M1: Introduction à l'océanographie physique

Cours 2: L'océan, une couche mince de fluide en rotation

bruno.deremble@ens.fr *jerome.vialard@ird.fr*

L'océan, comme l'atmosphère sont des fluides géophysiques. Leur évolution est bien décrite par les équations de la dynamique des fluides. Cependant certains éléments permettent de simplifier ces équation pour ne retenir que les termes nécessaires à la compréhension des mouvements dans l'océan. Le premier élément notable est que le rapport d'aspect entre la profondeur de l'océan et son extension spatiale est de l'ordre de 10^{-3} (4 km/6400 km). L'océan est donc une fine pellicule de fluide pour laquelle on va pouvoir négliger dans un premier temps les mouvements verticaux par rapport aux mouvements horizontaux. Enfin le second point important est que nous observons l'océan dans un référentiel en rotation et que cette rotation modifie fondamentalement la dynamique comme nous allons pouvoir l'observer sur la table tournante.

2.1 L'équilibre hydrostatique

Le champ de pression est la variable dynamique dont le gradient est responsable de la mise en mouvement du fluide. Pour l'océan, on peut connaître ce champ de pression avec une bonne précision en estimant la masse d'eau qui se trouve au dessus de chaque point. Cette relation qui relie la masse d'eau et la pression est l'équilibre hydrostatique et s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \, , \tag{2.1}$$

avec p la pression, z la coordonée verticale, ρ la densité du fluide, g la gravité. Cette équation est une approximation de l'équation de la dynamique sur la coordonée verticale pour laquelle on ne retient que les termes d'ordre dominant (le gradient de pression et la masse du fluide). Si le fluide est de densité uniforme cette équation s'intègre simplement entre la surface et une altitude z donnée (à faire en exercice). On évoquera à la fin de ce cours le cas où la densité est une fonction de z.

2.2 Le référentiel terre

En océanographie, il faut aussi prendre en compte le fait que la terre n'est pas un référentiel galiléen. On peut illustrer les propriétés de ce référentiel grâce à la table tournante. Il y a deux façons de regarder la dynamique qui a lieu sur la table: soit d'un point de vue extérieur: dans ce cas l'observateur se trouve dans un référentiel galiléen et la dynamique sur la table doit obéir aux propriétés fondamentales. Soit on regarde la dynamique via la caméra qui tourne avec la table et dans ce cas, il va falloir tenir compte de la rotation pour décrire la dynamique.

2.2.1 La force d'inertie d'entraînement

La force d'inertie d'entraînement (ou force centrifuge) est la force qui entraîne une masse en rotation vers l'extérieur. Une façon d'illustrer cette force est de placer une bille au repos sur la table en rotation. Si la bille est placée au centre de la rotation, elle ne bouge pas mais dès qu'on l'écarte du centre elle s'écarte vers l'extérieur. L'expression de cette force est

$$\boldsymbol{F}_e = \Omega^2 r \boldsymbol{e}_r \, , \tag{2.2}$$

avec Ω la fréquence de la rotation, r la distance à l'axe de rotation et $\boldsymbol{e}_r$ le vecteur unitaire orthogonal à l'axe de rotation qui pointe vers l'objet que l'on décrit. On peut également illustrer cette force en mettant un bac d'eau en rotation.

- En utilisant l'équilibre hydrostatique, déterminer la pression en fonction de l'altitude de la surface libre h.
- On suppose que le fluide est en rotation solide. Quelles sont les vitesses dans le repère tournant?
- Ecrire l'équilibre entre le gradient de pression et la force d'inertie d'entraînement.
- À l'équilibre, en déduire l'expression de h en fonction de r.

Sur Terre, cette force s'illustre comme une petite correction de la gravité: la somme de la gravité et de la force d'inertie d'entraînement permet de définir le géoide qui le plan orthogonal à la gravité effective. On appellera donc simplement g la gravité en gardant à l'esprit que ce terme inclut la force d'inertie d'entraînement.

2.2.2 La force de Coriolis

Dans le même esprit, la force de Coriolis est nécessaire pour décrire la trajectoire d'une particule dans un référentiel tournant. Elle s'exprime comme

$$\boldsymbol{F}_c = -2\Omega \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}\,, \tag{2.3}$$

avec $\boldsymbol{k}$ l'axe de la rotation et $\boldsymbol{u}$ le vecteur vitesse. Dans l'hémisphère nord, cette force a pour effet de dévier les trajectoire vers la droite. On peut visualiser cette force sur la table tournante en lançant une bille le long du diamètre de la table. Du point de vue de l'observateur extérieur, cette bille traverse la table en ligne droite mais si on regarde la trajectoire sur la caméra, on voit une trajectoire incurvée.

Dans ce cours, on étudie les mouvements dans le plan orthogonal à la verticale locale. L'approximation dite *traditionnelle* consiste à ne considérer que la projection du vecteur rotation sur la verticale locale pour calculer la force de Coriolis. Sur la figure 2.1, on a représenté le repère (X_L, Y_L, Z_L) (longitude, latitude, verticale). On appelle θ la longitude et ϕ la latitude, quelle est l'expression de la force de Coriolis dans ce plan tangent (X_L, Y_L)? On appellera f le pré-facteur qui se trouve devant les composantes du vecteur vitesse.

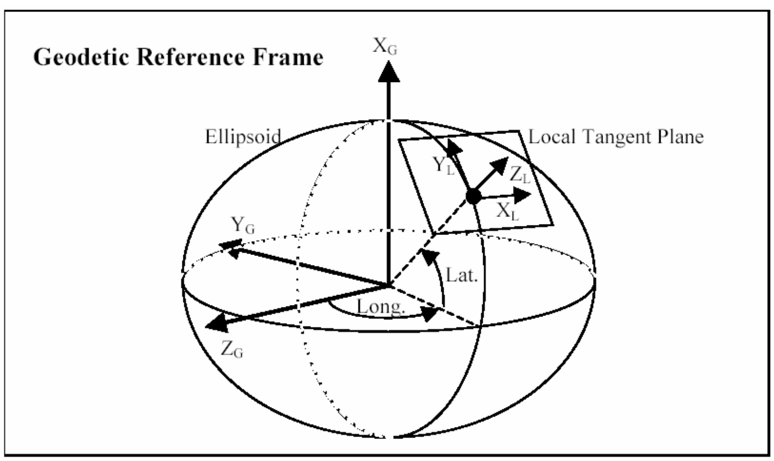


Figure 2.1: Illustration du plan tangent

2.2.3 Équilibre géostrophique

Les équations de la dynamique dans le référentiel tournant sur le plan horizontal sont donc

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - fv &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{Dv}{Dt} + fu &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.4}$$

avec f le paramètre de Coriolis que l'on a décrit ci-dessus. Le terme d'advection Du/Dt contient l'évolution temporelle de la vitesse plus le terme d'advection non linéaire. Une analyse en ordre de grandeur montre que le ratio entre ce terme et la force de Coriolis est le nombre de Rossby

$$Ro = \frac{U}{fL}\,, \tag{2.5}$$

avec U l'ordre de grandeur de la vitesse des courants océaniques et L la distance caractéristique des variations de ces vitesses. Estimez ce nombre de Rossby pour l'océan et pour l'atmosphère en différents endroits du globe. En déduire une simplification des équations (2.4) qui correspond à l'équilibre géostrophique.

2.3 Observation de la surface de l'océan

A l'aide de satellites, il est possible d'observer la surface de l'océan et d'avoir accès à de nombreuses variables dynamiques globales. Une variable qui nous intéresse ici est l'élévation de la surface de l'eau. La carte de la figure 2.2 montre une reconstruction de la topographie dynamique. En utilisant l'équilibre hydrostatique et l'équilibre géostrophique: tracez quelques vecteurs vitesse sur la carte.

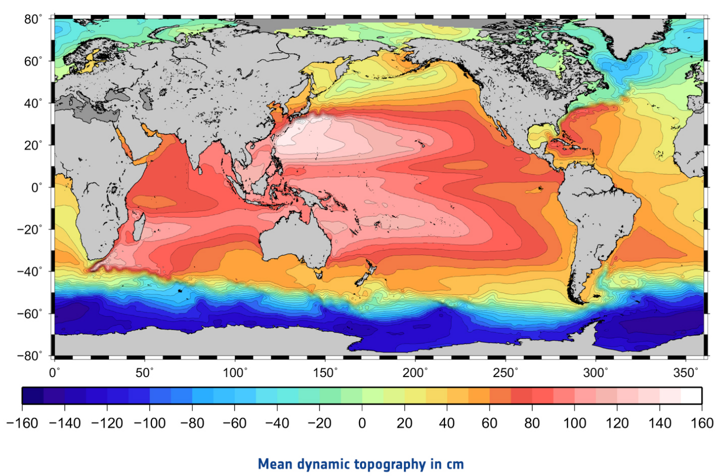


Figure 2.2: Moyenne climatologique de la hauteur d'eau dans l'océan vue par le satellite aviso.

2.4 La gravité réduite

Si l'océan avait une densité uniforme, la circulation que nous avons décrite serait barotrope (c'est à dire que les courants seraient uniforme sur la verticale). Or on sait que ce n'est pas le cas: la vitesse au fond de l'océan est beaucoup plus faible que la vitesse au voisinage de la surface. Au lieu de considérer un océan avec une densité uniforme, on va supposer qu'il est constitué d'une superposition de deux couches de densité ρ_1 et ρ_2 et que la couche du bas est au repos. Toute la dynamique est donc contenue dans la couche supérieure. À l'aide de l'équilibre hydrostatique, on peut calculer la pression dynamique dans la couche 1

$$P_1 = P_a + \rho_1 g(\eta_1 - z)\,. \tag{2.6}$$

De même la pression dans la couche 2 s'écrit

$$P_2 = P_i + \rho_2 g(\eta_2 - z)\,, \tag{2.7}$$

avec $P_i = P_a + \rho_1 g h_1$, la pression à l'interface. On suppose que la pression atmosphérique P_a est uniforme. Pour que la pression dans la couche 2 soit uniforme, il faut que

$$\eta_2 = -\eta_1 \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\,. \tag{2.8}$$

Les interfaces η_1 et η_2 varient donc en opposition de phase avec un facteur de proportionnalité de $\rho_1/(\rho_2 - \rho_1)$.

En faisant les approximations $h_1 \simeq H_1 - \eta_2$, et $(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1 \simeq (\rho_2 - \rho_1)/\rho_0$, ρ_0 étant la densité moyenne, on en déduit que le gradient de pression dans la couche active s'écrit

$$\nabla P_1 = g' \nabla h_1 \,, \tag{2.9}$$

avec g' la gravité réduite

$$g' = g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_0} \,. \tag{2.10}$$

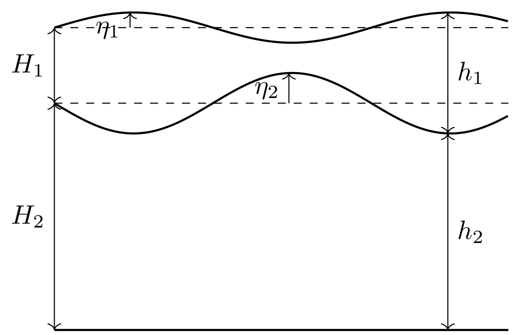
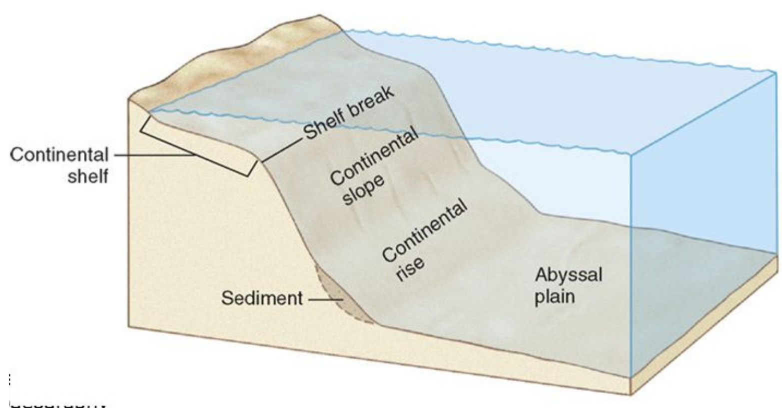


Figure 2.3: Modèle à gravité réduite. Les traits en pointillés sont la position des interfaces au repos. L'épaisseur des couches au repos est H_1 et H_2 pour la couche du haut et du bas respectivement. Les anomalies de hauteur de l'interface sont η_1 et η_2.

2.5 Rappels: Lois de conservation

2.5.1 Vision globale



L'océan est un bassin rempli d'eau dont les propriétés sont principalement déterminées aux frontières. On peut caractériser cette masse d'eau par son énergie, son volume, la concentration en chlorophyle, etc. Pour décrire l'évolution temporelle de ces variables, on utilise la règle générale

$$\frac{\partial T}{\partial t} + F = S \,, \tag{2.11}$$

avec T n'importe quelle quantité (par exemple la température), F le flux advectif de cette quantité à travers les frontières du domaine, et S un terme qui modélise les sources/puits.

Prenons l'exemple de la masse: quelle est la signification physique ce chacun des termes de l'équation (2.11)? idem pour les autres variables (salinité, quantité de mouvement, énergie)

2.5.2 Vision locale

Cette description globale de l'océan correspond à une vision eulérienne pour laquelle le fluide étudié reste au même endroit. Pour en savoir plus sur la dynamique locale, on préfère passer en description lagrangienne pour laquelle on suit une parcelle de fluide dans le temps. Prenons un exemple concret pour simplifier le problème. On étudie la température T d'une rivière qui coule de chamonix vers la mer méditerranée (Fig. 2.4). La température de la rivière est fixe dans le temps: si on met un thermomètre à Genève, on mesure en permanence 4 degC (en oubliant les saisons). À Lyon, la température sera toujours de 10 degC. Si maintenant on suit une particule de fluide depuis le glacier jusqu'à la mer, l'évolution de sa température est donnée par

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial x}\delta x \,. \tag{2.12}$$

On peut diviser par δt, le temps entre deux observations de telle sorte que

$$\frac{DT}{Dt} = u\frac{\partial T}{\partial x}\,, \tag{2.13}$$

(avec les δ qui ont été remplacés par des D par convention). A noter que dans l'exemple choisi, DT/Dt n'est pas nul, il vaut exactement le flux de chaleur qui a été absorbé lorsque la particule de fluide descendait la rivière.

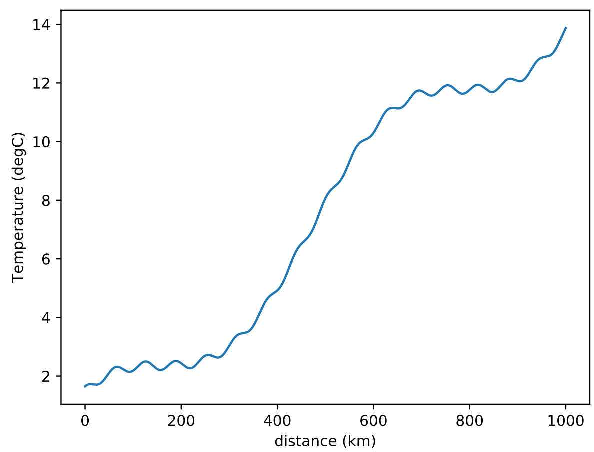


Figure 2.4: courbe $T(x)$: température de la rivière en fonction de la position et indépendante du temps

On peut étendre ce formalisme de une à deux dimensions. On considère une carte de SST (température de surface de l'océan) et on suppose que cette température ne bouge pas dans le temps (Fig. 2.5). En effectuant le même raisonnement que précédemment, on a

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial x}\delta x + \frac{\partial T}{\partial y}\delta y \tag{2.14}$$

$$\frac{DT}{Dt} = u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} \tag{2.15}$$

On peut encore généraliser à 4 dimensions (x, y, z, t) et on obtient l'expression de la dérivée matérielle qui exprime le taux de variation d'une quantité en fonction de toutes les variables.

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}\,. \tag{2.16}$$

Si on garde l'analogie avec la rivière, si $DT/Dt \neq 0$, à quoi est égal DT/Dt? On a donc dérivé l'équation de la température dans l'océan. On peut faire pareil pour la quantité de mouvement (principe fondamental de la dynamique), et pour la conservation de la masse.

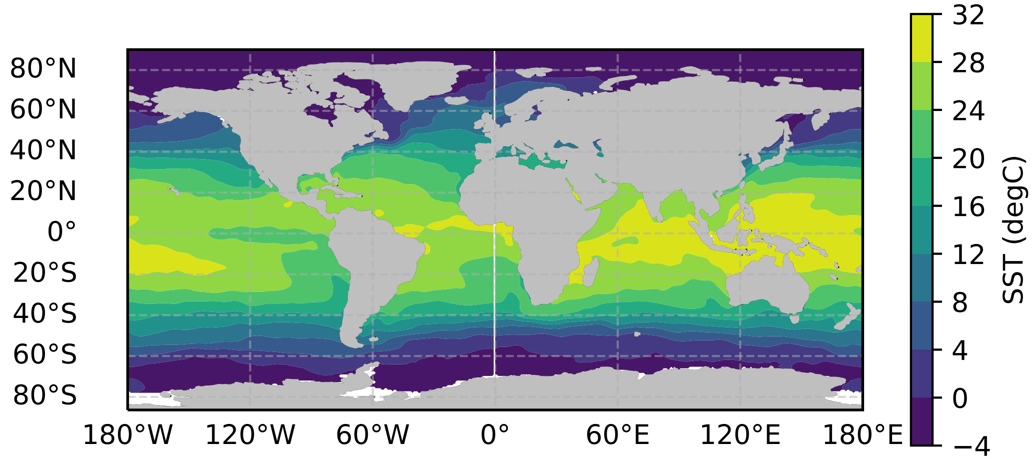


Figure 2.5: SST (degC) le 1er janvier 2000 (Era interim)

2.5.2.1 Conservation de la masse

par définition, la parcelle de fluide que l'on étudie a une masse constante

$$\frac{D\rho\Delta V}{Dt} = 0 = \rho\frac{D\Delta V}{Dt} + \Delta V\frac{D\rho}{Dt} \tag{2.17}$$

par ailleurs

$$\frac{D\Delta V}{Dt} = \int_S \boldsymbol{v} dS = \int_V \nabla\boldsymbol{v} dV\,, \tag{2.18}$$

et dans la limite $\Delta V \to 0$,

$$\frac{D\Delta V}{Dt} = \nabla\boldsymbol{v}\Delta V\,, \tag{2.19}$$

d'où l'équation de conservation de la masse

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\boldsymbol{v} = 0\,, \tag{2.20}$$

2.5.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

On peut utiliser le même principe pour dériver la conservation de la quantité de mouvement. Cette fois, on met explicitement les sources dans le membre de droite ($\boldsymbol{F}$).

$$\rho\Delta V\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \boldsymbol{F}\,. \tag{2.21}$$

Cette équation correspond en fait au principe fondamental de la dynamique. Parmi les forces extérieures $\boldsymbol{F}$, on a l'effet de la gravité

$$\boldsymbol{F}_g = -g\rho\Delta V\underline{\mathbf{k}}\,, \tag{2.22}$$

l'effet des forces de pression sur chacune des faces de la parcelle (Fig. 2.6).

$$\boldsymbol{F}_{p5} = p(x-\delta x)\delta y\delta z \tag{2.23}$$

$$\boldsymbol{F}_{p3} = -p(x+\delta x)\delta y\delta z \tag{2.24}$$

$$\boldsymbol{F}_{px} = -\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta y\delta z \tag{2.25}$$

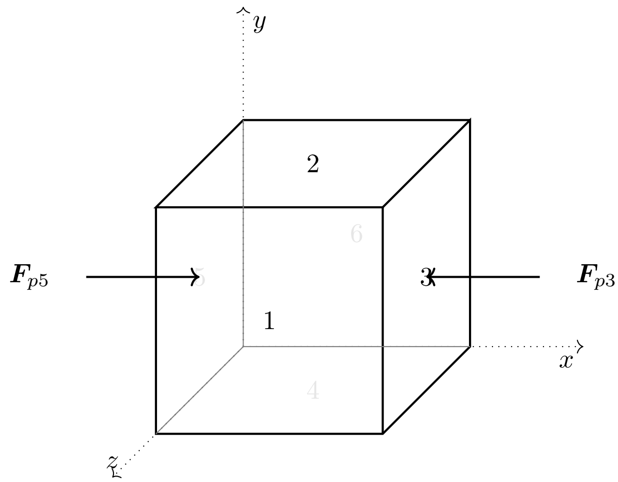


Figure 2.6: Forces sur la parcelle de fluide

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit donc

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - g\underline{\mathbf{k}}\,. \tag{2.26}$$

2.6 Rappel: Formalisme du référentiel terre

On a décrit les lois de conservations dans un référentiel Galiléen quelconque. Il faut maintenant les adapter au cas spécifique de la terre. Les deux éléments à prendre en compte sont d'une part la sphéricité de la terre et d'autre part le fait que la terre tourne.

2.6.1 Coordonnées sphériques

On peut écrire ces équations de conservation dans des coordonées sphériques. En géophysique, ces coordonnées sont λ, la longitude, ϕ, la latitude et r, la verticale locale. Le repère local associé à (λ, ϕ, r) est $(\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{j}}, \underline{\mathbf{k}})$ qui sont des vecteurs qui varient dans l'espace (cf. Fig. 2.7). Ces vecteurs deviennent donc des variables supplémentaires qu'il faut prendre en compte dans la dérivation. C'est pour cette raison que la dérivation des lois de conservation fait intervenir plus de termes (termes métriques).

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \frac{Du}{Dt}\underline{\mathbf{i}} + \frac{Dv}{Dt}\underline{\mathbf{j}} + \frac{Dw}{Dt}\underline{\mathbf{k}} + u\frac{D\underline{\mathbf{i}}}{Dt} + v\frac{D\underline{\mathbf{j}}}{Dt} + +w\frac{D\underline{\mathbf{k}}}{Dt} \tag{2.27}$$

2.6.2 Formalisme du référentiel tournant

Enfin, le référentiel lié à la terre tourne avec une périodicité journalière. On peut donc appliquer l'équation (2.27) pour le cas particulier

$$\frac{D\underline{\mathbf{i}}}{Dt} = \Omega \times \underline{\mathbf{i}}\,, \quad \frac{D\underline{\mathbf{j}}}{Dt} = \Omega \times \underline{\mathbf{j}}\,, \quad \frac{D\underline{\mathbf{k}}}{Dt} = \Omega \times \underline{\mathbf{k}}\,. \tag{2.28}$$

Donc pour tout vecteur $\boldsymbol{\tau}$ dans un référentiel tournant

$$\left.\frac{D\boldsymbol{\tau}}{Dt}\right|_i = \left.\frac{D\boldsymbol{\tau}}{Dt}\right|_r + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\tau}\,, \tag{2.29}$$

avec les indices i et r qui indiquent que la dérivée est prise dans le référentiel inertiel ou dans le référentiel tournant. En particulier la vitesse dans le référentiel est

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} \tag{2.30}$$

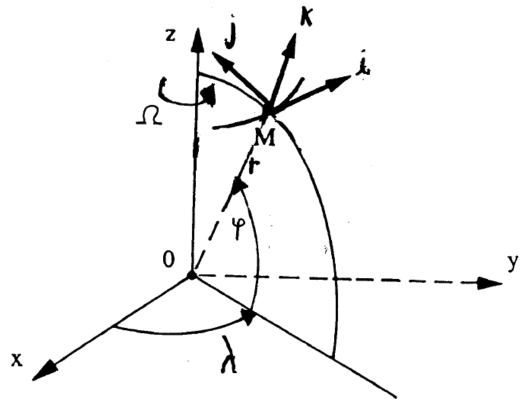


Figure 2.7: Les coordonnées sphériques en géophysique

ainsi

$$\left.\frac{D\boldsymbol{u}_i}{Dt}\right|_i = \left.\frac{D}{Dt}\right|_r (\boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \tag{2.31}$$

$$\left.\frac{D\boldsymbol{u}_i}{Dt}\right|_i = \left.\frac{D\boldsymbol{v}_r}{Dt}\right|_r + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \,. \tag{2.32}$$

Les deux termes de droite de l'équation (2.32) sont respectivement la force de Coriolis et l'accélération d'inertie d'entrainement. Ils traduisent le fait que la terre n'est pas un référentiel Galiléen.

2.6.3 Simplification des équations

Si on réécrit tous les termes des équations de la quantité de mouvement, on obtient

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{uv\tan\phi}{r} + \frac{uw}{r} - 2\Omega v \sin\phi + 2\Omega w \cos\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial p}{\partial \lambda} \tag{2.33}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{u^2\tan\phi}{r} + \frac{vw}{a} + 2\Omega u \cos\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \lambda} \tag{2.34}$$

$$\frac{Dw}{Dt} - \frac{u^2+v^2}{r} + 2\Omega u \cos\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - g \tag{2.35}$$

Cet ensemble d'équations est une description parfaite pour l'océan mais en pratique, inutilisable. En effet, avec ces équations, on fait aussi l'hypothèse que l'on a une connaissance parfaite du fluide en tout point, ce qui n'est pas accessible. Ainsi, selon les phénomènes auquel on s'intéresse, on a intérêt à simplifier les équations en ne gardant que les termes importants pour ce phénomène.

Dans les ordres de grandeur dans l'océan sont

L (m)	U (m s^{-1})	H (m)	W (m s^{-1})	ρ (kg m^{-3})	g (m s^{-2})	Ω (s^{-1})	$2\Omega \sin\phi$ s^{-1}

Table 2.1: Ordres de grandeur

Avec ces ordres de grandeurs, pouvez-vous en déduire l'équilibre dominant pour chacune des équations (horizontales et verticale)? Pour la verticale on appelle cet équilibre, l'équilibre hydrostatique, pour les équations horizontales, on l'appelle l'équilibre géostrophique.