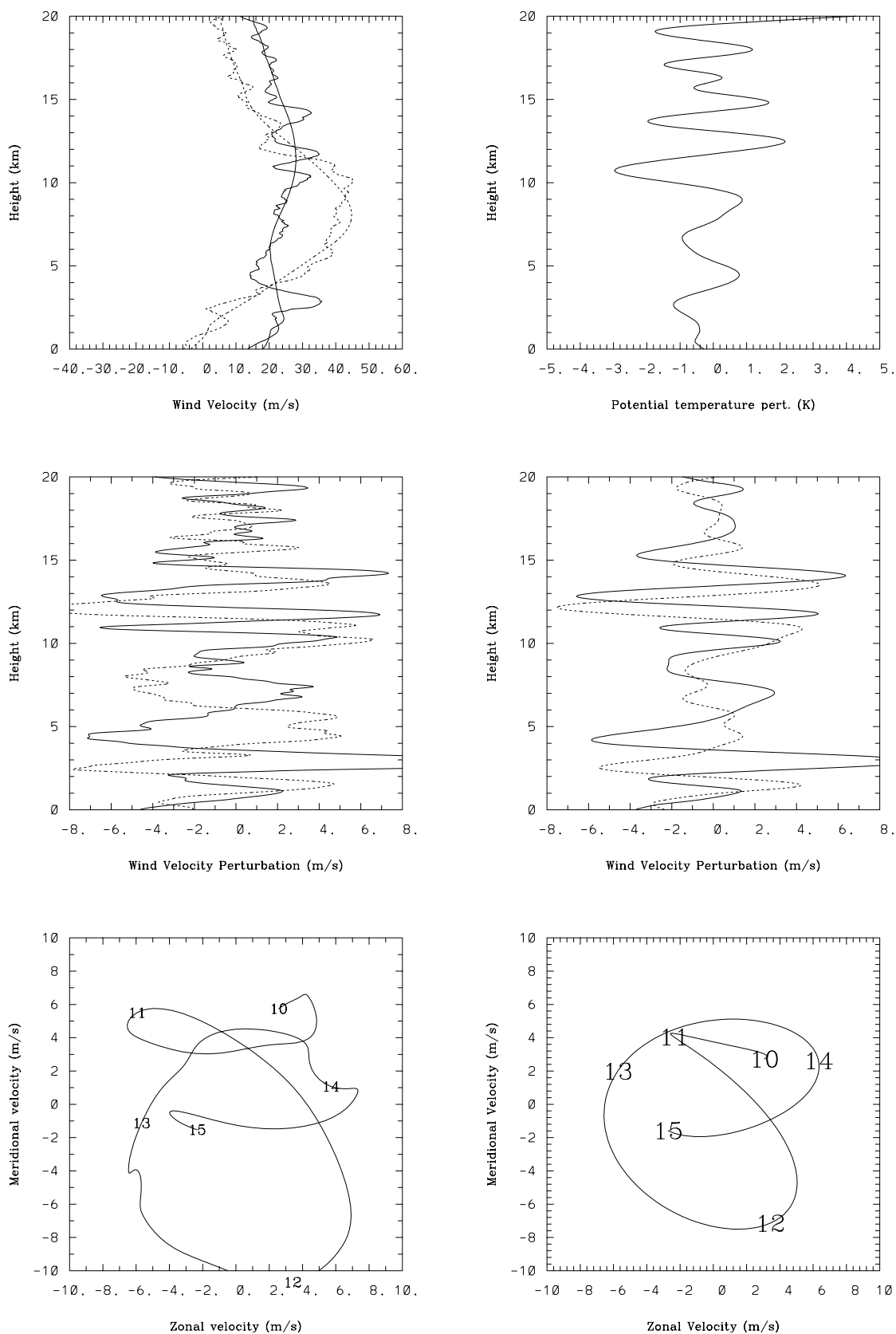


FIG. 5.13 – Colonne de gauche : profils de vent, de perturbation de vent, et hodographe entre 10 et 15km pour le premier radiosondage; colonne de droite : d'après les profils filtrés avec la fenêtre indiquée dans le tableau 5.2, perturbation de la température potentielle, perturbation du vent et hodographe.

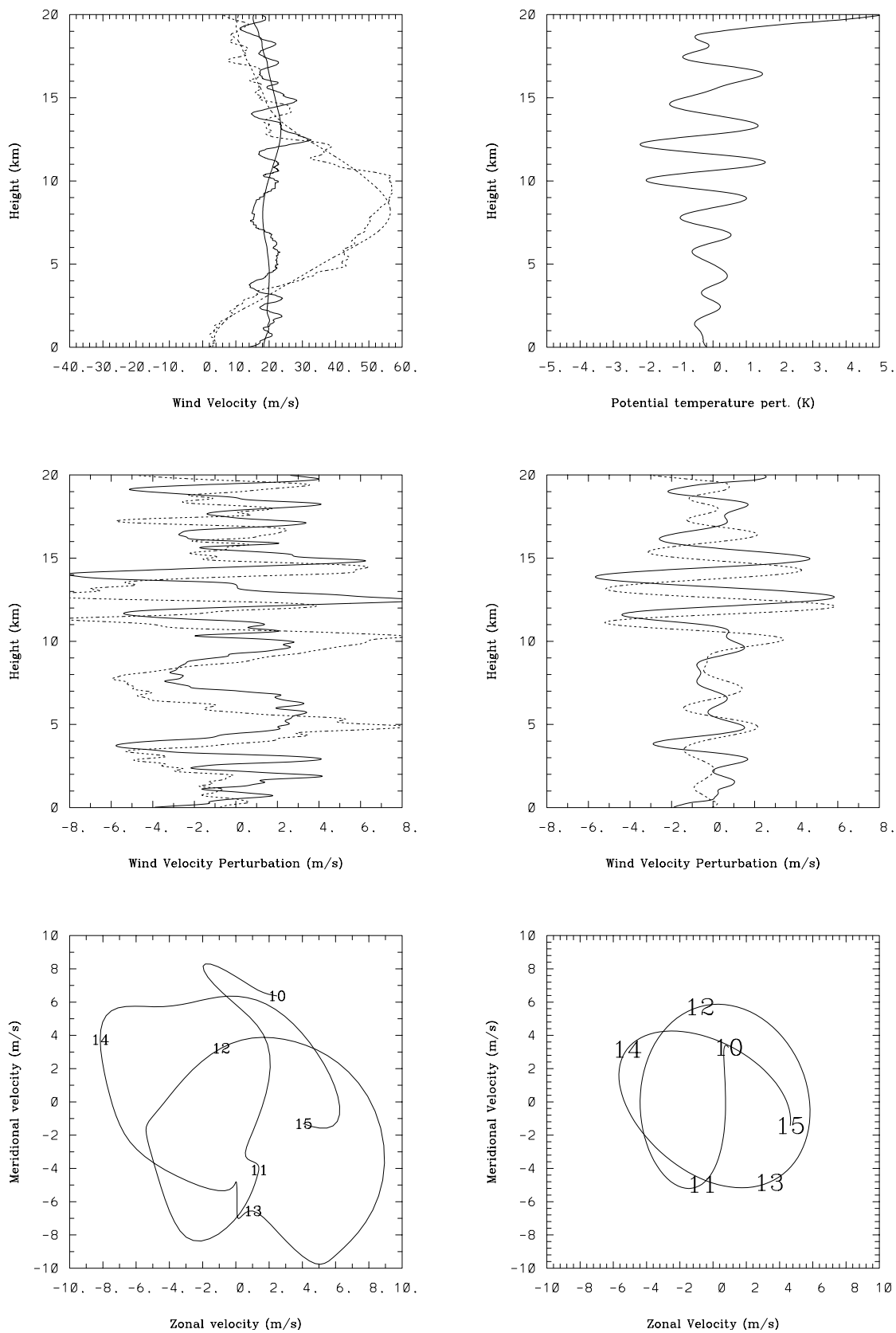


FIG. 5.14 – Comme la figure précédente, pour le deuxième radiosondage.

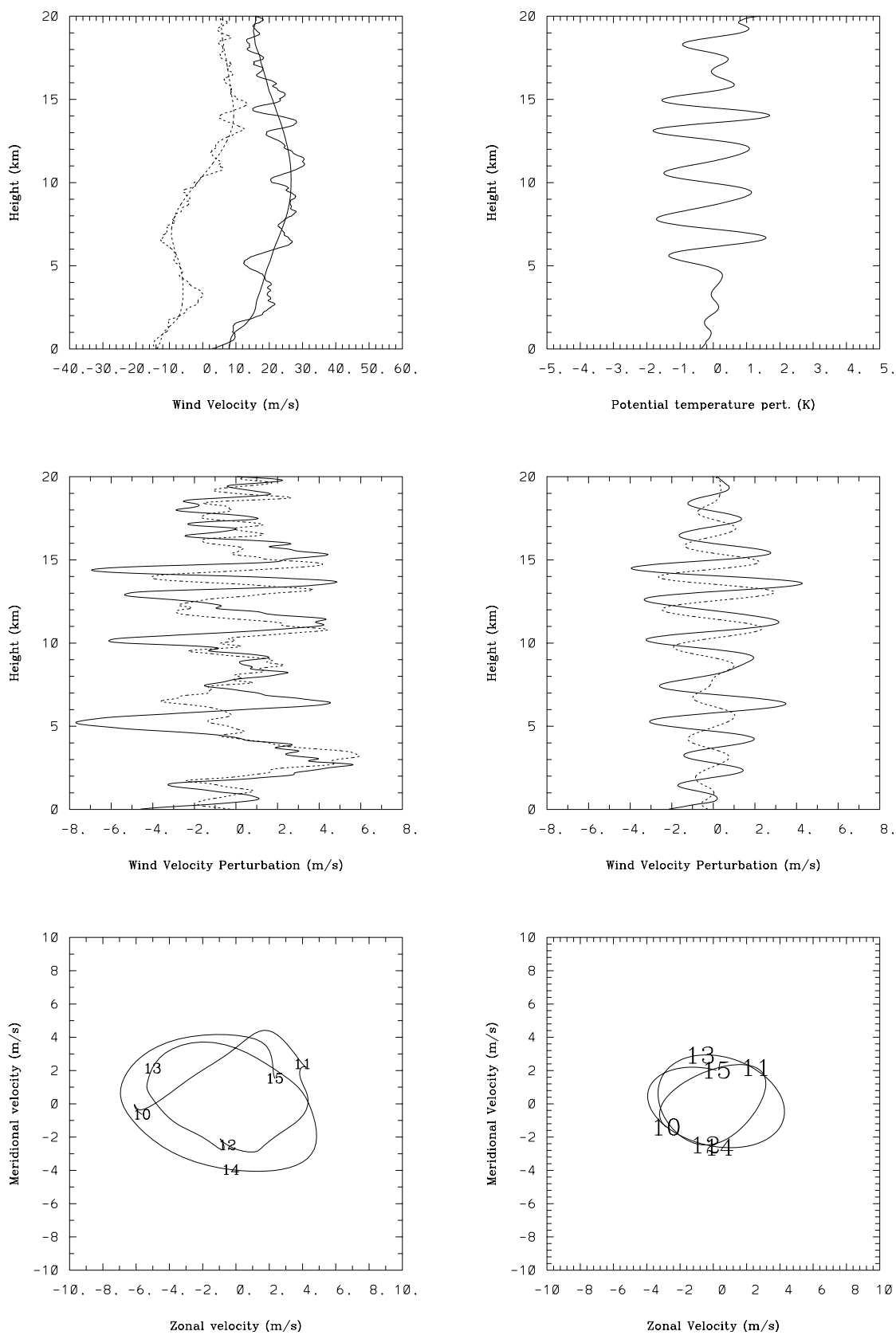


FIG. 5.15 – Comme les deux figures précédentes, mais pour le troisième radiosondage. L'onde est plus faible en amplitude que dans les deux radiosondages précédents.

Sachant que $\omega = \tilde{\omega} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}$, où ω est la fréquence absolue, $\tilde{\omega}$ la fréquence intrinsèque, \mathbf{k} le vecteur d'onde, \mathbf{U} le vent moyen, on doit avoir $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}$ négatif. Il est difficile de déterminer \mathbf{k} puisque les hodographes sont plutôt circulaires, sauf dans le dernier radiosondage. Les hodographes filtrés nous suggèrent la direction de \mathbf{k} : par exemple pour le sondage 3, la direction du vecteur d'onde est entre (nord ouest)-(sud est) et ouest-est. A l'aide du profil de température, on peut déterminer le sens de \mathbf{k} : les maxima de température précèdent théoriquement d'un quart de période le maximum de perturbation de la vitesse dans le sens de \mathbf{k} . Pour le deuxième radiosondage, ceci donne un vecteur d'ondes \mathbf{k} orienté entre le sud et l'est, avec $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U} < 0$. Le cas du premier radiosondage est moins net.

Il est légitime de se demander pourquoi \mathbf{k} est-il vers le sud-sud-est alors que les radiosondages sont pris au Nord de la zone qui s'ajuste (*cf* fig. 5.10, 5.11 et 5.12)? Ceci s'explique par le fait que la zone d'observation est sous le vent par rapport à la région hors équilibre que nous proposons comme origine des ondes. Les ondes observées sont de très basse fréquence, et leur propagation est donc lente, et elles ont pu ainsi être advectées depuis la région hors équilibre jusqu'à la région où nous les avons observées. Cette interprétation est cohérente avec le fait que dans le troisième radiosondage, l'onde est de plus faible amplitude : d'après la figure 5.10, le radiosondage 3 n'est plus exactement sous le vent de la région hors équilibre. L'onde observée serait en quelque sorte 'moins fraîche' que celles observées dans les radiosondages 1 et 2.

L'analyse détaillée d'une onde observée dans trois radiosondages étalés sur 18 heures entre le 5 et le 6 février montre donc que cette onde de forte amplitude ($\sim 10ms^{-1}$ alors que le vent ne dépasse guère $50ms^{-1}$) est générée par ajustement géostrophique dans une région hors équilibre située plus au sud et associée à la région de très forte courbure du jet. Un élément supplémentaire vient appuyer cette interprétation : l'analyse des champs de divergence du vent sur les surfaces isentropes d'après les analyses du Centre Européen.

5.3.3 Champ de divergence du vent d'après le Centre Européen

Les analyses du Centre Européen permettent de tracer des cartes du champ de divergence du vent sur les surfaces isentropes. Une partie de cette divergence est liée aux circulations tridimensionnelles autour des jets [KS86], mais une partie est clairement la signature d'ondes de grande échelle [MLT02], reconnaissable par des bandes de divergence et de convergence.

Nous présentons ici (figure 5.16) la divergence du vent sur la surface $340K$ (entre 11 et 12km dans nos radiosondages) le 5 février à 18GMT et le 6 février à 12GMT. L'émission d'une onde à partir de la région hors équilibre mise en évidence en 5.3.1 y est très nette. Elle est plus nette encore pour le 6 février à 12GMT, mais nous n'avons pas de radiosondage correspondant à cet endroit et à ce moment-là. La structure de l'onde est cohérente avec les radiosondages (vers le sud, sud est près de la source, puis davantage vers l'est à mesure que l'onde est advectée par le vent vers le nord est).

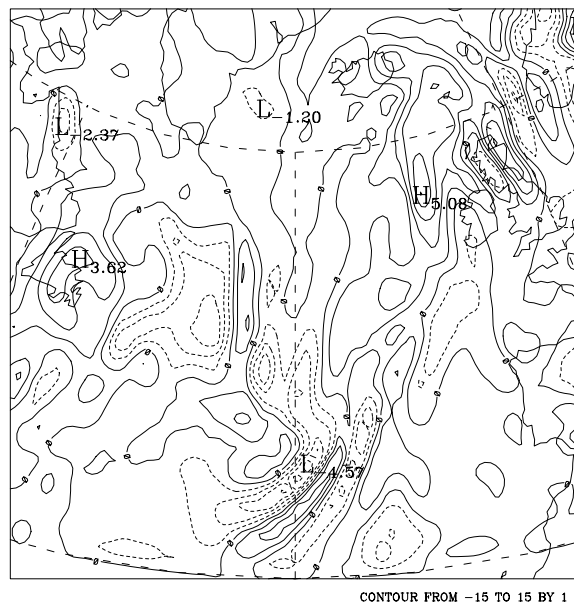
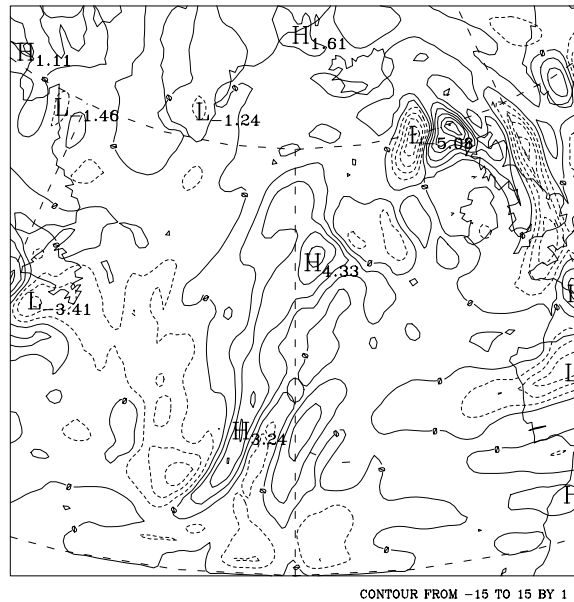


FIG. 5.16 – Divergence du vent sur la surface isentrope 340K pour le 5 février à 18 heures et pour le 6 février à midi.

Nous ne pouvons espérer de façon générale que le modèle du Centre Européen résolve les ondes de petite échelle, et il ne décrira pas de façon précise des ondes de faible longueur d'onde verticale. En revanche, il est raisonnable qu'il résolve des ondes de grande échelle excitées par l'évolution de l'écoulement à grande échelle⁶. Ces cartes forment donc un élément important confirmant l'interprétation donnée ci-dessus de l'évènement étudié.

5.4 Discussion et perspectives

L'analyse de l'ensemble des radiosondages a confirmé le rôle prépondérant du jet troposphérique comme source d'ondes, en particulier pour la basse stratosphère. Les régions les plus favorables à l'émission d'ondes de fortes amplitudes ont été identifiées : ce sont d'une part les régions proches des maxima de vitesse, et d'autre part les régions de très forte courbure du jet.

L'étude détaillée de l'évènement du 5-6 février montre que l'ajustement géostrophique est un mécanisme de génération d'ondes important au niveau du jet. Ce mécanisme est, dans le cas étudié, le mécanisme à l'origine des ondes. Cette étude détaillée suggère également que les effets tri-dimensionnels sont sans doute essentiels, du moins dans les régions de très forte courbure du vent, pour former la région fortement hors équilibre qui émet les ondes. Enfin, elle a indiqué que les cartes de divergence du vent sur des surfaces isentropes calculées d'après les analyses du Centre Européen peuvent être utilisées, sinon quantitativement, du moins de manière indicative : notamment, elles fourniront une aide précieuse pour préciser l'identification des régions favorables aux ondes.

Cette étude n'est pas achevée ; d'autres études de cas détaillés sont en cours ; il serait souhaitable notamment de déterminer si l'ajustement géostrophique a toujours un rôle prépondérant dans les régions de très forte courbure du vent, et d'essayer d'identifier les mécanismes à l'origine des ondes dans les autres configurations favorables aux ondes (près des maxima du vent). Par ailleurs une exploitation plus systématique des cartes de divergence du vent obtenues à partir des analyses du Centre Européen pourrait se révéler très instructive.

⁶O'Sullivan & Dunkerton suggéraient dans leur étude numérique [OD95] des ondes émises par l'instabilité barocline du jet troposphérique : *'This paper emphasizes geostrophic adjustment as the numerically best resolved, and probably most fundamental, mechanism of IGW excitation.'*

Chapitre 6

Emission spontanée d'ondes de gravité par des mouvements vorticaux non-stationnaires

*'Comme l'article était en Russe,
il passa inaperçu.'*
Jacques Roubaud.

Dans les trois premiers chapitres, la décomposition de l'écoulement en ondes et vortex a été considérée dans des situations où la partie vorticale était exactement à l'équilibre géostrophique, donc *stationnaire*. En général pour les fluides en rotation, cette partie vorticale est non-stationnaire mais son évolution est plutôt lente relativement à celle des ondes d'inertie-gravité, et de nombreux éléments suggèrent que sa dynamique se découple de celle de la partie rapide (cf Introduction), du moins dans certains régimes de paramètres. L'idée que ce découplage peut être total et exact est équivalente à l'existence de la variété lente évoquée en Introduction (cf 1.2.2).

Un tel découplage ne peut cependant pas être parfaitement exact, car les mouvements vorticaux en général sont non-stationnaires, et par conséquent excitent (faiblement mais inévitablement) des ondes. Comprendre le mécanisme de cette émission dans un fluide continument stratifié, quantifier cette émission et son effet sur l'écoulement vortical qui en est à l'origine sont les questions centrales de ce chapitre.

Cette émission, tout d'abord étudiée dans des fluides faiblement compressibles, a été analysée récemment dans le modèle de l'eau peu profonde en rotation pour analyser les limitations fondamentales qu'elle impose à la notion de variété lente (section 6.1). Nous étudions cette émission dans un fluide continument stratifié sans rotation, en utilisant comme écoulement vortical nonstationnaire un vortex que nous savons décrire analytiquement, portant ainsi l'analyse de cette émission au cas d'un fluide tri-dimensionnel, où les ondes sont anisotropes [PZ02b]. Ce travail est introduit et présenté dans la section 6.2. Enfin, l'effet de la rotation sur cette émission est discutée en section 6.3.

6.1 Limitations de la 'variété lente' par l'émission spontanée dans des modèles bidimensionnels

Nous donnons dans cette section un bref historique des notions d'émission de Lighthill et des études de ses effets sur l'écoulement vortical qui la produit (réaction inverse), et présentons plus en détail les études récentes sur cette émission dans le modèle de l'eau peu profonde et sur ses conséquences pour la notion de variété lente.

6.1.1 L'émission spontanée et la réaction inverse

Les mouvements d'un fluide sans rotation, et sans stratification, peuvent se décomposer en une partie vorticale qui sera incompressible, et une partie compressible, les ondes acoustiques. Lighthill [Lig52] a considéré le premier les ondes acoustiques qui pouvaient être engendrées par des mouvements vorticaux. Le point essentiel que Lighthill avait compris, comme le soulignent Ford, McIntyre & Norton [FMN00], est que l'émission est suffisamment faible pour que l'on puisse décrire les mouvements vorticaux comme si le fluide était incompressible.

Crow [Cro70] a précisé la formulation mathématique rigoureuse dans laquelle ce problème d'émission devait être considéré. Une séparation d'échelle entre l'échelle des mouvements vorticaux (petits) et l'échelle des ondes (grande échelle), est nécessaire pour pouvoir traiter le problème par raccordement asymptotique des mouvements entre deux régions : une région interne (vorticale, où l'écoulement à l'ordre dominant est incompressible¹) et une région externe (région des ondes). Le mouvement est décrit dans chaque région par des séries asymptotiques. C'est le raccordement de ces séries entre les deux régions qui détermine, ordre par ordre, les ondes émises par les mouvements vorticaux. Ces idées ont été appliquées dans de nombreuses situations (*cf* par exemple Lyamshev & Skvortsov [LS88], Crighton [Cri81], Kambe [Kam86]).

Bien que cette émission soit plutôt faible, elle entraîne néanmoins un flux d'énergie et de moment angulaire partant des mouvements vorticaux. L'expression obtenue pour les ondes permet de calculer ces flux, qui sont attribués à une évolution adiabatique des mouvements vorticaux. Si l'on a une description analytique de ceux-ci à l'ordre dominant, l'évolution des paramètres de cette description peut alors être déduite de l'intensité des flux d'énergie et de moment angulaire. Il est cependant difficile d'avoir une expression analytique pour le mouvement vortical. C'est pourquoi l'évolution du vortex due à la réaction inverse ne peut être calculée que pour des écoulements vorticaux idéalisés (vortex ponctuels, vortex de Kirchhoff...).

Le calcul de la réaction inverse a été proposé pour la première fois par Klyatskin [Kly66] pour deux vortex annulaires. Gryanik [Gry83] a considéré dans le plan des configurations de plusieurs vortex ponctuels, de même signe ou de signes différents. Notamment, pour deux vortex ponctuels de même signe, il obtient une émission d'ondes en $\mathcal{O}(M^2)$, où M est le nombre de Mach.

¹Qualitativement, l'écoulement vortical se fait sur une échelle suffisamment petite pour que la compressibilité du fluide puisse être négligée. Loin en revanche, les fluctuations induites par ces mouvements se font sur une échelle plus grande, suffisamment grande pour que la compressibilité du fluide ne soit plus négligeables.

Le flux d'énergie emporté par les ondes est responsable d'un éloignement progressif des deux vortex sur une échelle de temps T/M^4 , où T est le temps de retournement de la configuration des deux vortex.

6.1.2 Exemple du vortex de Kirchhoff

Zeitlin [Zei88, Zei91] a décrit l'émission et la réaction inverse pour une classe de vortex² comprenant le vortex de Kirchhoff, dans un fluide bidimensionnel faiblement compressible. Ceci constitue un exemple explicite de l'émission pour un écoulement plus réaliste que les vortex ponctuels, et permet surtout de quantifier l'effet de la réaction inverse.

Le vortex de Kirchhoff

Le vortex de Kirchhoff est intéressant à la fois physiquement (c'est certes une solution idéalisée, mais les vortex avec de forts gradients de vorticité et une forme plus ou moins elliptique sont fréquents, tant dans des écoulements bidimensionnels que dans des écoulements fortement stratifiés (*cf* 6.2.1)) et techniquement (c'est une solution exacte des équations d'Euler 2D, donc une solution à l'ordre dominant pour le fluide faiblement compressible, que nous savons décrire analytiquement).

Ce vortex consiste en une région elliptique de vorticité uniforme entourée de fluide où la vorticité est nulle (*cf* par exemple Lamb [Lam32]). Il tourne sur lui-même à vitesse constante. Cet écoulement peut être décrit par la méthode proposée par Legras & Zeitlin [LZ92] (dynamique conforme, voir aussi [For94]), ou par le formalisme d'Abrashkin & Yakubovich [AY84, Zei91], qui permet de comprendre les trajectoires dans le fluide : les particules appartenant à la tâche de vorticité uniforme décrivent des cercles, à une vitesse angulaire ω , tandis que l'ellipse tourne sur elle-même à une vitesse $\omega/2$. La figure 6.1 illustre ceci.

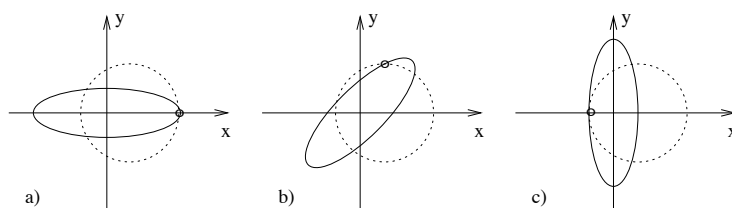


FIG. 6.1 – Trajectoire (en pointillé) d'une particule (petit cercle) appartenant à la périphérie de la tâche elliptique de vorticité uniforme (en trait plein). Trois instants successifs correspondant à un quart de période pour la rotation de l'ellipse sur elle-même sont représentés : la particule a parcouru pendant ce temps la moitié de sa trajectoire circulaire.

²La classe de vortex décrits est définie par le formalisme d'Abrashkin & Yakubovich [AY84]. Ce sont des tâches de vorticité non-uniforme (sauf pour $N = 1$) avec $N + 1$ 'pointes'. Le cas le plus pertinent est le cas $N = 1$, qui correspond au vortex de Kirchhoff. C'est pourquoi nous nous sommes limités ici au vortex de Kirchhoff.

Emission et évolution du vortex de Kirchhoff dans le cas sans rotation

L'amplitude des ondes émises est proportionnelle au carré du nombre de Mach. D'après le calcul attribuant la perte d'énergie et de moment angulaire à une évolution adiabatique des paramètres du vortex, celui-ci s'allonge³ sur une échelle de temps T/M^4 .

Le vortex ne pourra pas s'allonger indéfiniment : il est connu que le vortex de Kirchhoff est instable pour des rapports d'aspects supérieurs à 3 (Love [Lov93]). Cette instabilité n'est vraisemblablement pas ou très peu modifiée par la compressibilité du fluide, qui joue un faible rôle près du vortex. Il est donc raisonnable de penser que l'émission d'ondes peut mener à la déstabilisation du vortex lorsque le rapport d'aspect de celui-ci devient trop grand. Notons l'importance de l'absence de dissipation : une faible viscosité aura tendance à ramener la tâche elliptique de vorticité vers une distribution circulaire.

Emission d'ondes par le vortex de Kirchhoff dans le modèle de l'eau peu profonde

Ford [For94] a considéré ce même problème dans une perspective 'géophysique', donc dans un fluide tournant et dans un modèle plus familier des océanographes et météorologues : le modèle de l'eau peu profonde en rotation. Ce modèle est formellement équivalent au modèle bidimensionnel d'un gaz pour lequel le rapport des chaleurs sensibles est $\gamma = 2$. Les ondes de gravité remplacent les ondes acoustiques, et le nombre de Froude U/\sqrt{gH} remplace le nombre de Mach U/c . Ainsi, l'étude de Ford complète celle de Zeitlin pour des fluides en rotation. De plus, il avance que le vortex, à cause de la faible compressibilité, ne garde pas exactement une forme elliptique, et, par une approche perturbative, recherche les corrections au premier ordre. Le travail de Ford s'articule donc en deux parties :

1. Les corrections à la forme du vortex : le vortex est décrit à l'aide du formalisme de Legras & Zeitlin [LZ92].   l'ordre zéro en F^2 , le vortex a une forme elliptique. Les premières corrections sont d'ordre $\mathcal{O}(F^2)$. Elles sont dues à la faible compressibilité, qui fait que le vortex de Kirchhoff n'est plus une solution exacte - elles n'ont rien à voir avec l'émission des ondes. Ces résultats, suggérant notamment que le vortex peut se pincer en son milieu, sont en accord avec des résultats d'analyses faiblement non linéaire [Wil92]⁴ ou numériques [CSP93]. Notons que le calcul de ces corrections $\mathcal{O}(F^2)$ est possible, mais très difficile ; le calcul des corrections suivantes ($\mathcal{O}(F^4)$) n'est en revanche plus possible techniquement.

³Un vortex elliptique a d'autant moins d'énergie qu'il est plus allongé. Ceci se comprend mieux si l'on fait le parallèle avec les vortex ponctuels, pour lesquels une paire de vortex de même intensité ont d'autant moins d'énergie qu'ils sont proches. Notons enfin que, comme nous considérons des vortex qui ne sont pas isolés, avec un champ de vitesse qui décroit radialement comme $1/r$ en première approximation, l'énergie des vortex est infinie ; on ne s'intéresse qu'aux variations (finies) de cette énergie.

⁴La thèse de J.S. Williams n'a pas été consult e, et n'a malheureusement pas donné, à ma connaissance, lieu à des publications accessibles. Je la cite donc en me référant à Ford.

2. L'émission des ondes et la réaction inverse : pour le cas sans rotation, les résultats de Zeitlin sont retrouvés (le vortex s'allonge sur une échelle de temps T/F^4), mais leur interprétation est un peu modifiée : à mesure que le vortex s'allonge, il se déforme également à cause des corrections $\mathcal{O}(F^2)$ mentionnées ci-dessus. L'ellipse évolue vers une forme évoquant une cacahuète, avec un pincement au centre. On peut extrapoler et s'attendre, notamment d'après les simulations numériques de [CSP93], à ce que le vortex finisse par se scinder en deux. Il y a cependant dans la démarche de Ford un artefact qui mérite d'être signalé : il impose une symétrie d'ordre 2 à ses solutions, ce qui exclut le mode 3 d'instabilité qui devrait apparaître plus tôt que l'instabilité responsable d'une éventuelle scission du vortex.

Les détails de l'évolution lente de ce vortex spécifique et de sa déstabilisation nécessitent sans doute des analyses complémentaires, mais le mécanisme essentiel, l'effet et l'échelle de temps de la réaction inverse sont des résultats robustes.

Ford a également discuté des changements introduits par la rotation dans ce mécanisme ; nous reviendrons sur cet aspect dans la section 6.3.

6.1.3 Limites de la notion de 'variété lente'

L'émission d'ondes de gravité par les mouvements vorticaux nonstationnaires exclut la possibilité d'une variété lente au sens strict⁵ de ce terme. Sans entrer dans les détails (voir Ford, McIntyre & Norton [FMN00] pour une discussion du cas général dans le modèle de l'eau peu profonde) nous nous contenterons ici de discuter certains points à l'aide de l'exemple du vortex de Kirchhoff.

Illustration par l'exemple du vortex de Kirchhoff

Les calculs relatifs au vortex de Kirchhoff illustrent très bien ces limites :

1. L'écoulement lié au vortex est obtenu par inversion de la vorticité potentielle, il est donc purement équilibré. Il émet néanmoins, très faiblement certes, des ondes de gravité ou d'inertie-gravité. Il n'est donc pas possible de décrire l'évolution de ce vortex sans les ondes : *dans l'espace des phases, le système ne reste pas dans un sous-espace dont les ondes sont exclues.*
2. La perte d'énergie due aux ondes a un effet sur le vortex : il s'allonge, sur une échelle de temps T/F^4 , et finira par changer profondément, soit par instabilité [Zei91], soit en se scindant en deux vortex [Wil92, CSP93, For94]. *Dans l'espace des phases, l'écoulement après un temps d'ordre T/F^4 n'est même plus au voisinage de la solution vorticale (le vortex de Kirchhoff initial).*

Malgré ces limitations, la description purement vorticale d'écoulements complexes se révèle néanmoins remarquablement fiable, comme les montrent les simulations numériques de McIntyre & Norton [MN00].

⁵Ford, McIntyre & Norton définissent de la façon suivante ce que serait une variété lente au sens strict : 'A strict slow manifold is an invariant manifold within the full phase space, such that on it the full flow at each instant can be deduced, uniquely and exactly, by potential vorticity inversion.'

Faiblesse de l'émission et fiabilité de l'inversion de la PV

Comme le font remarquer Ford, McIntyre & Norton, la notion de variété lente, si elle ne peut être exacte, est néanmoins utile et remarquablement efficace. Ceci est illustré dans l'article de McIntyre & Norton par les simulations de l'évolution d'un fluide barotrope sur un hémisphère limité par un mur à l'Equateur, avec condition de glissement⁶. L'évolution est d'une part simulée à l'aide des équations primitives, à partir de conditions initiales préparées pour qu'elles ne contiennent pas d'ondes⁷, et d'autre part à l'aide de modèles équilibrés.

Les conditions habituellement requises pour décrire l'écoulement par une description équilibrée ne sont pas réunies : les nombre de Froude et de Rossby ne sont pas uniformément petits (le premier atteint 0.7 en certaines régions, et le second devient infini à l'Equateur). Néanmoins, au bout de dix jours d'intégration, l'état du fluide prédit à l'aide des meilleurs opérateurs d'inversion de la vorticité potentielle concorde avec une précision surprenante à l'état du fluide prédit par l'intégration des équations primitives. Ford, McIntyre & Norton suggèrent que ceci est à attribuer à la faiblesse de l'émission de Lighthill.

6.2 Emission spontan  e dans un fluide stratifié tridimensionnel

Dans l'article *'Internal gravity wave emission from a pancake vortex : an example of wave-vortex interaction in strongly stratified flows'*, nous abordons le problème de l'émission d'ondes de gravité par un vortex nonstationnaire dans le cadre d'un fluide stratifié sans rotation. Par rapport aux études précédentes, nous passons donc du cas bidimensionnel au cas tridimensionnel, et d'ondes isotropes à des ondes anisotropes. Nous rappelons ci-dessous brièvement quelques caractéristiques essentielles des fluides fortement stratifiés sans rotation (6.2.1).

6.2.1 A propos des écoulements fortement stratifiés

Récurrence des galettes

Le scaling des équations dans la région du vortex suit les lignes de l'analyse de Lilly [Lil83], qui avait pour motivation de décrire la 'turbulence stratifié'. On peut la définir [RL00] comme ce qu'il reste d'un   v  nement turbulent lorsque le nombre de Froude redevient d'ordre 1 ou inférieur. Celle-ci a été   tudi  e dans de nombreux travaux, à la fois numériques [MH89] et expérimentaux (derrière une sphère [SBF96b], ou une grille [FMS96, SBF96a]). Une caractéristique observ  e de manière récurrente est la formation de vortex

⁶Ceci autorise à l'Equateur les ondes de Kelvin, mais exclut les ondes de Rossby-gravité par exemple, ou l'instabilité inertielle due au passage de fluide d'un hémisphère à l'autre. La région de l'Equateur est inévitablement mal décrite par l'inversion de la vorticité potentielle, car il n'y a pas, à l'Equateur, de séparation entre les échelles de temps des ondes et celles des mouvements vorticaux.

⁷Ce point est important : si les donn  es initiales contiennent des ondes de Kelvin, la description 'balanced' de l'écoulement, qui ne peut les décrire, échoue près de l'Equateur.

de forme assez plate (d'où le nom 'pancake vortex'), dans lesquels l'écoulement est quasi-horizontale. Ceux-ci apparaissent également à l'issue de l'instabilité de vortex en colonne [MJ97, BC00a, BC00b]. La structure précise de ces vortex, notamment la structure verticale, a également été étudiée [FvH96, BVCH01, Spe02]; ces études montrent que ces vortex sont bien décrits par l'équilibre cyclostrophique.

Les galettes vorticales sont donc des structures récurrentes des écoulements stratifiés. Les gradients de vorticité observés au bord de ces structures sont souvent importants, ce qui justifie notre choix du vortex de Kirchhoff pour l'écoulement vortical dans notre problème.

Décomposition de l'écoulement

La notion de vorticité potentielle est également valable et pertinente dans des fluides stratifiés sans rotation [SR89, RL00]. Pour des mouvements à petit nombre de Froude (forte stratification), cette vorticité potentielle se confondra au premier ordre avec la vorticité verticale. La décomposition de Helmholtz (ou Craya-Herring) permet de distinguer la partie de la vitesse responsable de cette vorticité verticale et le reste :

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_z \times \nabla_H \psi + \nabla_H \phi + w \mathbf{e}_z, \quad (6.1)$$

où ψ décrit, à l'ordre dominant, la partie vorticale de l'écoulement. Celle-ci est incompressible et la totalité de la vorticité verticale lui est attribuée. La partie de la vitesse horizontale dérivant du potentiel ϕ décrit, avec w , les ondes.

6.2.2 *'Internal gravity wave emission from a pancake vortex : an example of wave-vortex interaction in strongly stratified flows'*

Internal gravity wave emission from a pancake vortex: An example of wave–vortex interaction in strongly stratified flows

R. Plougonven^{a)} and V. Zeitlin

Laboratoire de Météorologie Dynamique, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

(Received 13 March 2001; accepted 12 December 2001)

At small Froude numbers the motion of a stably stratified fluid consists of a quasisteady vortical component and a propagating wave component. The vortical component is organized into layers of horizontal motions with well-pronounced vertical vorticity and often takes the form of so-called “pancake” vortices. An analytical model of such a vortex that is a solution of the Euler–Boussinesq equations at a vanishing Froude number is constructed as a superposition of horizontal two-dimensional Kirchhoff elliptic vortices. This vortex is nonstationary and internal gravity waves are, therefore, excited by its motion. The radiation properties are studied by matching the vortex field with the far internal gravity wave field according to the procedure applied in acoustics to determine vortex sound. The structure of the gravity wave field is completely quantified. By calculating energy and angular momentum fluxes carried by outgoing waves and attributing them to the adiabatic change of the vortex parameters, we calculate the backreaction of the internal gravity waves radiation and show that, as in the case of acoustic radiation by the Kirchhoff vortex, this adiabatic evolution leads to an elongation of the vortex, and its eventual destabilization. © 2002 American Institute of Physics. [DOI: 10.1063/1.1448297]

I. INTRODUCTION

As was shown in the pioneering papers^{1,2} (for a recent review, see Ref. 3), strongly stratified flows are split, in the leading order in the Froude number, which is defined as a ratio of buoyancy to advection time scales, into mutually noninteracting vortex and wave components. The former is concentrated in horizontal layers with a well-pronounced vertical vorticity and, as stratification inhibits vertical motion, follows the two-dimensional (2-D) incompressible Euler dynamics^{1–3} at the leading order.

The horizontal layering in strongly stratified flows has been confirmed in a number of analytic, numerical, and experimental studies. Moreover, numerical simulations in Ref. 4 and later works have shown that coherent disc-shaped “pancake” vortices tend to emerge from an initially random field of decaying turbulence in a stratified fluid. Such vortices are also recurrent in laboratory studies of wakes in a stratified fluid: in the wake of a towed sphere,^{5,6} or in decaying turbulence behind a towed grid.^{7,8} Layering structure and the ensuing vortices have also been observed during the late stages of instability of tall columnar vortices in the stratified fluid.^{9–11} A rather detailed study of the internal structure of the pancake vortices was undertaken experimentally in Refs. 12 and 6 and numerically in Ref. 13. It was found that these vortices obey the cyclostrophic balance conditions and exhibit a pinching of the isopycnals near the core. Pancake vortices are, thus, a universal feature of stratified flows.

The other component of the flow, the internal gravity

waves (IGW), is thoroughly studied (e.g., Ref. 14), especially in the linear context. Emission of IGW by the above-mentioned wakes is well documented^{15,16} and the splitting of IGW from the vortex component is well seen, for example, while studying analytically the initial-value problem for small disturbances discussed in Ref. 17: a small initial perturbation in a stratified fluid splits into a outward propagating IGW packet and a residual steady vortex (vortical motion here is steady only because of the linearization of the equations, in the next approximation its slow evolution appears—cf. Ref. 18). The vertical vorticity plays a crucial role in such an analysis as it allows one to determine the whole of the vortical flow by inversion. The vertical vorticity is the leading-order residue of Ertel’s potential vorticity (PV): $q = \nabla \rho \cdot \boldsymbol{\omega}$, where ρ is density and $\boldsymbol{\omega}$ is the total vorticity. One can reconstruct the whole slow vortical field in higher orders as well using subsequent approximations for the PV, if only the splitting persists and the fastly outgoing wave component can still be consistently filtered out. Thus, the problem of the persistence of splitting in the higher approximations is equivalent to the problem of the slow manifold (cf., e.g., Ref. 19) in strongly stratified fluid dynamics, i.e., a subspace in the whole phase space of the system such that, once projected on it, the dynamics stays there and may be traced for long times without taking care of the fast wave motions. The possibility to filter out waves is practically very important (weather forecasting is, probably, the best example) and much understanding of atmosphere and ocean dynamics has come from the no-wave “balanced” models. It is also important in any kind of numerical simulations in stratified turbulence as (at least some part of) the wave activity is usually considered as a subgrid one. Therefore, a study of the

^{a)}Author to whom correspondence should be addressed. Telephone: (33) 1 44 32 22 21; fax: (33) 1 43 36 83 92; electronic mail: riwal.plougonven@polytechnique.org

vortex–wave interaction mechanisms is crucial in this context as it allows us to check the validity of splitting and slow-manifold ideas and to establish their limitations.

One of the essential mechanisms of wave–vortex interactions is well documented in acoustics: it is the emission of sound waves by vortices (vortex sound). As was shown in the pioneering paper by Lighthill,²⁰ nonstationary vortex motions act as sources of sound waves in a compressible fluid. The theory of this phenomenon was developed for small Mach numbers when the vortex size is much smaller than the characteristic sound-wave length. Pressure fluctuations of the *incompressible* fluid produced by the unsteady vortex in its vicinity may be related to the pressure fluctuations in the *compressible* far wave field, by comparing corresponding asymptotics. Mathematically, the rigorous basis for this description was established in the work of Crow,²¹ where the theory of matched asymptotic expansions in the inner (vortex) and outer (wave) regions were used. It was shown that the problem is well posed for small Mach numbers. The idea of vortex sound has been subsequently used to determine acoustic radiation from numerous vortex flows (e.g., Refs. 22, 23).

A step further in the vortex sound theory was made when it was realized that the backreaction of the radiation can be calculated by attributing energy and angular momentum losses due to the sound-wave emission to a slow adiabatic evolution of the vortex parameters. This has been done for the first time in the axisymmetric case of two coaxial “leap-frogging” vortex rings;²⁴ in planar situations, various configurations of point vortices were investigated along these lines in Ref. 25, where radiation-induced vortex collapse was discovered. Finally, in Ref. 26, a distributed vortex structure—the Kirchhoff vortex (an elliptic patch of uniform vorticity surrounded by irrotational fluid cf., e.g., Ref. 27) was studied. Using matched asymptotic expansions, as in Ref. 21, the sound waves emitted by the vortex were calculated. Assuming that the parameters of the vortex varied slowly in response to the loss of energy and angular momentum due to the waves in the adiabatic approximation, the Kirchhoff vortex was found to elongate on a time scale $M^{-4}T_0$, where $M=U/c$ is the Mach number (U is the characteristic vortex velocity and c is the velocity of sound) and $T_0=U/L$ is the advective time scale (L is the characteristic vortex scale), the same time scale as for a pair of point vortices of equal sign found in Ref. 25.

The shallow water equations being equivalent to a 2-D compressible fluid with a specific equation of state, the same ideas were later used for an elliptic Kirchhoff vortex in the rotating shallow water (RSW) equations,²⁸ with special attention paid to the effect of rotation. In the SW or RSW context, the waves in question are gravity waves, and the Froude number $F=U/\sqrt{gH}$ replaces the Mach number. The waves were found to be radiated at $\mathcal{O}(F^2)$. They are responsible for a flux of energy and angular momentum away from the vortex at $\mathcal{O}(F^4)$, and induce a slow evolution of the vortex on a time scale $T_2=F^{-4}T_0$, where T_0 is the vortex advection time scale. The method used was a direct multi-time scale perturbation expansion within the framework of the conformal dynamics for 2-D vortex patches that was pro-

posed in Ref. 29 and allows a calculation of eventual departures from the elliptic shape of the vortex in the course of its slow evolution. It was shown that the presence of rotation results in the appearance of logarithmic terms $\mathcal{O}(F^n \log F)$ in the asymptotic expansion. Using symbolic computer computations, the analysis was performed up to terms $\mathcal{O}(F^2 \log F)$ under a simplifying reflectional symmetry assumption and was stopped at $\mathcal{O}(F^4)$, as it was impossible to obtain closed analytic expressions for higher-order corrections.

The phenomenon of Lighthill radiation is conceptually important in the context of geophysical fluid dynamics because it invalidates the idea of a strict slow manifold mentioned above: even a purely vortical initial condition (i.e., one exactly projected onto the would-be slow manifold) will, if unsteady, radiate gravity waves and be altered at long times by the backreaction of this radiation. Past a certain time, a wave-filtered description of the flow becomes, thus, erroneous. In the RSW context, the limitations imposed on the concepts of balance, slow manifold, and potential vorticity inversion by the Lighthill radiation were recently discussed in detail in Ref. 19.

In the present paper, by applying the vortex sound philosophy to the vortex motions in a stably stratified fluid, we make a step forward in studying wave emission by vortices and their backreaction by departing both from the two-dimensionality of the previous studies and the isotropy of sound waves (or surface inertia-gravity waves in the RSW context). The wave emission from a localized nonstationary region of uniform potential vorticity is calculated within the framework of the Euler equations in the Boussinesq approximation (Euler–Boussinesq in what follows) for a stratified fluid with a constant background stratification (constant Brunt–Väisälä frequency). The Boussinesq approximation means that sound waves are filtered out and only internal gravity waves (IGW) may propagate in the medium. For simplicity we will consider a nonrotating fluid below.

In order to carry out the calculations explicitly, we construct a simple unsteady pancake vortex, which we call a 3-D Kirchhoff vortex: a region of uniform potential vorticity with elliptic horizontal cross sections. All the horizontal ellipses bounding the vortex have the same aspect ratio and rotate at the same angular frequency. Vortices of this kind have been studied (Refs. 30 and 31) in the context of the quasigeostrophic equations. As to our knowledge, this configuration was not considered in the case of the Euler–Boussinesq equations. We will suppose in the following, as is often the case in the observed strongly stratified flows, that the height of the vortex is much smaller than its horizontal length scale: $L \gg H$.

The paper is organized as follows: in Sec. II, the 3-D Kirchhoff vortex is constructed using conformal dynamics in each horizontal plane.^{29,28} The scaling for the farfield, the matching of the far asymptotics of the latter is done in Sec. III. Finally, the backreaction on the vortex is calculated in Sec. IV. Section V contains a summary and a discussion.

II. THREE-DIMENSIONAL KIRCHHOFF VORTEX IN A STRONGLY STRATIFIED FLUID

We first recall the Euler–Boussinesq (EB) equations for a stratified fluid in the form we use below:

$$D_t \mathbf{u}_H + \rho_0^{-1} \nabla_H P = 0, \tag{1a}$$

$$D_t w + \rho_0^{-1} \partial_z P - \xi = 0, \tag{1b}$$

$$\nabla_H \cdot \mathbf{u}_H + \partial_z w = 0, \tag{1c}$$

$$D_t \xi + N^2 w = 0, \tag{1d}$$

where \mathbf{u}_H is the horizontal and w is the vertical velocity, respectively (\mathbf{u} will denote the full 3-D velocity below), ξ is buoyancy ($\xi = -\rho g/\rho_0$, where ρ is the density perturbation and ρ_0 is the basic state density), N is the Brunt–Väisälä frequency and $D_t = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla + w \partial/\partial z$ is the advective derivative. Note that these equations are not hydrostatic. Yet the scaling we use corresponds to hydrostaticity at the leading order.

A. Preliminary scaling considerations

The solution of the wave emission problem by an unsteady vortex by means of the method of matched asymptotic expansions is well posed,²¹ provided there is a scale separation between the length scale of the waves and that of the vortex. Here we find constraints imposed by this requirement on a vortex of characteristic horizontal scale L and characteristic height H .

If U is the characteristic horizontal velocity in the vortex region the advective time scale is $T = L/U$. We suppose that this time scale is much greater than the buoyancy period: $F_H = U/NL \ll 1$. As the ultimate mechanism of IGW excitation are the pressure fluctuations due to unsteadiness of the vortex flow, they are expected to have the same vertical length scale as these latter, i.e., H , and the same time scale. The dispersion relation for low-frequency IGW: $\Omega^2 = N^2 k_H^2/k_\perp^2$, where Ω is wave frequency and k_H, k_\perp are horizontal and vertical wave numbers, respectively, yields $U/L \sim NH/\lambda$. This gives an expression of the characteristic wavelength λ in terms of L :

$$\lambda = \frac{NH}{U} L = \frac{1}{F} L, \quad \text{with } F = \frac{U}{NH}. \tag{2}$$

Hence, for wave-vortex scale separation we need to have

$$F = \frac{U}{NH} \ll 1. \tag{3}$$

Here F will be the small parameter used in the asymptotic expansions below.

B. Scaling in the inner (vortex) region

In the vicinity of the vortex the motion is essentially horizontal. To make the separation between the vortex and wave motions clear, we can rewrite Eqs. (1a)–(1d) using the Helmholtz decomposition for the horizontal velocity:

$$\mathbf{u} = +\mathbf{e}_z \times \nabla_H \psi + \nabla_H \phi + w \mathbf{e}_z. \tag{4}$$

Instead of Eqs. (1a)–(1d), the divergence of (1a)+(1b) and the horizontal curl of (1a) will be used below.

The scaling is the same as in Ref. 3 (and references therein), with some minor differences. The horizontal and vertical coordinates \mathbf{x}, z are scaled as L and H , respectively; \mathbf{u}_H has a scale U , and t scales as U/L . By virtue of the continuity equation, w scales as UH/L . In the buoyancy equation, the ratio of $D_t \xi$ over $N^2 w$ scales as $F^2 = (U/NH)^2$, the square of the vertical Froude number. Finally, in order to keep only one parameter, we assume that F and the aspect ratio H/L are comparable. The nondimensionalized EB equations are

$$\partial_z (\partial_z P - \xi) + F^2 [\Delta_H P + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})] = 0, \tag{5a}$$

$$\partial_z P - \xi + F^2 (\partial_t w + \mathbf{u} \cdot \nabla w) = 0, \tag{5b}$$

$$w + F^2 (\partial_t \xi + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi) = 0, \tag{5c}$$

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta_H \psi + \mathcal{J}(\psi, \Delta_H \psi) + \nabla_H \cdot (\nabla_H \phi \Delta_H \psi) + w \partial_z \Delta_H \psi \\ + \nabla w \nabla \partial_z \psi + \mathcal{J}(w, \partial_z \phi) = 0, \end{aligned} \tag{5d}$$

$$\Delta_H \phi + \partial_z w = 0, \tag{5e}$$

where \mathcal{J} denotes the horizontal Jacobian: $J(a, b) = \partial_x a \partial_y b - \partial_x b \partial_y a$.

Using the above scaling we get for PV:

$$\begin{aligned} q = \omega \cdot \nabla \theta = \Delta_H \psi + F^2 [\xi_z \Delta_H \psi - \xi_x \psi_{zx} - \xi_y \psi_{zy} \\ + \mathcal{J}(\phi_z, \xi)] + F^4 \mathcal{J}(\xi, w). \end{aligned} \tag{6}$$

All variables are expanded in an asymptotic series in F^2 :

$$\psi = \psi_0 + F^2 \psi_1 + F^4 \psi_2 + \mathcal{O}(F^6). \tag{7}$$

At zeroth order in F^2 , Eq. (5c) yields $w_0 = 0$. Through (5e), ϕ_0 is also zero, and we get

$$w_0 = 0, \tag{8a}$$

$$\phi_0 = 0, \tag{8b}$$

$$\partial_t \Delta_H \psi_0 + J(\psi_0, \Delta_H \psi_0) = 0, \tag{8c}$$

$$\Delta_H P_0 = -\nabla \cdot (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0), \tag{8d}$$

$$\xi_0 = \partial_z P_0, \tag{8e}$$

where $\mathbf{u}_0 = +\mathbf{e}_z \times \nabla_H \psi_0$.

The motion at the leading order is, therefore, purely horizontal and vortical (bidimensionalization). Equation (8c) is equivalent to the 2-D Euler equations for incompressible fluid, where z enters as a parameter. Hence, within this accuracy it is possible to build a three-dimensional vortex as a stack of 2-D Euler ones. The vertical profile should be chosen carefully in order not to invalidate the coherence of motions in different horizontal planes and to avoid unphysical vertical gradients. Once ψ_0 is obtained from the PV distribution, the rest of the zeroth-order fields and higher-order corrections can be determined from ψ_0 : for example, (8d) determines pressure and (8e) determines buoyancy; w_1 will then be determined from ψ_0 and ξ_0 through (5c).

C. Construction of the 3-D Kirchoff vortex

A 3-D vortex in a stratified fluid is built from the same principle as in shallow water:²⁸ a bounded region of fluid having homogeneous PV (equal to unity) is taken; it is surrounded by fluid with zero PV where the flow follows from the PV inversion. The 3-D region of homogeneous PV is defined as follows: the intersection of each horizontal plane with the region of nonzero PV is an ellipse; all such ellipses are centered at the same vertical axis and have the same aspect ratio and orientation. Hence, the vortex region is entirely defined by (1) the aspect ratio, (2) the orientation, and (3) the vertical profile $\gamma(z)$ of the length of the major axis in each horizontal plane.

The flow in every horizontal plane (for every z) will be calculated using the conformal dynamics approach,²⁹ which uses conformal mappings to parametrize the patches of uniform vorticity on the plane. In each horizontal plane, an interior and an exterior region will be considered; the flow in the latter is described via a mapping of the exterior of the unit disk in the auxiliary ζ plane onto the exterior of the ellipse in the physical plane, or χ plane, where $\chi = x + iy$. As the ellipses rotate and as their size varies with z these mappings depend parametrically on z and are time periodic.

The expression for q at order 0 will account for the totality of PV, being equal to unity inside the vortex region and zero outside. All higher-order corrections to q will thus vanish, which allows us to determine perturbatively the hydrodynamical fields in an unambiguous way.

At order 0, as can be seen from (6), PV coincides with the vertical vorticity, $\Delta_H \psi$, entirely determined by the horizontal velocity. Hence the same equations as in the SW case²⁸ result, with z as a parameter, and we simply state the result.

The mapping of the exterior of the unit disk in the ζ plane onto the exterior of the ellipse in the physical χ plane is given by

$$g(\zeta) = \Gamma(z)\zeta + \frac{\nu(z)e^{i\omega t}}{\zeta}, \tag{9}$$

where g depends on z and t parametrically, and $\Gamma(z)$ and $\nu(z)$ are supposed to be real and positive for all z and such that $\nu(z) < \Gamma(z)$. The major and minor semiaxes of each ellipse are $\Gamma(z) \pm \nu(z)$, respectively. As the aspect ratio of all the ellipses in the stack is the same, Γ and ν have the same vertical profile:

$$\Gamma = \Gamma_0 \gamma(z), \quad \nu = \nu_0 \gamma(z), \tag{10}$$

where Γ_0 and ν_0 are real and positive.

The rotation frequency ω is determined by the geometrical parameters of the ellipses (and by the value of PV, here unity):

$$\omega = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu(z)^2}{\Gamma(z)^2} \right). \tag{11}$$

In the interior region $\chi = x + iy$ is the complex space coordinate, and horizontal velocity is

$$v_0^{(i)}(\chi, \bar{\chi}, z, t) = \frac{i}{2} \left(\chi - \frac{\nu_0 e^{i\omega t}}{\Gamma_0} \bar{\chi} \right). \tag{12}$$

Note that there is no vertical shear inside the vortex.

In the exterior region, all fields are considered as functions of $\zeta, \bar{\zeta}, z$, and t , where ζ and $\bar{\zeta}$ correspond to the location defined by $\chi = x + iy = g(\zeta)$. The velocity is

$$v_0^{(e)}(\zeta, \bar{\zeta}, z, t) = \frac{i}{2\Gamma_0} (\Gamma_0^2 - \nu_0^2) \gamma(z) \frac{1}{\bar{\zeta}} = i\Gamma_0 \omega \gamma(z) \frac{1}{\bar{\zeta}}. \tag{13}$$

The vertical profile $\gamma(z)$ has to be a sufficiently smooth function with compact support (of order one, due to the choice of scaling). In what follows, we choose this profile to be symmetric in z and normalized:

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \gamma(s)^2 = 1. \tag{14}$$

For instance, one can take

$$\begin{aligned} \gamma(z) &= K(z^2 - 1)^2, \quad \text{for } -1 < z < 1, \\ \gamma(z) &= 0, \quad \text{for } |z| > 1, \end{aligned} \tag{15}$$

where K is a normalization constant.

D. Pressure, buoyancy, and vertical velocity fields

The pressure field can be obtained directly by integrating the equation of horizontal motion (1a):

$$\nabla P_0 = -\partial_t \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0. \tag{16}$$

The following expressions follow:

$$\begin{aligned} P_0^{(i)} &= \frac{\omega}{4} \left(\chi \bar{\chi} - \frac{1}{2\Gamma_0} (\nu_0 e^{-i\omega t} \chi^2 + \nu_0 e^{i\omega t} \bar{\chi}^2) \right) \\ &\quad - \omega^2 \Gamma_0^2 \gamma^2(z), \end{aligned} \tag{17a}$$

$$P_0^{(e)} = \frac{\omega^2 \Gamma_0^2}{2} \left[-\frac{1}{\zeta \bar{\zeta}} + \frac{1}{2\Gamma_0} \left(\frac{\nu_0 e^{i\omega t}}{\zeta^2} + \frac{\nu_0 e^{-i\omega t}}{\bar{\zeta}^2} \right) \right] \gamma^2(z). \tag{17b}$$

From (8d), the buoyancy field can be obtained:

$$\xi_0^{(i)} = -2\Gamma_0^2 \omega^2 \gamma(z) \gamma'(z), \tag{18a}$$

$$\xi_0^{(e)} = -\Gamma_0^2 \omega^2 \left(\frac{\Gamma_0 \zeta \bar{\zeta}^{-1} - \nu_0 e^{i\omega t}}{\Gamma_0 \zeta^2 - \nu_0 e^{i\omega t}} + \text{c.c.} \right) \gamma(z) \gamma'(z). \tag{18b}$$

The vortex is in the cyclostrophic balance by construction. Hence, its core corresponds to a low-pressure anomaly and, as follows from the hydrostatic balance, buoyancy must have a negative anomaly in the lower part of the vortex and a positive anomaly in the upper part. This is exactly the case in (18a), which is illustrated in Fig. 1. Inside the vortex the isopycnals are horizontal and pinch, making the density gradient steeper, like in the observed vortices.^{6,13} One should be cautious, however, while comparing our inviscid construction with viscous simulations. For instance, vertical vorticity at the first order has a discontinuous distribution in our ana-

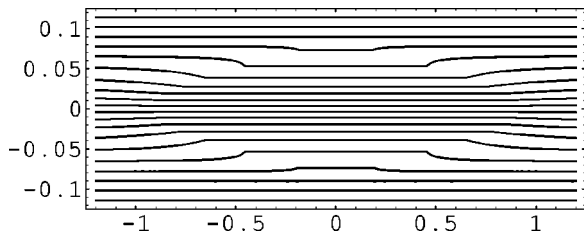


FIG. 1. Isopycnals at leading order in the plane of the minor axis. Note that the isopycnals are horizontal inside the vortex.

lytical model; in laboratory experiments, vortices commonly exhibit vorticity distributions of the Gaussian type.⁸

Vertical velocity and horizontal velocity potential are absent in the leading order; hence, the equations of motion at $\mathcal{O}(F^2)$ are needed to determine them:

$$w_1 = -(\partial_t \xi_0 + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_H \xi_0), \tag{19a}$$

$$\Delta_H \phi_1 = -\partial_z w_1. \tag{19b}$$

The vertical velocity following from (19a) has a rather complex form because of the time dependence of the mapping (9):

$$w_1^{(i)} = 0, \tag{20a}$$

$$w_1^{(e)} = i \gamma(z) \gamma'(z) \Gamma_0^3 \omega^3 \left[\frac{1}{(\Gamma_0 \xi^2 - \nu_0 e^{i\omega t})^2} \times \left(\nu_0 e^{i\omega t} (\xi \bar{\xi}^{-1} - \xi^2) - 2 \xi^2 \frac{(\Gamma_0 \xi \bar{\xi}^{-1} - \nu_0 e^{i\omega t})^2}{\Gamma_0 \xi^2 - \nu_0 e^{i\omega t}} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(\nu_0 e^{-i\omega t} \xi^2 - \nu_0 e^{i\omega t} \bar{\xi}^2)(\Gamma_0 \xi \bar{\xi}^{-1} - \nu_0 e^{i\omega t})}{\xi \bar{\xi} (\Gamma_0 \bar{\xi}^2 - \nu_0 e^{-i\omega t})} \right) - \text{c.c.} \right]. \tag{20b}$$

The vertical velocity is zero inside the vortex and in the two vertical planes containing the major and minor axes of the ellipses outside. One can check from these expressions that w_1 is continuous across the vortex edge ($|\xi|=1$). The divergent part of order-one horizontal velocity field can be obtained from (19b). However, we do not present the corresponding cumbersome expressions. Nevertheless, note that due to the smoothing effect of the inversed Laplacian, the velocity field $\nabla \phi_1$ obtained from injecting (20) into (19b) is continuous. The other first-order velocity corrections come from ψ_1 . The equation for ψ_1 is obtained using the fact that the first-order term in (6) is zero:

$$\Delta_H \psi_1 = -\xi_{0z} \Delta_H \psi_0 + \xi_{0x} \psi_{0zx} + \xi_{0y} \psi_{0zy} - \mathcal{J}(\phi_{0z}, \xi_0). \tag{21}$$

The corresponding velocity is also continuous due to inversion of the Laplacian. Hence, the complete velocity corrections at order 1 are continuous and, in principle, calculable.

The behavior of the 3-D Kirchhoff vortex appears here to be different in several ways from the behavior of its SW analog obtained in Ref. 28: first, the equation for ψ_1 (ψ_2 in Ref. 28) will not be the same because the expressions for PV are different [compare Eq. (21) with Eq. (36) (setting $f=0$) in Ref. 28]. Second, due to the vertical differentiations

needed to obtain the equation for ϕ_1 , the form of the forcing for $\Delta_H \phi_1$ in the 3-D case differs significantly from the SW case. In particular, in the nonrotating SW case only expressions of the form $\xi^n \bar{\xi}^m$ appear on the right-hand side of equations for $\Delta \phi_2$ (our ϕ_1). In the stratified 3-D case, on the contrary, we can see from (20b) that rational fractions with poles other than zero appear making integration much more involved. The reasoning of Ref. 28, therefore, cannot be directly transposed and applied in our situation. While the corrections in question were taken into account in Ref. 28 by adding a term $\mu_3 \xi^{-3}$ to the mapping (9) and some small $[\mathcal{O}(F^2)]$ corrections to Γ_0 and ν_0 , this is not sufficient here: an infinite series should be added to (9). Hence, the behavior of the 3-D vortex in each horizontal plane will be the same as the 2-D shallow water Kirchhoff vortex only at the leading order. Unfortunately, the mathematics in the following orders become too complicated to determine an explicit form of corrections.

E. Circulation, energy, and angular momentum

In this section, quantities that we will need below for the description of the long-term evolution of the vortex are calculated.

1. Circulation

Within the framework of equations (1a)–(1d) the Kelvin’s circulation theorem applied to a contour \mathcal{L} states:

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt} = \oint_{\mathcal{L}} d\mathbf{l} \cdot \xi \mathbf{e}_z, \tag{22a}$$

$$= \int \int_{S_{\mathcal{L}}} d\mathbf{s} \cdot (\xi_y \mathbf{e}_x - \xi_x \mathbf{e}_y), \tag{22b}$$

where $\mathcal{C} = \oint_{\mathcal{L}} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{u}$ is the circulation and $S_{\mathcal{L}}$ is a surface bounded by the contour \mathcal{L} .

We chose \mathcal{L} to be a horizontal ellipse on the vortex edge. As ξ_0 is a function only of z inside the vortex [cf. (18a)], we see from (22b) that the first nonvanishing contribution will come from ξ_1 , and hence will be $\mathcal{O}(F^2)$. Now, as $w_0=0$ everywhere and $w_1=0$ on the vortex edge [cf. (19a)], the vertical displacements of the contour, which are necessary for $d\mathbf{l} \cdot \mathbf{e}_z$ to be nonzero in (22a), will be $\mathcal{O}(F^4)$. Hence, the circulation cannot vary on times shorter than $T_3 = F^{-6} T_0$:

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt} = \mathcal{O}(F^6). \tag{23}$$

Calculating the circulation, the following adiabatic invariant is obtained:

$$\kappa(z) = [\Gamma^2(z) - \nu^2(z)] = 2\omega \Gamma_0^2 [\gamma(z)]^2 = 2\kappa_0 [\gamma(z)]^2, \tag{24}$$

where $\kappa_0 = \omega \Gamma_0^2$. As (24) does not change on times shorter than T_3 for each z and given the integral constraint (14) on $\gamma(z)$, both κ_0 and $\gamma(z)$ will be considered invariant on times shorter than T_3 .

2. Energy

In order to calculate the backreaction of the wave radiation, we need expressions for the leading-order energy and angular momentum. The equation of energy conservation follows from (1a)–(1d):

$$\partial_t \left(\rho_0 \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{\xi^2}{2N^2} \right) + \nabla \cdot \left[\left(\rho_0 \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{\xi^2}{2N^2} \right) \mathbf{u} + P \mathbf{u} \right] = 0. \quad (25)$$

At the leading order in Froude number, the energy is given by the horizontal kinetic energy. The energy of the full 3-D vortex may be calculated by vertical integration of the 2-D results.

In each plane, we integrate the energy density in a disk of radius Λ (a cutoff length) around a Kirchhoff vortex with major and minor axes $\Gamma \pm \nu$, respectively. We, thus, obtain the energy E_{2-D} of the 2-D vortex (cf. Ref. 26):

$$E_{2-D} = \pi \omega^2 \Gamma^4 \left(\frac{1}{4} + \log \frac{\Lambda}{\Gamma} \right) = \pi \kappa^2 \left(\frac{1}{4} + \log \frac{\Lambda}{\Gamma} \right). \quad (26)$$

This expression is then integrated in z using (14), and gives the energy of the 3-D vortex E_{3-D} :

$$E_{3-D} = \pi \kappa_0^2 \left[\left(\log \frac{\Lambda}{\Gamma_0} + \frac{1}{4} \right) \mathcal{M}_4 - \int_{-\infty}^{\infty} ds \gamma(s)^4 \log \gamma(z) \right], \quad (27)$$

where

$$\mathcal{M}_4 = \int_{-\infty}^{\infty} ds \gamma(s)^4. \quad (28)$$

For vortices of the same volume, \mathcal{M}_4 , “flatness,” increases for flatter vortices.

3. Angular momentum

The angular momentum is calculated by integrating the azimuthal velocity (u_θ in cylindrical coordinates) times radius. As for energy, we proceed by calculating the angular momentum in each horizontal plane, following Ref. 26, and then integrate in z . The 2-D calculation yields

$$M_{2-D} = \pi \omega \Gamma^2 \left(\Lambda^2 - \frac{\Gamma^2}{2} - \frac{\nu^2}{2} \right). \quad (29)$$

The result for the 3-D vortex is

$$M_{3-D} = \pi \kappa_0 \left[- \left(\frac{\Gamma_0^2}{2} + \frac{\nu_0^2}{2} \right) \mathcal{M}_4 + \Lambda^2 \right]. \quad (30)$$

These expressions will be used below for calculating the backreaction of the wave emission on the vortex.

F. Pressure fluctuations far from the vortex

In order to determine the wave field emitted by the vortex, we need to calculate the farfield pressure fluctuations. It is necessary first to invert the expression for χ when $\chi \gg 1$ (or equivalently $\zeta \gg 1$). The inversion of (9) yields

$$\zeta = \frac{\chi}{\Gamma_0} + \mathcal{O}(\chi^{-1}). \quad (31)$$

This expression for ζ is then injected into the expression for pressure (17a):

$$P_0^{(e)} = \frac{1}{2} \omega^2 \Gamma_0^4 \gamma^2(z) \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{\nu_0}{\Gamma_0 r^2} \cos(2\theta - \omega t) \right) + \mathcal{O}(r^{-3}), \quad (32)$$

where $\chi = r e^{i\theta}$. The first term in this formula is monopolar and static. The second term is quadrupolar and oscillating in time and will be matched with the wave field.

III. THE FARFIELD

A. Scaling in the outer (wave) region

The scaling that we have used to obtain Eqs. (5a)–(5e) does not work anymore at large distances from the vortex. There, the fields vary at a scale greater than L and the velocity will be weaker. The order of the nonlinear terms, therefore, need to be reevaluated.

The equations are rescaled using $F^{-1}L$ as a horizontal length scale, and H as a vertical length scale. The space coordinates scaled with λ will be denoted by capital letters (X, Y , or R). The velocity far from the region where the potential vorticity is nonzero decays as $1/r$; at distances that scale as L/F , the horizontal velocity therefore scales as FU , and the vertical velocity as $W = F^2UH/L$. The time scale is the same as in the inner region, that is L/U .

With this scaling the EB equations (1a)–(1d) yield

$$\partial_t \mathbf{u}_H + \nabla P + F^2 \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_H = 0, \quad (33a)$$

$$\partial_z P - \xi + F^4 (\partial_t w + F^2 \mathbf{u} \cdot \nabla w) = 0, \quad (33b)$$

$$\partial_t \xi + w + F^2 \mathbf{u} \cdot \nabla \xi = 0, \quad (33c)$$

$$\partial_X u + \partial_Y v + \partial_z w = 0. \quad (33d)$$

Because of the special form of the leading-order velocity field (axisymmetric and purely azimuthal), the zeroth-order advective terms are zero. Hence, linear gravity waves are both order 0 and order 1 solutions.

B. The matching procedure

First, we note that, due to the different scalings in the inner and outer region ($R = rF$ and $u \sim FU$ in the outer region), the terms with r^{-2} in $P_0^{(e)}$ [cf. (32)] will match with the first-order term $P_1^{(w)}$ in the wave region.

In the Appendix, we display the general form of the wave fields in cylindrical coordinates. Retaining only symmetric in z terms, this general form is

$$P_1^{(w)}(R, \theta, z, t) = \sum_n a_n \int_0^\infty du \hat{\mathcal{F}}_n^s(u) \cos(uz) \times H_n^{(2)}(Ru\nu) e^{i(n\theta - \nu t)}, \quad (34)$$

where $H_n^{(2)}$ is the Hankel function.

Requiring the farfield fluctuations of the pressure obtained in (32) to be equal to the near-field fluctuations of the wave field imposes $n = 2$ and $\nu = \omega$, thus reducing the general form of the wave field to

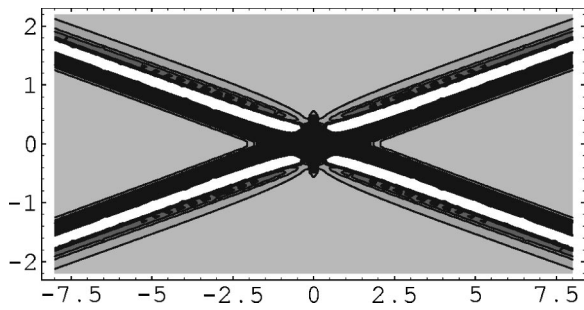


FIG. 2. Vertical cross section of the pressure perturbations corresponding to waves given by expression (37a). The pattern is very similar to the “cross” observed around an oscillating cylinder in a stratified fluid.

$$P_1^{(w)}(R, \theta, z, t) = A e^{i\delta} \int_0^\infty du \hat{\mathcal{F}}^s(u) \cos(uz) \times H_2^{(2)}(Ru\omega) e^{i(2\theta - \omega t)}, \tag{35}$$

where A is a real and positive amplitude, and δ is a phase.

To obtain the near-field wave asymptotics, we use the following asymptotics of the Hankel function:³²

$$H_n^{(2)}(\chi) \sim \frac{i}{\pi} \Gamma(n) \left(\frac{\chi}{2}\right)^{-n}. \tag{36}$$

Matching of the fluctuating part of $P_0^{(e)}$ and the real part of $P_1^{(w)}$ gives for $\hat{\mathcal{F}}^s(u)$, A and δ :

$$\hat{\mathcal{F}}^s(u) = 2\pi u^2 \int_0^{+\infty} ds [\gamma(s)]^2 \cos(us), \tag{37a}$$

$$A = \frac{\pi \omega^4 \Gamma_0^3 \nu_0}{8} = \frac{\pi \kappa_0^4 \nu_0}{8 \Gamma^5}, \quad \delta = -\frac{\pi}{2}. \tag{37b}$$

The emitted waves are of order F^2 in the outer region and are, thus, rather weak.

C. Description of the emitted wave field

In the first approximation, as vortex dimensions are much smaller than the characteristic wavelength, the waves can be considered as emitted from a point source. Waves are excited at a single frequency and we therefore expect, from the dispersion relation and the expression of the group velocity, that they will propagate along a cone (cf. Ref. 14). A plot of the intensity of the perturbation in a vertical plane (Fig. 2) shows that the situation is indeed close to this. Their

wave vectors being of order $(1/\lambda, 1/H)$, the energy will propagate at a small angle of order $FH/L = F^2$ to the horizontal. Furthermore, as waves propagate in a layer of constant thickness along the cone, their amplitude decreases as $1/\sqrt{r}$ in the radial direction.

However, the source is not exactly a point source, but rather an annular region where the fluctuations due to the vortex motion occur at a horizontal length scale λ . Thus, qualitatively, the rays of propagation of the emitted waves form a hyperboloid that deviates from the asymptotic cone, but only in the vicinity of the origin. The difference is not visible in Fig. 2, but becomes apparent in Fig. 3(a), where the phase lines on the surface of the cone have been plotted. These lines can be interpreted as approximate rays, indicating the origin of the waves, which shows that their propagation is not exactly radial from the source.

The intensity of the perturbations in the horizontal plane above or below the vortex is plotted in Fig. 3(b), and has a form of a fraction of a spiral (which is natural for waves propagating at a constant speed away from a rotating source, just like water from a rotating hose). As the waves propagate along a cone, the spiral wraps the cone.

D. Fluxes of energy and angular momentum associated with the wave field

The fluxes of energy and angular momentum will be calculated for the wave field of the form

$$P_1(R, \theta, z, t) = A \int_0^{+\infty} du \hat{\mathcal{F}}^s(u) \cos(uz) \times H_2^{(2)}(Ru\omega) e^{i(2\theta - \omega t + \delta)}. \tag{38}$$

The energy flux at the leading order in the exterior region is

$$\mathbf{f}_e = P_1 \mathbf{u}_1. \tag{39}$$

The total flux of energy will be obtained by integrating this expression over a cylindrical surface surrounding the vortex. As the amplitude of the wave field decays fast in the vertical direction, we do not need to consider the energy flux through the top and the bottom parts of the cylinder. Only u_{1R} is, thus, needed; it can be obtained using Eq. (33a) at the first order in cylindrical coordinates:

$$\partial_t u_{1R} = -\partial_R P_1, \tag{40}$$

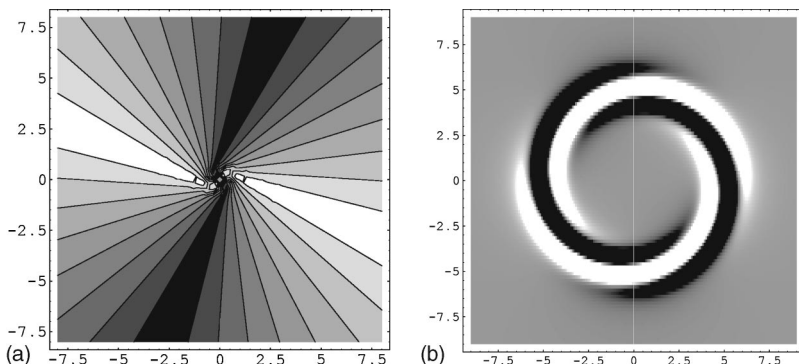


FIG. 3. (a) Phase lines plotted on the cone with angle to the horizontal equal to the angle at which the energy of the waves propagate (F^2). The region of wave generation appears as a ring at a certain distance from the center, i.e., from the vortex. Note that this plot is obtained from the farfield expressions, so the very center part of the figure is not representative. (b) Pressure perturbation due to the waves in a horizontal plane above the vortex; vortex thickness is 0.2, $\omega=0.2$, and the level of the horizontal plane is $z=1$.

which yields

$$u_{1R} = A \int_0^\infty du \hat{\mathcal{F}}^s(u) \cos(uz) u \times [J_2'(uR\omega) \sin(2\theta - \omega t + \delta) - Y_2'(uR\omega) \cos(2\theta - \omega t + \delta)]. \quad (41)$$

The total flux of energy across the cylindrical surface of radius R is

$$F_E = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{2\pi} R d\theta \int_0^\infty du \int_0^\infty du' \hat{\mathcal{F}}^s(u) \hat{\mathcal{F}}^s(u') u' \times \cos(uz) \cos(u'z) [\sin^2 J_2' Y_2 - \cos^2 J_2 Y_2' + \cos \sin(J_2 J_2' - Y_2 Y_2')], \quad (42)$$

where the arguments $(uR\omega)$, $(u'R\omega)$, and $(2\theta - \omega t)$ of the Bessel and trigonometric functions have been omitted for brevity. Carrying out integrations in z and θ , and using the known property of the Wronskian of the Bessel functions,³²

$$J_n'(a) Y_n(a) - J_n(a) Y_n'(a) = \frac{2}{\pi a}, \quad (43)$$

the total energy flux is obtained:

$$F_E = \frac{A^2}{\omega} \int_0^{+\infty} du [\hat{\mathcal{F}}^s(u)]^2. \quad (44)$$

The angular momentum flux will be calculated in a similar way. The equation for the vertical component of the angular momentum, derived from the EB equations, is

$$\frac{\partial m_3}{\partial t} + \nabla[m_3 \mathbf{u} + P(\mathbf{e}_z \times \mathbf{R})] = 0, \quad (45)$$

where $m_3 = Ru_\theta$ is the vertical component of the angular momentum. The linear term of $\mathbf{f}_m = m_3 \mathbf{u} + P(\mathbf{e}_z \times \mathbf{R})$ will yield zero when integrated over an infinite vertical surface because of periodicity of P_1 in θ . As only one term remains, scaling considerations are unnecessary and calculations similar to the previous ones give

$$F_M = \frac{2A^2}{\omega^2} \int_0^\infty du [\hat{\mathcal{F}}^s(u)]^2. \quad (46)$$

Note that the energy flux and the angular momentum flux are simply related: $F_M = (2/\omega) F_E$.

IV. THE BACKREACTION OF THE RADIATION

The evolution of the vortex due to the loss of energy and angular momentum by radiation is supposed to be adiabatic, i.e., attributed to a slow change of its parameters. From (27) and (30), we get

$$\frac{dE_{3-D}}{dt} = -\pi \kappa_0^2 \mathcal{M}_4 \frac{1}{\Gamma_0} \frac{d\Gamma_0}{dt}, \quad (47a)$$

$$\frac{dM_{3-D}}{dt} = -\pi \kappa_0 \mathcal{M}_4 \left(\Gamma_0 \frac{d\Gamma_0}{dt} + \nu_0 \frac{d\nu_0}{dt} \right). \quad (47b)$$

Using (37b), (44), and (46), and noting that the waves' amplitudes are $\mathcal{O}(F^2)$, we have

$$F_E = F^4 \frac{\pi^2 \kappa_0^7 G}{64} \frac{\nu_0^2}{\Gamma_0^8}, \quad (48a)$$

$$F_M = F^4 \frac{2\pi^2 \kappa_0^6 G}{64} \frac{\nu_0^2}{\Gamma_0^6}, \quad (48b)$$

where $G = \int_{-\infty}^\infty [\hat{\mathcal{F}}^s(u)]^2 du$. With the help of the energy and angular momentum conservation laws the following coupled evolution equations are obtained:

$$\frac{d}{dt_2} (\Gamma_0^2) = \frac{d}{dt_2} (\nu_0^2) = \frac{\pi G \kappa_0^5}{32 \mathcal{M}_4} \frac{\nu_0^2}{\Gamma_0^6}, \quad (49)$$

where $t_2 = F^4 t_0$ is adequately rescaled time. The conservation of the area of the ellipse in each horizontal plane readily follows from (49) by integration:

$$\Gamma_0^2 - \nu_0^2 = S = \text{const}, \quad (50)$$

and, hence, the total volume of the vortex is conserved. Denoting $y = \nu_0^2$ and integrating (49), we obtain

$$\int_{\nu_{0i}^2}^{\nu_0^2} dy \frac{(S+y)^3}{y} = \frac{\pi G \kappa_0^5}{32 \mathcal{M}_4} t_2. \quad (51)$$

These results reproduce the ones of Ref. 26. (A correction, however, has to be made to Eq. (16) of Ref. 26, which parallels Eq. (51) here. Indeed, the dependence on ω of the coefficient A_0 was neglected there; the full equation (16) reads as $\int_{|\beta_0|^2}^{\beta_0^2} (dy/y) (S+Ny)^{N+2} = N^{2N+3} \Gamma^{2N+3} / \{ (2c)^{2N+2} [(N+1)!]^2 (2\pi)^{2N+2} \} [(N+1)/2]^{N+1} t_2$.)

Similarly, we obtain for Γ_0 ,

$$\int_{\Gamma_{0i}^2}^{\Gamma_0^2} dx \frac{x^3}{x-S} = \frac{\pi G \kappa_0^5}{32 \mathcal{M}_4} t_2. \quad (52)$$

The integrands in the last two equations are rational fractions and can be easily integrated:

$$\frac{1}{3} \left[\left(\frac{\Gamma_0}{\Gamma_{0i}} \right)^6 - 1 \right] + \frac{S}{2\Gamma_{0i}^2} \left[\left(\frac{\Gamma_0}{\Gamma_{0i}} \right)^4 - 1 \right] + \frac{S^2}{\Gamma_{0i}^4} \left[\left(\frac{\Gamma_0}{\Gamma_{0i}} \right)^2 - 1 \right] + \frac{S^3}{\Gamma_{0i}^6} \log \left(\frac{\Gamma_0^2 - S}{\Gamma_{0i}^2 - S} \right) = \frac{\pi G \kappa_0^5}{32 \mathcal{M}_4 \Gamma_{0i}^6} t_2, \quad (53a)$$

$$\frac{1}{3} \left[\left(\frac{\nu_0}{\nu_{0i}} \right)^6 - 1 \right] + \frac{3S}{2\nu_{0i}^2} \left[\left(\frac{\nu_0}{\nu_{0i}} \right)^4 - 1 \right] + \frac{3S^2}{\nu_{0i}^4} \left[\left(\frac{\nu_0}{\nu_{0i}} \right)^2 - 1 \right] + \frac{2S^3}{\nu_{0i}^6} \log \left(\frac{\nu_0}{\nu_{0i}} \right) = \frac{\pi G \kappa_0^5}{32 \mathcal{M}_4 \nu_{0i}^6} t_2, \quad (53b)$$

where the index i corresponds to initial values.

As an example, we consider a vortex that is initially slightly nonaxisymmetric with $\Gamma_0 = 1$ and $\nu_0 = 0.01$. It can be seen from (49) or from (53b) (in which the dominant term is the one preceded by $2S^3/\nu_{0i}^6$) that ν_0 is then expected to grow exponentially for initial times (cf. Fig. 4):

$$\nu_0 \sim \nu_{0i} e^{(\pi G \kappa_0^5 / 64 \mathcal{M}_4 \Gamma_{0i}^6) t_2}. \quad (54)$$

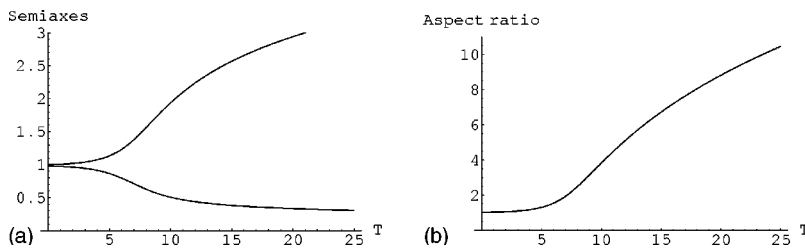


FIG. 4. (a) Evolution of the semiaxes $\Gamma \pm \nu$ at height $z = 0$ of a 3-D Kirchhoff vortex. Initial values are 1 and 0.98. Time units are scaled as $T_2 = T_0 / F^4$. At initial times, the evolution is exponential. For longer times, the time law takes the same form as the law obtained for point vortices [cf. Eq. (55)], but we then reach values for the aspect ratio that are not realistic. (b) Evolution of the aspect ratio of the same vortex.

As the semiaxes of the elliptic horizontal cross section are related to ν via $\Gamma \pm \nu$, an elongation of the vortex at initial times results. As the vortex elongates, the rate of rotation decreases [cf. (24)]. [Note that, unlike Ref. 28, here we do not have a frequency threshold for the wave emission (f in SW)—this is a difference between rotating and nonrotating fluid.]

The time scale of thus obtained growth is very slow, for it scales as $F^{-4}L/U$. If elongation continues for longer times, we would have $(\Gamma_0/\Gamma_{0i}) \gg 1$ and $(\nu_0/\nu_{0i}) \gg 1$ and the first terms in both equations (53) become dominant. An elongation law of the same form as that for the distance between two point vortices of equal intensity (cf. Ref. 25) then follows for late stages of evolution:

$$\Gamma_0 = \Gamma_{0i}(1 + t_2/\tau)^{1/6}, \tag{55}$$

where $\tau = (32\mathcal{M}_4\Gamma_{0i}^6)/(3\pi G\kappa_0^5)$. In this form, however, it is valid only for large aspect ratios of the ellipses (see Fig. 4) and, as discussed below, the vortex is likely to become unstable before that.

V. SUMMARY AND DISCUSSION

In the present paper we addressed the question of IGW emission from an isolated pancake vortex of the kind observed in laboratory experiments and numerical simulations of strongly stratified flows. There are two stages of wave production by perturbations bearing vorticity in stratified flows. The first stage corresponds to the adjustment of arbitrary localized disturbances to the (balanced) state of hydrostatic and cyclostrophic equilibrium that is accompanied by emission of the “redundant” part in the form of outgoing waves. This is, thus, a transient wave emission. The linear treatment of this process is presented in Ref. 17 and may be pursued further on perturbatively in Froude number, following the lines of Ref. 33, where the geostrophic adjustment was studied. The second stage corresponds to a permanent Lighthill radiation by the *balanced* but nonstationary vortex motions, and it was this latter process we were concentrated on in the present paper. We, thus, treated the problem as a radiation one. Any radiation problem requires exact knowledge of the wave source, and for this purpose we constructed an explicit example of a rotating ellipsoidal region of constant PV in cyclostrophic balance, obeying the EB equations at the leading order in the Froude number. In doing this we essentially used the quasibidimensionalization of stratified fluids due to a strong stratification, which allowed us to use the classical 2-D Kirchhoff vortex as the base for our construction. The explicit knowledge of the vortex field allowed us to calculate analytically the emitted wave field and to

derive the effects of the backreaction of the wave radiation. The backreaction’s calculation shows that the IGW emission leads to very slow but systematic changes in the vortex shape.

Some remarks are in order in what concerns the backreaction, however. First, the elongation scenario discussed in the previous section is valid under the hypothesis that there are no other factors inducing slow evolution of the vortex at time scales T_2 or faster (say, at the time scale $T_1 = F^{-2}T_0$). This latter may be necessary, for instance, if resonances arise while calculating the higher-order corrections to the (vortical) near-field (without any reference to the far wave field) that have to be killed by slow time dependence of lower-order fields. Due to their excessive (and rapidly increasing with the order of the perturbation theory) technical complexity we did not undertake here the corresponding calculations and, hence, cannot guarantee the validity of the above-mentioned hypothesis. One remark here is that, the Kirchhoff vortex being an exact solution of the 2-D Euler equations, such evolution could come uniquely from the 3-D effects and, therefore, would mean that the widely believed scenario of bidimensionalization of strongly stratified flows is broken already in the next-to-leading order in stratification (cf. the discussion at the end of Sec. II F). Albeit implausible, we do not see at present how such evolution could be *a priori* excluded. This question deserves a further investigation.

Second, even if the elongation due to the backreaction of the wave radiation is not accompanied by other slow motions, it is intuitively clear that it cannot last and should end up with some sort of instability. Unfortunately, nothing is known on stability of the ellipsoidal regions of PV in the stratified fluid. Again, the corresponding analytical calculations are very complex. Stability calculations do exist for similar ellipsoidal vortices in a much simpler context of quasigeostrophic dynamics,³⁰ but modes of instability may, of course, differ significantly in the two cases. The 2-D Kirchhoff vortex is known³⁴ to be unstable when its aspect ratio exceeds 3. It is unlikely that 3-D effects may prevent this 2-D instability so we anticipate that at least for aspect ratios greater than 3 the pancake vortex will be destabilized. If, because of imposed reflectional symmetry, as in Ref. 28, the first instability mode cannot be excited, the aspect ratio might grow further. In two dimensions, as argued in Ref. 28, the wave resonances excite a quadrupolar (mode 4) instability of the elliptic vortex for aspect ratios beyond ~ 4.6 , corresponding to $(\nu/\Gamma)^2 = \sqrt{2} - 1$. Whether the same is true for 3-D stratified vortices remains an open question. In any case, it is clear that once elongated enough the vortex is prone to instabilities and, hence, although slow, the backreaction of

the wave radiation will alter vortex dynamics in the 3-D stratified fluid, as it was the case in 2-D acoustics and shallow water. This indicates that a strict slow manifold of purely vortex motions does not exist in stratified nonrotating fluids and sets a time limit ($\sim F^{-4}$) for a reliable description of slow motions by filtering IGW.

ACKNOWLEDGMENT

R.P. acknowledges support from ACI “jeunes chercheurs” (CNRS) No. 0693.

APPENDIX: INTERNAL GRAVITY WAVES IN CYLINDRICAL COORDINATES

We recall the wave equation one can obtain from the equations of motion as they are scaled for the outer region (33a)–(33d):

$$\partial_{zz}\partial_{tt}w + \Delta_H w = 0. \quad (\text{A1})$$

We separate variables and look for solutions w of the form

$$w(R, z, \theta, t) = g(R) e^{i(n\theta - \nu t)} h(z), \quad (\text{A2})$$

where $h(z)$ is of the form e^{imz} , and g verifies the following equation:

$$\frac{d^2g}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dg}{dR} + \left(m^2 \nu^2 - \frac{n^2}{R^2} \right) g = 0. \quad (\text{A3})$$

Using the change of variables $\rho = m\nu R$, one gets the canonical Bessel equation:

$$\frac{d^2g}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dg}{d\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) g = 0. \quad (\text{A4})$$

Solutions corresponding to the radiation boundary condition at infinity are Hankel functions of the second kind. We then reconstruct the complete solution:

$$w(R, \theta, z, t) = \sum_n a_n \int_0^\infty du [\hat{\mathcal{F}}_n^s(u) \cos(uz) + \hat{\mathcal{F}}_n^a(u) \sin(uz)] H_n^{(2)}(Ruv) e^{i(n\theta - \nu t)}. \quad (\text{A5})$$

The same equation as (A1) can be obtained for the pressure. Its expression will therefore be of the same form as (A5).

If the vertical profile of the vortex is symmetric in z , only the functions $\hat{\mathcal{F}}_n^s(u)$ need to be considered: this is the expression used for the matching.

¹J. J. Riley, R. W. Metcalfe, and M. A. Weissman, “Direct numerical simulations of homogeneous turbulence in density stratified fluids,” in *Proceedings of the AIP Conference on Nonlinear Properties of Internal Waves* (AIP, Woodbury, 1981), pp. 79–112.

²D. K. Lilly, “Stratified turbulence and the mesoscale variability of the atmosphere,” *J. Atmos. Sci.* **40**, 749 (1983).

³J. J. Riley and M.-P. Lelong, “Fluid motions in the presence of strong stable stratification,” *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32**, 613 (2000).

⁴O. Métais and J. R. Herring, “Numerical simulations of freely evolving

turbulence in stably stratified fluids,” *J. Fluid Mech.* **202**, 117 (1989).

⁵G. R. Spedding, F. K. Browand, and A. M. Fincham, “The long-time evolution of the initially turbulent wake of a sphere in a stable stratification,” *Dyn. Atmos. Oceans* **23**, 171 (1996).

⁶M. Bonneton, O. Eiff, and P. Bonneton, “On the density structure of far-wake vortices in a stratified fluid,” *Dyn. Atmos. Oceans* **31**, 117 (2000).

⁷A. M. Fincham, T. Maxworthy, and G. R. Spedding, “Energy dissipation and vortex structure in freely decaying, stratified grid turbulence,” *Dyn. Atmos. Oceans* **23**, 155 (1996).

⁸G. R. Spedding, F. K. Browand, and A. M. Fincham, “Turbulence, similarity scaling and vortex geometry in the wake of a towed sphere in a stably stratified fluid,” *J. Fluid Mech.* **314**, 53 (1996).

⁹A. J. Majda and M. J. Grote, “Model dynamics and vertical collapse in decaying strongly stratified flows,” *Phys. Fluids* **9**, 2932 (1997).

¹⁰P. Billant and J. M. Chomaz, “Experimental evidence for a new instability of a vertical columnar vortex pair in a strongly stratified fluid,” *J. Fluid Mech.* **418**, 167 (2000).

¹¹P. Billant and J. M. Chomaz, “Theoretical analysis of the zigzag instability of a columnar vortex pair in a strongly stratified fluid,” *J. Fluid Mech.* **419**, 29 (2000).

¹²J. B. Flor and G. J. F. van Heijst, “Stable and unstable monopolar vortices in a stratified fluid,” *J. Fluid Mech.* **311**, 257 (1996).

¹³M. Beckers, R. Verzicco, H. J. H. Clercx, and G. J. F. Van Heist, “Dynamics of pancake-like vortices in a stratified fluid: experiments, theory and numerical simulations,” *J. Fluid Mech.* **433**, 1 (2001).

¹⁴J. M. Lighthill, *Waves in Fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, 1978).

¹⁵P. Bonneton, J. M. Chomaz, and E. J. Hopfinger, “Internal waves produced by the turbulent wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid,” *J. Fluid Mech.* **254**, 23 (1993).

¹⁶P. Bonneton, J. M. Chomaz, E. J. Hopfinger, and M. Perrier, “The structure of the turbulent wake and the random internal wave field generated by a moving sphere in a stratified fluid,” *Dyn. Atmos. Oceans* **23**, 299 (1996).

¹⁷J. M. Lighthill, “Internal waves and related initial-value problems,” *Dyn. Atmos. Oceans* **23**, 3 (1996).

¹⁸P. Caillol and V. Zeitlin, “Kinetic equations and stationary energy spectra of weakly nonlinear internal gravity waves,” *Dyn. Atmos. Oceans* **32**, 81 (2000).

¹⁹R. Ford, M. E. McIntyre, and W. A. Norton, “Balance and the slow quasi-manifold: some explicit results,” *J. Atmos. Sci.* **57**, 1236 (2000).

²⁰J. M. Lighthill, “On sound generated aerodynamically. I. General theory,” *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **211**, 564 (1952).

²¹S. C. Crow, “Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem,” *Stud. Appl. Math.* **49**, 21 (1970).

²²D. G. Crighton, “Acoustics as a branch of fluid mechanics,” *J. Fluid Mech.* **106**, 261 (1981).

²³T. Kambe, “Acoustic emissions by vortex motions,” *J. Fluid Mech.* **173**, 643 (1986).

²⁴V. I. Klyatskin, “Emission of sound by a system of vortices,” *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza* **6**, 87 (1966) (in Russian).

²⁵V. M. Gryanik, “Emission of sound by linear vortical filaments,” *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **19**, 150 (1983).

²⁶V. Zeitlin, “On the backreaction of acoustic radiation for distributed two-dimensional vortex structures,” *Phys. Fluids A* **3**, 1677 (1991).

²⁷H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th ed. (Dovers, New York, 1932).

²⁸R. Ford, “The response of a rotating ellipse of uniform potential vorticity to gravity wave radiation,” *Phys. Fluids* **6**, 3694 (1994).

²⁹B. Legras and V. Zeitlin, “Conformal dynamics for vortex motions,” *Phys. Lett. A* **167**, 265 (1992).

³⁰S. P. Meacham, “Quasigeostrophic, ellipsoidal vortices in a stratified fluid,” *Dyn. Atmos. Oceans* **16**, 189 (1992).

³¹H. Hashimoto, T. Shimonishi, and T. Miyazaki, “Quasigeostrophic ellipsoidal vortices in a two-dimensional strain-field,” *J. Phys. Soc. Jpn.* **68**, 3863 (1999).

³²M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 1964.

³³G. M. Reznik, V. Zeitlin, and M. Ben Jelloul, “Nonlinear theory of the geostrophic adjustment. Part I. Rotating shallow water model,” *J. Fluid Mech.* **445**, 93 (2001).

³⁴A. E. H. Love, “On the stability of certain vortex motions,” *Proc. London Math. Soc.* **25**, 18 (1893).

6.3 Extension au fluide en rotation : la fréquence inertielle comme fréquence de coupure

Essentiellement, la rotation limite l'émission en introduisant une fréquence de coupure (ou fréquence minimale) f dans le spectre des ondes de gravité. Ainsi, dans le cas du vortex de Kirchhoff, si celui-ci tourne sur lui-même avec une fréquence moindre que $f/2$, il n'y aura pas d'émission d'ondes en F^2 . Il pourra cependant y en avoir à des ordres supérieurs (à partir de F^4).

De manière plus générale, pour qu'il y ait émission, il faut que le spectre des fréquences des mouvements vorticaux recouvre en partie le spectre des fréquences possibles des ondes. C'est pourquoi Ford, McIntyre & Norton [FMN00] considèrent une situation avec un nombre de Rossby supérieur ou égal à 1. Le trou spectral introduit par la rotation (*cf* Introduction) réduit donc l'émission dans les fluides en rotation, mais ne l'exclut pas.

Enfin, mentionnons une autre approche de la question des limites de la variété lente : l'étude de la croissance de petites perturbations dans des écoulements ayant une vorticité potentielle et un taux de déformation constants. McWilliams & Yavneh [MY98] se sont ainsi intéressés aux limites des modèles équilibrés (*'breakdown of balance'*) en considérant la croissance de petites perturbations sur un écoulement cisailé horizontal ayant une vorticité et une déformation uniformes. Ils ont montré que les perturbations croissaient lorsque la vorticité était plus faible que la norme de la déformation⁸.

Vanneste & Yavneh [VY02] adoptent une approche semblable pour considérer l'émission d'ondes par un écoulement barotrope cisailé horizontalement. Ils suggèrent que pour de petits nombres de Rossby, l'émission demeure inévitable, mais est vraisemblablement très faible : d'ordre $\epsilon^{-1/2}e^{-\alpha/\epsilon}$, où ϵ est le nombre de Rossby.

L'émission mise en évidence ci-dessus est faible. Son effet sur la partie équilibrée de l'écoulement ne se fera pas sentir si d'autres phénomènes ont lieu sur des échelles de temps plus rapides (instabilité de l'écoulement vortical par exemple). Ce que souligne et quantifie cette étude, c'est que cette émission est, dès lors que l'écoulement vortical est non-stationnaire, présente, ce qui constitue une limite 'ultime' de la notion de variété lente.

⁸Ce critère est plus restrictif que le critère qui est ressorti de notre étude de la séparation dans le modèle de l'eau peu profonde (chapitre 2), mais les problèmes considérés ne sont pas les mêmes : ajustement à partir d'une situation rectiligne loin de l'équilibre dans un cas, évolution d'une petite perturbation tridimensionnelle sur fond d'un écoulement équilibré dans l'autre.

Chapitre 7

Résumé et perspectives

Nous rappelons ci-dessous les questions qui ont motivé ce travail, et les éléments de réponses qui ont été apportées.

Peut-on séparer de manière unique et rigoureuse une structure de type jet ou front, dans l'atmosphère ou dans l'océan, en une composante lente et une composante rapide ?

L'étude de l'ajustement géostrophique d'anomalies frontales ($\partial_y(\dots) \equiv 0$) à l'aide de la description lagrangienne du mouvement permet de répondre dans le cadre de trois modèles de fronts rectilignes de complexité croissante (modèle de l'eau peu profonde, fluide à deux couches avec toit rigide, fluide continu). Pour ces modèles l'équilibre géostrophique est une solution exacte et stationnaire. La partie lente est donc l'état ajusté vers lequel on s'attend à ce que le fluide évolue.

Dans le fluide à une couche, l'état ajusté existe pour des anomalies localisées ayant une vorticité potentielle positive. Dans le fluide à deux couches, de même, des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de l'état ajusté ont été obtenues (section 3.1.2, équation 3.11). Ces résultats s'appliquent à des états arbitraires du fluide, ils définissent une variété lente non-perturbative. La partie lente (stationnaire) ne peut être modifiée que par des processus dissipatifs. La séparation pour des anomalies comportant des régions de vorticité potentielle négative reste en revanche une question ouverte.

Les conditions d'existence de l'état ajusté sont plus sévères pour le fluide stratifié : il existe des états ayant une PV positive pour lesquels il n'est pas possible de séparer l'écoulement, parce qu'il n'existe pas d'état ajusté vérifiant les contraintes de conservation de la masse, de la température potentielle et du moment géostrophique.

Pour un état du fluide ayant une PV arbitraire mais strictement positive, la détermination de la partie lente se ramène à une équation elliptique de Monge-Ampère ; les conditions générales d'existence de solutions de cette équation ne sont pas connues à ce jour dans la littérature mathématique. En revanche, dans un fluide à PV nulle [Ou84, WB95], nous avons obtenu la condition sur les gradients initiaux de température potentielle et de vitesse

pour que l'état ajusté existe, et nous avons entièrement résolu celle-ci. La formation de singularité dans l'état ajusté se fait nécessairement sur les bords du domaine, et préférentiellement dans les régions anticycloniques. Pour un fluide à PV uniforme [HB72, BW95, Kal98, Kal00], nous avons montré que la détermination de l'état ajusté se ramenait, à l'aide d'un changement de coordonnées approprié, à un problème de Neumann pour une équation de Laplace, qui peut être résolu par des méthodes standard [LS87], et nous avons donné le critère permettant de savoir si la solution du problème de Neumann obtenue correspond à une solution physique ou non.

Par ailleurs, nous avons montré que l'inversion de la vorticité potentielle ne fournit pas, dans des situations à fort nombre de Rossby, une séparation satisfaisante : la partie de l'écoulement ainsi isolée varie sur la même échelle de temps (rapide) que les ondes.

Enfin, dans un travail complémentaire, nous avons calculé l'émission d'ondes par un vortex non-stationnaire dans un fluide fortement stratifié sans rotation. Cette étude confirme par un exemple explicite et tri-dimensionnel que la variété lente n'existe pas au sens strict, et surtout quantifie les ondes émises et leur effet sur l'écoulement qui les émet.

Quelle est la signification physique de l'état ajusté ? L'évolution du fluide le mène-t-elle vers cet état ajusté, vers un état oscillant autour de lui ? Comment ?

Nous apportons des réponses premièrement par l'étude de l'ajustement de faibles perturbations à un état ajusté, deuxièmement par l'étude des phénomènes fortement nonlinéaires dans la partie rapide de l'écoulement.

L'étude analytique de l'ajustement de petites perturbations à un jet en équilibre montre que des modifications importantes sont à apporter au scénario classique d'ajustement dans les fluides stratifiés.

Nous avons montré l'existence, dans les jets proches de la barotropie, de modes piégés, nécessairement baroclines¹, oscillant à des fréquences sub-inertielles [Kun85]. Ces modes sont la contrepartie stable de l'instabilité symétrique. L'ajustement du fluide est du coup *incomplet* : une partie de la perturbation initiale se projette sur ces modes, qui restent dans le jet. Les tensions de Reynolds liées à ces ondes n'ont pas d'effet sur l'évolution du fluide.

Pour les jets baroclines nous suggérons, à l'appui d'une étude WKB de la propagation verticale d'un paquet d'ondes piégées dans un jet, que des perturbations initiales faibles mènent au cours de l'évolution du fluide à des processus dissipatifs dans les bords supérieurs et inférieurs de la région anticyclonique du jet, altérant localement la partie lente de l'écoulement.

Dans les modèles à une et deux couche(s), nous avons montré l'existence d'ondes stationnaires qui sont des solutions exactes des équations complètes. A notre connaissance, ces solutions dans le modèle à deux couches n'avaient jamais été étudiées. Leur existence différenciera profondément l'ajustement dans un domaine périodique de l'ajustement dans un domaine infini, ce qui

¹dans le fluide à une couche, ces modes n'existent pas.

importe particulièrement pour l'étude numérique de l'ajustement.

Dans le modèle de l'eau peu profonde, nous avons obtenu un critère semi-quantitatif pour le déferlement d'ondes. Ceci permet notamment de comprendre quelles régions de l'écoulement favoriseront ce déferlement et par conséquent seront affectées par la dissipation associée : la formation de chocs sera favorisée le long de caractéristiques provenant de régions à forts gradients de hauteur, ou traversant des régions de vorticité relative anticyclonique.

Retenons ici trois pistes importantes pour la suite : première, dans les modèles à une et deux couches, comment s'ajustent des  tats loin de l'équilibre ? Quelle est l'évolution du fluide à partir d' tats ayant une vorticité potentielle négative [Som04] ? Deuxièmement, quelle est l'évolution du fluide stratifié à partir d'un état pour lequel la partie lente n'existe pas ? Vers quel état se dirige-t-il, et quel rôle jouent les phénomènes de déferlement suivis d'effets dissipatifs dans son évolution ? Ces deux questions nécessiteront des approches numériques résolvant avec soin les déferlements et les processus dissipatifs. Enfin, comment se traduit, dans des jets tridimensionnelles et nonstationnaires, la possibilité de piégeage mise en évidence ici ?

Quelles sont les caractéristiques des ondes émises par l'ajustement géostrophique ? Quelle est l'importance de ce mécanisme dans l'atmosphère ?

Analytiquement, nous avons analysé, dans chacun des trois modèles utilisés, les ondes linéaires sur le fond d'un jet ajusté. Nous avons montré qu'il n'y a pas de modes piégés dans le modèle de l'eau peu profonde, mais qu'il pouvait y avoir des modes quasi-stationnaires. Dans les fluides comportant une stratification (2 couches, fluide continu), nous avons montré qu'il existe des ondes subinertielles pi g es dans la région anticyclonique du jet, et nous avons analysé leur structure.

Les analyses de radiosondages de l'expérience FASTEX ont montré que le jet troposphérique était, au-dessus de l'Atlantique Nord, la source d'ondes prédominante. Nous avons identifié les deux régions de l'écoulement les plus favorables à de fortes générations d'ondes : le voisinage des maxima de vitesse et les régions de forte courbure du vent, où le jet est brisé.

L'analyse d'un  v nement précis d'émission d'ondes par une telle région (jet brisé) a montré que l'ajustement géostrophique y est le mécanisme de génération des ondes, et qu'il peut générer des ondes de très basse fréquence, de forte amplitude ($8 - 10ms^{-1}$), et de grande échelle horizontale (200 - 500km).

Notre étude a de plus indiqué des directions intéressantes pour la suite de l'analyse de ces donn es : d'une part, des études d' v nements particuliers d'émission d'ondes près des maxima du jet permettront de mieux comprendre quels sont, dans ces cas-là, les mécanismes générant les ondes. D'autre part, les cartes de divergence du vent horizontal du Centre Européen peuvent être utilis es pour étudier plus précisément les régions de l'écoulement les plus favorables aux ondes de grande échelle et de basse fréquence, ainsi que la structure horizontale de ces ondes. Ceci permettra notamment de vérifier si les régions anticycloniques, dont l'importance pour plusieurs phénomènes (piégeage, instabilité symétrique, formation des chocs dans le modèle de l'eau

peu profonde) a été souligné par l'approche analytique, sont des sources privilégiées de l'activité ondulatoire.

Chapitre 8

Annexes

A Nonlinear waves in the Eulerian formalism for the one-layer rotating shallow water equations

We recall for comparison with the two layer case the derivation of the nonlinear waves in the one-layer case, using Eulerian formalism. The basic equations are :

$$\partial_t u + u \partial_x u - f v + g \partial_x h = 0, \quad (\text{A1a})$$

$$\partial_t v + u \partial_x v + f u = 0, \quad (\text{A1b})$$

$$\partial_t h + \partial_x (uh) = 0. \quad (\text{A1c})$$

We seek solutions depending only on $\xi = x - ct$; the prime will denote derivative relative to ξ . The above equations yield :

$$-cu' + uu' - fv + gh' = 0, \quad (\text{A2a})$$

$$-cv' + u(f + v') = 0, \quad (\text{A2b})$$

$$-ch' + (uh)' = 0. \quad (\text{A2c})$$

Integration of the latter yields $u = c + A/h$, where A is an integration constant. Now, as there is no global flux of fluid, integration uh at a given point over a period must yield zero. This integration is equivalent to integrating at a given instant over one wavelength λ . We thus obtain :

$$\int_0^\lambda (A + ch) d\xi = 0 \quad (\text{A3})$$

which determines the integration constant $A = -cH$, where H is the mean height of the fluid (or the height of the fluid at rest). Hence :

$$u = c \left(1 - \frac{H}{h}\right). \quad (\text{A4})$$

Injecting this expression into equations (A2a)-(A2c), and rewriting the full height h as $h = H(1 + d)$, the following equation is obtained :

$$\left[\frac{c^2}{2} \frac{1}{(1+d)^2} + c_0^2 d \right]'' - f^2 d = 0 \quad (\text{A5})$$

where $c_0^2 = gH$.

B An explicit example of trapped modes in a barotropic jet

If the potential is a piecewise linear function, solutions for trapped modes can be explicitly calculated using Airy functions. This example will give insight regarding the dependence of trapping on the parameters of the jet. Furthermore, it gives an explicit example to try in numerical models which may use such piecewise linear relative vorticity profiles.

The potential is symmetric and defined using two parameters : L , the half-width of the jet, and M , its maximum value. It is given by a linear function in each of the five regions denoted as follows : I for $x < -L$, II for $-L < x < -L/2$, III for $-L/2 < x < L/2$, IV for $L/2 < x < L$, and V for $L < x$. The relative vorticity of the jet is :

$$\Phi''(x) = 0 \quad \text{in } I \text{ and in } V, \quad (\text{B6a})$$

$$\Phi''(x) = 2M\left(\frac{x}{L} + 1\right) \quad \text{in } II, \quad (\text{B6b})$$

$$\Phi''(x) = -2M\frac{x}{L} \quad \text{in } III, \quad (\text{B6c})$$

$$\Phi''(x) = 2M\left(\frac{x}{L} - 1\right) \quad \text{in } IV. \quad (\text{B6d})$$

The corresponding velocity $v^{(0)} = \Phi'$ is :

$$v^{(0)}(x) = 0 \quad \text{in } I \text{ and in } V, \quad (\text{B7a})$$

$$v^{(0)}(x) = ML\left(\frac{x}{L} + 1\right)^2 \quad \text{in } II, \quad (\text{B7b})$$

$$v^{(0)}(x) = ML\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{L^2}\right) \quad \text{in } III, \quad (\text{B7c})$$

$$v^{(0)}(x) = ML\left(\frac{x}{L} - 1\right)^2 \quad \text{in } IV. \quad (\text{B7d})$$

The geopotential is :

$$\Phi(x) = 0 \quad \text{in } I, \quad (\text{B8a})$$

$$\Phi(x) = \frac{ML^2}{3}\left(\frac{x}{L} + 1\right)^3 \quad \text{in } II, \quad (\text{B8b})$$

$$\Phi(x) = ML^2\left(-\frac{x^3}{3L^3} + \frac{1}{2}\frac{x}{L} + \frac{1}{4}\right) \quad \text{in } III, \quad (\text{B8c})$$

$$\Phi(x) = \frac{ML^2}{3}\left(\left(\frac{x}{L} + 1\right)^3 + \frac{3}{2}\right) \quad \text{in } IV, \quad (\text{B8d})$$

$$\Phi(x) = \frac{ML^2}{2} \quad \text{in } V. \quad (\text{B8e})$$

In equation (4.53), the constant factor $n^2\pi^2/N^2$ can be removed by an adequate rescaling of x :

$$\begin{aligned} \psi''(x) - \frac{n^2\pi^2}{N^2}(1 - \omega^2 + \Phi''(x))\psi(x) &= 0 \quad \text{becomes} \\ \psi''(X) - (1 - \omega^2 + \Phi''(\frac{N}{n\pi}X))\psi(X) &= 0 \quad \text{with } X = \frac{n\pi}{N}x. \end{aligned} \quad (\text{B9})$$

This rescaling will therefore affect L in the definition of the potential. Below, we use x to denote the rescaled coordinate.

In each of the five regions, we will have an equation of the form :

$$f'' + (c + ax)f = 0 , \quad (\text{B10})$$

of which the solution is, for $a \neq 0$:

$$f(x) = A\mathcal{A}\left(\frac{c+ax}{a^{\frac{2}{3}}}\right) + B\mathcal{B}\left(\frac{c+ax}{a^{\frac{2}{3}}}\right) \quad (\text{B11})$$

where \mathcal{A} and \mathcal{B} are the Airy functions.

Hence, the equation for the horizontal structure of a trapped mode of frequency ω and its solutions will be, in each of the five zones :

$$I. \quad \psi_1'' - c\psi_1 = 0 , \quad (\text{B12a})$$

$$\psi_1(x) = A_1 e^{\sqrt{c}x} + B_1 e^{-\sqrt{c}x} , \quad (\text{B12b})$$

$$II. \quad \psi_2'' - (c + \gamma^3(x+L))\psi_2 = 0 , \quad (\text{B12c})$$

$$\psi_2(x) = A_2 \mathcal{A}\left(\frac{c + \gamma^3(x+L)}{\gamma^2}\right) + B_2 \mathcal{B}\left(\frac{c + \gamma^3(x+L)}{\gamma^2}\right) , \quad (\text{B12d})$$

$$III. \quad \psi_3'' - (c - \gamma^3x)\psi_3 = 0 , \quad (\text{B12e})$$

$$\psi_3(x) = A_3 \mathcal{A}\left(\frac{c - \gamma^3x}{\gamma^2}\right) + B_3 \mathcal{B}\left(\frac{c - \gamma^3x}{\gamma^2}\right) , \quad (\text{B12f})$$

$$IV. \quad \psi_4'' - (c + \gamma^3(x-L))\psi_4 = 0 , \quad (\text{B12g})$$

$$\psi_4(x) = A_4 \mathcal{A}\left(\frac{c + \gamma^3(x-L)}{\gamma^2}\right) + B_4 \mathcal{B}\left(\frac{c + \gamma^3(x-L)}{\gamma^2}\right) , \quad (\text{B12h})$$

$$V. \quad \psi_5'' - c\psi_5 = 0 , \quad (\text{B12i})$$

$$\psi_5(x) = A_5 e^{-\sqrt{c}x} + B_5 e^{\sqrt{c}x} , \quad (\text{B12j})$$

where $c = 1 - \omega^2$ and $\gamma = \left(\frac{2M}{L}\right)^{\frac{1}{3}}$.

At each of the four boundaries between two regions, the functions and their first derivative must match. Thus, matching at point $x = -L$ yields two linear equations for the two unknowns A_2 and B_2 to be expressed using A_1 and B_1 . Similarly, matching at the other points will give expressions for

each pair A_i, B_i using coefficients A_{i-1}, B_{i-1} :

$$\begin{aligned} I - II : \quad A_2 &= A_1 \frac{e^{-\sqrt{c}L}}{\mathcal{C}\mathcal{C}} \left(\mathcal{B}'(p_1) - \frac{\sqrt{c}}{\gamma} \mathcal{B}(p_1) \right), \\ B_2 &= A_1 \frac{e^{-\sqrt{c}L}}{\mathcal{C}\mathcal{C}} \left(\frac{\sqrt{c}}{\gamma} \mathcal{A}(p_1) - \mathcal{A}'(p_1) \right), \end{aligned} \quad (\text{B13a})$$

$$\begin{aligned} II - III : \quad A_3 &= \frac{1}{\mathcal{C}\mathcal{C}} \left[(\mathcal{A}\mathcal{B})'(p_2) A_2 + (\mathcal{B}^2)'(p_2) B_2 \right], \\ B_3 &= -\frac{1}{\mathcal{C}\mathcal{C}} \left[(\mathcal{A}^2)'(p_2) A_2 + (\mathcal{A}\mathcal{B})'(p_2) B_2 \right], \end{aligned} \quad (\text{B13b})$$

$$\begin{aligned} III - IV : \quad A_4 &= \frac{1}{\mathcal{C}\mathcal{C}} \left[(\mathcal{A}\mathcal{B})'(p_3) A_3 + (\mathcal{B}^2)'(p_3) B_3 \right], \\ B_4 &= -\frac{1}{\mathcal{C}\mathcal{C}} \left[(\mathcal{A}^2)'(p_3) A_3 + (\mathcal{A}\mathcal{B})'(p_3) B_3 \right], \end{aligned} \quad (\text{B13c})$$

$$\begin{aligned} IV - V : \quad A_5 &= \frac{e^{\sqrt{c}L}}{2} \left[(\mathcal{A}(p_1) - \frac{\gamma}{\sqrt{c}} \mathcal{A}'(p_1)) A_4 + (\mathcal{B}(p_1) - \frac{\gamma}{\sqrt{c}} \mathcal{B}'(p_1)) B_4 \right], \\ B_5 &= \frac{e^{-\sqrt{c}L}}{2} \left[(\mathcal{A}(p_1) + \frac{\gamma}{\sqrt{c}} \mathcal{A}'(p_1)) A_4 + (\mathcal{B}(p_1) + \frac{\gamma}{\sqrt{c}} \mathcal{B}'(p_1)) B_4 \right], \end{aligned} \quad (\text{B13d})$$

where :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\mathcal{C} &= \mathcal{A}(x)\mathcal{B}'(x) - \mathcal{A}'(x)\mathcal{B}(x) = \text{constant}, \\ p_1 &= \frac{c}{\gamma^2}, \quad p_2 = \frac{c+M}{\gamma^2}, \quad p_3 = \frac{c-M}{\gamma^2}. \end{aligned} \quad (\text{B14})$$

Now, the complete solution will be a trapped mode if it goes to zero outside the region of the jet, i.e. if $B_1 = 0$ and $B_5 = 0$. $B_1 = 0$ can be imposed; equations (B13a)-(B13d) then gives an expression for B_5 as proportionnal to A_1 , the proportionnality factor being a function of c, M and L (γ is simply $(\frac{2M}{L})^{\frac{1}{3}}$). From the systems of equations (B13), it is straightforward to express this proportionnality factor. After some manipulation, it can be written as :

$$\begin{aligned} \text{Cond}(c, M, L) &= (\sqrt{c}\mathcal{A}(p_1) + \gamma\mathcal{A}'(p_1)) \\ &\quad \left[\left((\mathcal{A}\mathcal{B})'(p_3)(\mathcal{A}\mathcal{B})'(p_2) - (\mathcal{B}^2)'(p_3)(\mathcal{A}^2)'(p_2) \right) \left(\mathcal{B}'(p_1) - \frac{\sqrt{c}}{\gamma^2} \mathcal{B}(p_1) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left((\mathcal{A}\mathcal{B})'(p_3)(\mathcal{B}^2)'(p_2) - (\mathcal{B}^2)'(p_3)(\mathcal{A}\mathcal{B})'(p_2) \right) \left(\frac{\sqrt{c}}{\gamma^2} \mathcal{A}(p_1) - \mathcal{A}'(p_1) \right) \right] \\ &\quad - (\sqrt{c}\mathcal{B}(p_1) + \gamma\mathcal{B}'(p_1)) \\ &\quad \left[\left((\mathcal{A}^2)'(p_3)(\mathcal{A}\mathcal{B})'(p_2) - (\mathcal{A}\mathcal{B})'(p_3)(\mathcal{A}^2)'(p_2) \right) \left(\mathcal{B}'(p_1) - \frac{\sqrt{c}}{\gamma^2} \mathcal{B}(p_1) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left((\mathcal{A}^2)'(p_3)(\mathcal{B}^2)'(p_2) - (\mathcal{A}\mathcal{B})'(p_3)(\mathcal{A}\mathcal{B})'(p_2) \right) \left(\frac{\sqrt{c}}{\gamma^2} \mathcal{A}(p_1) - \mathcal{A}'(p_1) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B15})$$

The dependencies in c, M and L are hidden, in this equation, in terms p_1, p_2 and p_3 (cf (B14)), and the frequency of the trapped mode is hidden in $c = 1 - \omega^2$.

The jet with parameters M, L has a trapped mode of frequency ω if $Cond(1 - \omega^2, M, L)$ is zero. This criterion allows us to find the frequencies of the trapped modes in the (M, L) plane for example.

Bibliographie

- [AHL87] D.G. Andrews, J.R. Holton, and C.B. Leovy. *Middle atmosphere dynamics*. Academic Press, 1987.
- [AY84] A. A. Abrashkin and E. I. Yakubovich. Planar rotational flows of an ideal fluid. *Sov. Phys. Dokl.*, 29(5) :370–371, 1984.
- [B93] O. Bühler. A nonlinear wave in rotating shallow water. *Woods Hole GFD summer school report*, 1993.
- [BC00a] P. Billant and J.M. Chomaz. Experimental evidence for a new instability of a vertical columnar vortex pair in a strongly stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, 418 :167–188, 2000.
- [BC00b] P. Billant and J.M. Chomaz. Theoretical analysis of the zigzag instability of a columnar vortex pair in a strongly stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, 419 :29–63, 2000.
- [BH79] D.A. Bennetts and B.J. Hoskins. Conditional symmetric instability - possible explanation for frontal rainbands. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 105(446) :945–962, 1979.
- [Blu67] W. Blumen. On nonlinear geostrophic adjustment. *J. Atmos. Sci.*, 24(4) :325–332, 1967.
- [Blu72] W. Blumen. Geostrophic adjustment. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 10(2) :485–528, 1972.
- [Blu00] W. Blumen. Inertial oscillations in a zero PV model. *J. Phys. Oceanogr.*, 30 :31–39, 2000.
- [BM98] O. Bühler and M.E. McIntyre. On non-dissipative wave-mean interactions in the atmosphere or oceans. *J. Fluid Mech.*, 354 :301–343, 1998.
- [BM99] O. Bühler and M.E. McIntyre. On shear-generated gravity waves that reach the mesosphere. Part II : wave propagation. *J. Atmos. Sci.*, 56 :3764–3773, 1999.
- [BMS99] O. Bühler, M.E. McIntyre, and J.F. Scinocca. On shear-generated gravity waves that reach the mesosphere. Part I : wave generation. *J. Atmos. Sci.*, 56 :3749–3763, 1999.
- [BVCH01] M. Beckers, R. Verzicco, H. J. H. Clercx, and G. J. F. Van Heist. Dynamics of pancake-like vortices in a stratified fluid : experiments, theory and numerical simulations. *J. Fluid Mech.*, 433 :1–27, 2001.
- [BW69] W. Blumen and W.M. Washington. The effect of horizontal shear flow on geostrophic adjustment in a barotropic fluid. *Tellus*, 21 :167–176, 1969.
- [BW95] W. Blumen and R. Wu. Geostrophic adjustment : frontogenesis and energy conversion. *J. Phys. Oceanogr.*, 25 :428–438, 1995.
- [BW01] W. Blumen and R. T. Williams. Unbalanced frontogenesis : part I, zero potential vorticity. *J. Atmos. Sci.*, 58 :2180–2195, 2001.

- [CM02] M. Charron and E. Manzini. Gravity waves from fronts : parameterization and middle atmosphere response in a general circulation model. *J. Atmos. Sci.*, 59 :923–941, 2002.
- [CNP91] M.J.P. Cullen, J. Norbury, and R.J. Purser. Generalized Lagrangian solutions for atmospheric and oceanic flows. *SIAM J. Appl. Math.*, 51(1) :20–31, 1991.
- [CP84] M.J.P. Cullen and R.J. Purser. An extended lagrangian theory of semi-geostrophic frontogenesis. *J. Atmos. Sci.*, 41 :1477–1497, 1984.
- [CP89] M.J.P. Cullen and R.J. Purser. Properties of the Lagrangian semigeostrophic equations. *J. Atmos. Sci.*, 46 :2684–2697, 1989.
- [Cri81] D.G. Crighton. Acoustics as a branch of fluid mechanics. *J. Fluid Mech.*, 106 :261–298, 1981.
- [Cro70] S. C. Crow. Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem. *Studies in Applied Mathematics*, 49(1) :21–44, 1970.
- [Csa71] G.T. Csanady. On the equilibrium shape of the thermocline in a shore zone. *J. Phys. Oceanogr.*, 1 :263–270, 1971.
- [Csa78] G.T. Csanady. Wind effects on surface to bottom fronts. *J. Geophys. Res.*, 83(9) :4633–4640, 1978.
- [CSP93] W. M. Chan, K. Shariff, and T. H. Pulliam. Instabilities of two-dimensional inviscid compressible vortices. *J. Fluid Mech.*, 253 :173–209, 1993.
- [CSV93] H.-R. Cho, T.G. Shepherd, and V.A. Vladimirov. Application of the direct Lyapunov method to the problem of symmetric stability in the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 50 :822–835, 1993.
- [Cul83] M.J.P. Cullen. Solutions to a model of a front forced by deformation. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 109 :565–573, 1983.
- [DHS⁺91] E.F. Danielsen, R. S. Hipskind, W.L. Starr, J.F. Vedder, S.E. Gaines, D. Kley, and K.K.Kelly. Irreversible transport in the stratosphere by internal waves of short vertical wavelength. *J. Geophys. Res.*, 96(D9) :17433–17452, 1991.
- [Dun81] T.J. Dunkerton. On the inertial stability of the equatorial middle atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 38 :2354–2364, 1981.
- [Eng96] S. Engelberg. Formation of singularities in the Euler and Euler-Poisson equations. *Physica D*, 98 :67–74, 1996.
- [FL92] D. C. Fritts and Z. Luo. Gravity wave excitation by geostrophic adjustment of the jet stream. Part I : Two-dimensional forcing. *J. Atmos. Sci.*, 49(8) :681–697, 1992.
- [FMN00] R. Ford, M. E. McIntyre, and W. A. Norton. Balance and the slow quasimanifold : some explicit results. *J. Atmos. Sci.*, 57 :1236–1254, 2000.
- [FMS96] A. M. Fincham, T. Maxworthy, and G. R. Spedding. Energy dissipation and vortex structure in freely decaying, stratified grid turbulence. *Dyn. Atmos. Ocean*, 23 :155–169, 1996.
- [FN92] D.C. Fritts and G.D. Nastrom. Sources of mesoscale variability of gravity waves. Part II : frontal, convective, and jet stream excitation. *J. Atmos. Sci.*, 49(2) :111–127, 1992.
- [For94] R. Ford. The response of a rotating ellipse of uniform potential vorticity to gravity wave radiation. *Phys. Fluids*, 6(11) :3694–3704, 1994.
- [FvH96] J.B. Flor and G.J.F. van Heijst. Stable and unstable monopolar vortices in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, 311 :257–287, 1996.

- [Gil76] A.E. Gill. Adjustment under gravity in a rotating channel. *J. Fluid Mech.*, 77(3) :603–621, 1976.
- [Gil82] A. E. Gill. *Atmosphere-ocean dynamics*. Academic Press, 1982.
- [GR96] M. Griffiths and M. J. Reeder. Stratospheric inertia-gravity waves generated in a numerical model of frontogenesis. I : Model solutions. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 122 :1153–1174, 1996.
- [GRMK00] F. Guest, M. Reeder, C. Marks, and D. Karoly. Inertia-gravity waves observed in the lower stratosphere over Macquarie Island. *J. Atmos. Sci.*, 57 :737–752, 2000.
- [Gry83] V. M. Gryanik. Emission of sound by linear vortical filaments. *Izvestia, Atmospheric and Oceanic Physics*, 19(2) :150–152, 1983.
- [HB72] B. J. Hoskins and F. P. Bretherton. Atmospheric frontogenesis models : mathematical formulation and solution. *J. Atmos. Sci.*, 29 :11–37, 1972.
- [HCR83] Y. Hsueh and B. Cushman-Roisin. On the formation of surface to bottom fronts over steep topography. *J. Geophys. Res.*, 88(1) :743–750, 1983.
- [Hei61] E. Heinz. Interior estimates for solutions of elliptic Monge-Ampère equations. In Amer. Math. Soc., editor, *Proc. Symp. Pure Mathematics, Vol. IV, Partial Differential Equations*, pages 149–155, 1961.
- [Hei85] G.J.F. Van Heijst. A geostrophic adjustment model of a tidal mixing front. *J. Phys. Oceanogr.*, 15 :1182–1190, 1985.
- [HHM⁺95] J.R. Holton, P.H. Haynes, M.E. McIntyre, A.R. Douglass, R.B. Rood, and L. Pfister. Stratosphere-troposphere exchange. *Reviews of Geophysics*, 4(403-409), 1995.
- [HMG97] B.L. Hua, D.W. Moore, and S. Le Gentil. Inertial nonlinear equilibration of equatorial flows. *J. Fluid Mech.*, 331 :345–371, 1997.
- [HMR85] B.J. Hoskins, M.E. McIntyre, and A.W. Robertson. On the use and significance of isentropic potential vorticity maps. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 111(470) :877–946, 1985.
- [Hol92] J. R. Holton. *An introduction to dynamic meteorology*. Academic Press, third edition, 1992.
- [Hos82] B. J. Hoskins. The mathematical theory of frontogenesis. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 14 :131–151, 1982.
- [Hou69] D. D. Houghton. Effect of rotation on the formation of hydraulic jumps. *J. Geophys. Res.*, 74(6) :1969, 1969.
- [HSH01] A. Hertzog, C. Souprayen, and A. Hauchecorne. Observation and backward trajectory of an inertia-gravity wave in the lower stratosphere. *Annales Geophysicae*, 19 :1–15, 2001.
- [JBB⁺99] A. Joly, K.A. Browning, P. Bessemoulin, J.-P. Cammas, G. Caniaux, J.-P. Chalon, S.A. Clough, R. Dirks, K.E. Emanuel, L. Eymard, R. Gall, T. D. Hewson, P. H. Hildebrand, D. Jorgensen, F. Lalaurette, R. H. Langland Y. Lemaître, P. Mascart, J.A. Moore, P. O. G. Persson, F. Roux, M.A. Shapiro, C. Snyder, Z. Toth, and R. M. Wakimoto. Overview of the field phase of the Fronts and Atlantic Stormtracks Experiment (FASTEX) project. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 125 :1–33, 1999.
- [JJS⁺97] A. Joly, D. Jorgensen, M.A. Shapiro, A. Thorpe, P. Bessemoulin, K.A. Browning, J.-P. Cammas, S.A. Clough, K.A. Emanuel, L.Eymard, R.Gall, P.H. Hildebrand, R.H. Langland, Y. Lemaître, P. Lynch, J.A. Moore, P.O. G. Persson, C. Snyder, and R.M. Wakimoto. The Fronts and Atlantic Stormtracks Experiment (FASTEX) : scientific objectives and experimental design. *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, 78(9) :1917–1940, 1997.

- [Kal98] M. V. Kalashnik. Forming of frontal zones during geostrophic adjustment in a continuously stratified fluid. *Izvetiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 34(6) :785–792, 1998.
- [Kal00] M. V. Kalashnik. Geostrophic adjustment and frontogenesis in a continuously stratified fluid. *Izvetiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 36(3) :386–395, 2000.
- [Kam86] T. Kambe. Acoustic emissions by vortex motions. *J. Fluid Mech.*, 173 :643–666, 1986.
- [KB98] E. Kunze and E. Boss. A model for vortex-trapped internal waves. *J. Phys. Oceanogr.*, 28 :2104–2115, 1998.
- [KD88] S. E. Koch and P. B. Dorian. A mesoscale gravity wave event observed during CCOPE. Part III : wave environment and possible source mechanisms. *Mon. Wea. Rev.*, 116 :2570–2591, 1988.
- [Kly66] V. I. Klyatskin. Emission of sound by a system of vortices. *Izvestiya Gas and Fluid Mechanics -in Russian*, (6) :87–92, 1966.
- [KP97] A. C. Kuo and L. M. Polvani. Time-dependent fully nonlinear geostrophic adjustment. *J. Phys. Oceanogr.*, 27 :1614–1634, 1997.
- [KP99] A. C. Kuo and L. M. Polvani. Wave-vortex interaction in rotating shallow water. Part 1. One space dimension. *J. Fluid Mech.*, 394 :1–27, 1999.
- [KP00] A. C. Kuo and L. M. Polvani. Nonlinear geostrophic adjustment, cyclone/anticyclone asymmetry, and potential vorticity rearrangement. *Phys. Fluids*, 12(5) :1087–1100, 2000.
- [KS86] D. Keyser and M.A. Shapiro. A review of the structure and dynamics of upper-level frontal zones. *Monthly Weather Review*, 114 :452–499, 1986.
- [KT95] P. Klein and A. M. Tréguier. Dispersion of wind-induced inertial waves by a barotropic jet. *J. Mar. Res.*, 53(1) :1–22, 1995.
- [Kun85] E. Kunze. Near-inertial wave propagation in geostrophic shear. *J. Phys. Oceanogr.*, 15 :544–565, 1985.
- [Lam32] Sir Horace Lamb. *Hydrodynamics*. Dover Publications, New York, Sixth edition, 1932.
- [Lax73] P.D. Lax. *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*. SIAM, PA, 1973.
- [Lei80] C.E. Leith. Nonlinear normal mode initialization and quasi-geostrophic theory. *J. Atmos. Sci.*, 37 :958–968, 1980.
- [LF93] Zhangai Luo and David C. Fritts. Gravity wave excitation by geostrophic adjustment of the jet stream. Part II : three dimensional forcing. *J. Atmos. Sci.*, 50(1) :104–115, 1993.
- [Lig52] James M. Lighthill. On sound generated aerodynamically, I. General theory. *Proc. Roy. Soc. London*, 211(A) :564–587, 1952.
- [Lig78] James M. Lighthill. *Waves in Fluids*. Cambridge University Press, 1978.
- [Lil83] D. K. Lilly. Stratified turbulence and the mesoscale variability of the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 40 :749–761, 1983.
- [Lov93] A. E. H. Love. On the stability of certain vortex motions. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 25 :18, 1893.
- [LS87] M.A. Laurentiev and B.V. Shabat. *Methods of the theory of functions of a complex variable*. Nauka, Moscow (in Russian), fifth edition, 1987.

- [LS88] L.M. Lyamshev and A.T. Skvortsov. Sound radiation by localized vortices in a slightly compressible medium (review). *Sov. Phys. Acoust.*, 34(5) :447–459, 1988.
- [LTU86] P.-L. Lions, N.S. Trudinger, and J.E. Urbas. The neumann problem for equations of Monge-Ampère type. *Comm. Pure Appl. Math.*, 39 :539–563, 1986.
- [LZ92] B. Legras and V. Zeitlin. Conformal dynamics for vortex motions. *Physics Letters A*, 167 :265–271, 1992.
- [McW88] J. McWilliams. Vortex generation through balanced adjustment. *J. Phys. Oceanogr.*, 18 :1178–1192, 1988.
- [Mes61] A. Messiah. *Mécanique Quantique*. Dunod, Paris, 1961.
- [MG80] J. C. McWilliams and P. R. Gent. Intermediate models of planetary circulations in the atmosphere and ocean. *J. Atmos. Sci.*, 37(8) :1657–1678, 1980.
- [MH89] O. Métais and J. R. Herring. Numerical simulations of freely evolving turbulence in stably stratified fluids. *J. Fluid Mech.*, 202 :117–148, 1989.
- [Mih63] J.M. Mihaljan. The exact solution of the Rossby adjustment problem. *Tellus*, 15 :150–154, 1963.
- [MJ97] A. J. Majda and M. J. Grote. Model dynamics and vertical collapse in decaying strongly stratified flows. *Phys. Fluids*, 9(10) :2932–2940, 1997.
- [MLT02] H. Moldovan, F. Lott, and H. Teitelbaum. Wave breaking and critical levels for propagating inertial gravity waves in the lower stratosphere. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 128(580) :713–732, 2002.
- [MN00] M.E. McIntyre and W.A. Norton. Potential vorticity inversion on a hemisphere. *J. Atmos. Sci.*, 57 :1214–1235, 2000.
- [MPZ02] S. Medvedev, R. Plougonven, and V. Zeitlin. Geostrophic adjustment of frontal anomalies in a two-layer fluid. *in preparation*, 2002.
- [MTvVK99] M. Moustou, H. Teitelbaum, P.F.J. van Velthoven, and H. Kelder. Analysis of gravity waves during the POLINAT experiment and some consequences for stratosphere-troposphere exchange. *J. Atmos. Sci.*, 56 :1019–1030, 1999.
- [MY98] J. McWilliams and I. Yavneh. Fluctuation growth and instability associated with a singularity of the balance equations. 10(10) :2587–2596, 1998.
- [Obu49] A.M. Obukhov. On the question of geostrophic wind (in Russian). *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Geograf.-Geofiz.*, 13(4) :281–306, 1949.
- [OD95] D. O’Sullivan and T.J. Dunkerton. Generation of inertia-gravity waves in a simulated life cycle of baroclinic instability. *J. Atmos. Sci.*, 52(21) :3695–3716, 1995.
- [Ou83] Hsien Wang Ou. Some two-layer models of the shelf-slope front : geostrophic adjustment and its maintenance. *J. Phys. Oceanogr.*, 13 :1798–1808, 1983.
- [Ou84] Hsien Wang Ou. Geostrophic adjustment : a mechanism for frontogenesis. *J. Phys. Oceanogr.*, 14 :994–1000, 1984.
- [Ped87] Joseph Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, second edition, 1987.
- [PTZ02] R. Plougonven, H. Teitelbaum, and V. Zeitlin. Observations of waves generated by the tropospheric jet above the North Atlantic from FASTEX radiosoundings. *in preparation*, 2002.

- [PWV01] E. Pavelin, J. Whiteway, and G. Vaughan. Observation of gravity wave generation and breaking in the lowermost stratosphere. *J. Geophys. Res.*, 106(D6) :5173–5179, 2001.
- [PZ02a] R. Plougonven and V. Zeitlin. Geostrophic adjustment of frontal anomalies in a continuously stratified fluid. *in preparation*, 2002.
- [PZ02b] R. Plougonven and V. Zeitlin. Internal gravity wave emission from a pancake vortex : an example of wave-vortex interaction in strongly stratified flows. *Phys. of Fluids*, 14(3) :1259–1268, 2002.
- [RG96] M. J. Reeder and M. Griffiths. Stratospheric inertia-gravity waves generated in a numerical model of frontogenesis. Part II : Wave sources, generation mechanisms and momentum fluxes. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 122 :1175–1195, 1996.
- [RL00] J. J. Riley and M.-P. Lelong. Fluid motions in the presence of strong stable stratification. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 32 :613–657, 2000.
- [Ros38] C.G. Rossby. On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems II. *J. Mar. Res.*, 1 :239–263, 1938.
- [RZJ01] G.M. Reznik, V. Zeitlin, and M. Ben Jelloul. Nonlinear theory of geostrophic adjustment. Part 1. Rotating shallow-water model. *J. Fluid Mech.*, 445 :93–120, 2001.
- [SBF96a] G.R. Spedding, F.K. Browand, and A.M. Fincham. The long-time evolution of the initially turbulent wake of a sphere in a stable stratification. *Dyn. Atmos. Ocean*, 23 :171–182, 1996.
- [SBF96b] G.R. Spedding, F.K. Browand, and A.M. Fincham. Turbulence, similarity scaling and vortex geometry in the wake of a towed sphere in a stably stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, 314 :53–103, 1996.
- [SC87] G.J. Shutts and M.J.P. Cullen. Parcel stability and its relation to semigeostrophic theory. *J. Atmos. Sci.*, 44 :1318–1330, 1987.
- [SE96] V. Schilling and D. Etling. Vertical mixing of passive scalars owing to breaking gravity waves. *Dyn. Atmos. Ocean*, 23 :371–378, 1996.
- [SH02] C. Staquet and G. Huerre. On transport across a barotropic shear flow by breaking inertia-gravity waves. *Phys. Fluids*, 14 :1993–2006, 2002.
- [SHDF80] W.H. Schubert, J.J. Hack, P.L. Silva Dias, and S.R. Fulton. Geostrophic adjustment in an axisymmetric vortex. *J. Atmos. Sci.*, 37 :1464–1484, 1980.
- [Shr81] V.I. Shrira. Propagation of nonlinear waves in a layer of rotating fluid. *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 17(1) :55–59, 1981.
- [Shr86] V.I. Shrira. On long strongly nonlinear waves in a rotating ocean. *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 22(4) :298–305, 1986.
- [SLTL98] C.M. Scavuzzo, M.A. Lamfri, H. Teitelbaum, and F. Lott. A study of the low-frequency inertio-gravity waves observed during the Pyrénées experiment. *J. Geophys. Res.*, 103(D2) :1747–1758, 1998.
- [Smi99] S.G. Llewlyn Smith. Near inertial oscillation of a barotropic vortex : trapped modes and time evolution. *J. Phys. Oceanogr.*, 29 :747–761, 1999.
- [Som04] Julien Le Sommer. *Fronto-cyclogénèse, ondes d’inertie-gravité et oscillations quasi-inertielles : quantification d’émission et interactions dynamiques*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure, 2004.
- [Spe02] G.R. Spedding. Vertical structure in stratified wakes with high initial Froude number. *J. Fluid Mech.*, 454, 2002.

- [SR89] C. Staquet and J.J. Riley. On the velocity field associated with potential vorticity. *Dyn. Atmos. Ocean*, 14 :93–123, 1989.
- [SSR93] C. Snyder, W.C. Skamarock, and R. Rotunno. Frontal dynamics near and following frontal collapse. *J. Atmos. Sci.*, 50(18) :3194–3211, 1993.
- [SV80] H. Stommel and G. Veronis. Barotropic response to cooling. *J. Geophys. Res.*, 85(11) :6661–6666, 1980.
- [TWM99] L. Thomas, R.M. Worthington, and A.J. McDonald. Inertia-gravity waves in the troposphere and lower stratosphere associated with a jet stream exit region. *Ann. Geophysicae*, 17(115-121), 1999.
- [TY82] A. Van Tuyl and J.A. Young. Numerical simulation of nonlinear jet streak adjustment. *Mon. Wea. Rev.*, 110 :2038–2054, 1982.
- [UK87] L.W. Uccellini and S.E. Koch. The synoptic setting and possible energy sources for mesoscale wave disturbances. *Mon. Wea. Rev.*, 115 :721–729, 1987.
- [Urb98] J. Urbas. Oblique boundary value problems for equations of monge-ampère type. *Calc. Var.*, 7 :19–39, 1998.
- [VY02] J. Vanneste and I. Yavneh. Exponentially small inertia-gravity waves and the breakdown of quasi-geostrophic balance. *submitted to J. Atmos. Sci.*, 2002.
- [Was64] W.M. Washington. A note on the adjustment towards geostrophic equilibrium in a simple fluid system. *Tellus*, 16 :530–534, 1964.
- [WB95] R. Wu and W. Blumen. Geostrophic adjustment of a zero potential vorticity flow initiated by a mass imbalance. *J. Phys. Oceanogr.*, 25 :439–445, 1995.
- [Whi74] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. Wiley Intersciences, 1974.
- [Wil92] J.S. Williams. *Nonlinear problems in vortex sound*. PhD thesis, University of Leeds, 1992.
- [Zei88] V. Zeitlin. Acoustic radiation from distributed vortex structures. *Sov. Phys. Acoust.*, 34(2) :188–190, 1988.
- [Zei91] V. Zeitlin. On the backreaction of acoustic radiation for distributed two-dimensional vortex structures. *Phys. Fluids*, (6) :1677–1680, 1991.
- [ZKDK00] F. Zhang, S.E. Koch, C.A. Davis, and M.L. Kaplan. A survey of unbalanced flow diagnostics and their application. *Adv. Atmos. Sci.*, 17(2) :165–183, 2000.
- [ZKDK01] F. Zhang, S.E. Koch, C.A. Davis, and M.L. Kaplan. Wavelet analysis and the governing dynamics of a large amplitude mesoscale gravity wave event along the east coast of the united states. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 127 :2209–2245, 2001.
- [ZMP02] V. Zeitlin, S.B. Medvedev, and R. Plougonven. 1d rotating shallow water : nonlinear semi-geostrophic adjustment, slow manifold and nonlinear wave phenomena. *submitted to J. of Fluid Mech.*, 2002.
- [ZRJ02] V. Zeitlin, G.M. Reznik, and M. Ben Jelloul. Nonlinear theory of geostrophic adjustment. Part 2 : Two-layer and continuously stratified primitive equations. *submitted to Journal of Fluid Mechanics*, 2002.