

## M1: Introduction à l'océanographie physique

## Cours 3: La circulation forcée par les vents

bruno.deremble@ens.fr

jerome.vialard@ird.fr

L'objectif de ce cours est de comprendre la circulation océanique qui s'établit en réponse au forçage du vent. Nous allons supposer que l'océan, forcé par un vent stationnaire, est à l'équilibre. Ces deux éléments ne sont pas forcément liés. En effet, l'océan est un système non-linéaire qui peut présenter une structure interne complexe.

Nous allons chercher à décrire la circulation océanique barotrope. Dans notre cas, il s'agit d'étudier une couche de fluide dont la densité est la densité moyenne et dont le champ des vitesses horizontales ne dépend pas de la profondeur  $z$ .

### 3.1 Dynamique interne

L'océan est en équilibre hydrostatique

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g. \quad (3.1)$$

On obtient le champ de pression à la profondeur  $z$  en intégrant cette équation entre la surface libre  $\eta$  et une profondeur  $z$

$$p = p(\eta) + \rho_0 g(\eta - z). \quad (3.2)$$

Si on utilise cette expression du champ de pression dans les équations pour  $u$  et  $v$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - fv &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{Dv}{Dt} + fu &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

La hauteur de la surface libre  $\eta$  est une fonction de  $x$  et  $y$ . On en déduit que si la condition initiale sur  $u$  et  $v$  ne dépend pas de  $z$ , alors ces deux variables vont rester indépendantes de  $z$  ( $\partial u, v / \partial z = 0$ ) (théorème de Taylor Proudman). L'opérateur d'advection se simplifie donc en

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.4)$$

Cet opérateur ressemble à un opérateur d'advection 2d mais pourtant la vitesse verticale  $w$  est non nulle. Pour obtenir l'équation d'évolution de la hauteur d'eau  $h = H + \eta$ , on peut travailler sur l'équation d'incompressibilité.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.5)$$

On sait que  $u$  et  $v$  sont indépendants de  $z$ . On peut donc intégrer cette équation sur la verticale

$$h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + w(\eta) - w(-H) = 0, \quad (3.6)$$

et si on utilise la condition cinématique

$$w(\eta) = \left. \frac{D\eta}{Dt} \right|_{\eta}, \quad (3.7)$$

et le fait que la vitesse verticale est nulle au fond, on obtient l'équation

$$\frac{Dh}{Dt} + h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.8)$$

Cette équation, avec les deux équations (3.3) forme le système 'shallow water'. *Comment évolue la vitesse verticale entre le fond et la surface libre?*

### 3.2 Couche de surface d'Ekman

Le système que nous avons dérivé n'est ni forcé ni dissipé. Il admet donc une solution stationnaire  $u = v = h = 0$ . Pour obtenir une circulation non nulle, il faut superposer à ce système une couche de surface forcée par le vent. Cette couche de surface communique avec l'océan via la condition aux limites sur la vitesse verticale. Dans cette couche de surface, il y a un équilibre entre la force de Coriolis et les forces turbulentes. On appelle cette couche la couche d'Ekman

$$\begin{aligned} -fv_e &= \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial u_e}{\partial z} \right) \\ fu_e &= \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial v_e}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial v_e}{\partial y} + \frac{\partial w_e}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

avec pour conditions aux limites

$$\rho_0 K \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_x \quad \text{et} \quad \rho_0 K \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_y \quad \text{à} \quad z = 0, \quad (3.10)$$

et pas de friction à la base de la couche d'Ekman. Si on intègre ces équations sur toute la couche d'Ekman, et que l'on suppose que la vitesse verticale est nulle à la surface, on trouve que la vitesse verticale à la base de la couche d'Ekman vaut

$$w_e = \nabla \times \left( \frac{\tau}{\rho_0 f} \right), \quad (3.11)$$

Que l'on peut utiliser comme condition aux limites à la place de l'équation (3.7).

La physique de la couche d'Ekman sera plus amplement détaillée dans la partie 2 du cours. Les trois éléments à bien comprendre ici sont que (i) on regarde les propriétés moyennées sur la verticale de la couche d'Ekman, (ii) ce qui se passe dans la couche d'Ekman force une réponse de l'océan sur tout le reste de la colonne d'eau, et enfin (iii) il est important de bien comprendre *l'origine de la fermeture turbulente*.

### 3.3 Equilibre de Sverdrup

On cherche une solution simple du système précédent. Pour cela, on va faire l'approximation géostrophique: à grande échelle, il existe un équilibre entre la force de Coriolis et le gradient de pression. Dans les équations (3.3), cela revient à négliger le terme d'advection non-linéaire et le terme de dérivée temporelle. Par ailleurs, on se place sur le plan  $\beta$ , c'est à dire  $f = f_0 + \beta y$ . On a donc

$$\begin{aligned} -fv &= -g \frac{\partial h}{\partial x} \\ fu &= -g \frac{\partial h}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

et la conservation de la masse

$$h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + w_e = 0, \quad (3.13)$$

$w_e$  étant la vitesse verticale à la base de la couche d'Ekman. Si on utilise  $h \simeq H$ , alors on obtient

$$\beta v = \frac{f}{H} \nabla \times \left( \frac{\tau}{\rho_0 f} \right), \quad (3.14)$$

ou encore, si on utilise l'expression de la vitesse géostrophique pour  $v$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{f^2}{gH\beta} \nabla \times \left( \frac{\tau}{\rho_0 f} \right). \quad (3.15)$$

Il est donc possible de déterminer la hauteur de l'océan en fonction du rotationnel du vent en intégrant cette équation pour la variable  $x$ . Dans une géométrie idéalisée (bassin fermé de taille  $L \times L$ ) pour laquelle le vent ne dépend que de la latitude

$$\tau_x = -\tau_0 \frac{f}{f_0} \cos \frac{\pi y}{L} \quad \text{et} \quad \tau_y = 0, \quad (3.16)$$

on obtient

$$h = -h_0 \frac{x}{L} \sin \frac{\pi y}{L} + g(y), \quad \text{avec} \quad h_0 = \frac{\tau_0 f^2 \pi}{\rho_0 H \beta g f_0}. \quad (3.17)$$

Pour ajuster la constante d'intégration  $g(y)$ , on utilise le fait que l'on étudie un bassin fermé, ce qui implique que les vitesses orthogonales aux bords doivent être nulles. Mais on voit qu'il est donc impossible de satisfaire la condition d'imperméabilité aux bords est et ouest à la fois. On a soit

$$g(y) = 0, \quad \text{ou} \quad g(y) = h_0 \sin \frac{\pi y}{L} \quad (3.18)$$

Par ailleurs la conservation du volume

$$\int_x v dx = 0 \quad (3.19)$$

implique que  $v$  ne peut pas être du même signe à toutes les longitudes. Il existe donc forcément un courant de retour pour fermer la circulation (cf. paragraphe suivant). Enfin, l'équilibre de Sverdrup dans un contexte réaliste est donné sur la figure 3.1. Discutez des ordres de grandeur et des unités.

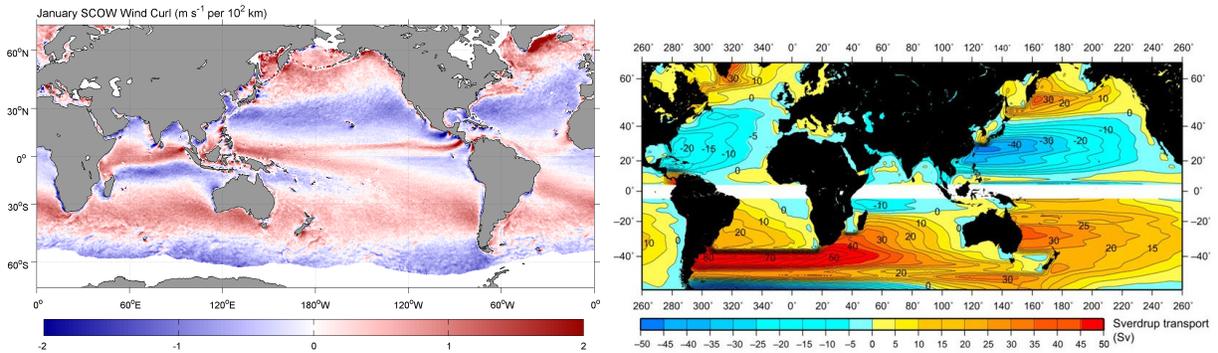


Figure 3.1: Rotationnel du vent (g.; figure de Risien and Chelton 2008) et circulation de Sverdrup (d., figure de Talley, Descriptive oceanography)

## 3.4 Le courant de bord ouest

Le modèle que nous avons présenté est une bonne description de la dynamique moyenne au milieu de l'océan. En revanche, il manque des ingrédients pour fermer la circulation et plus particulièrement pour modéliser les couches limites (courant de retour). Pour résoudre ce problème, nous allons rajouter des termes frictionnels et étudier comment ils modifient la solution près des bords.

### 3.4.1 Le modèle de Stommel

Si on reprend toute la dérivation en incluant une couche d'Ekman au fond, l'équation (3.14) devient

$$\beta v = \frac{f}{H} \nabla \times \left( \frac{\tau}{\rho_0 f} \right) - r \zeta, \quad (3.20)$$

avec  $\zeta = \partial_x v - \partial_y u$  la vorticité relative et  $r$  l'inverse d'une constante de temps. Dans toute la gyre, la couche d'Ekman du fond impacte peu la solution et l'équilibre que nous avons dérivé reste valide. En revanche, dans

le courant de retour, il s'établit un autre équilibre entre le terme de vorticité planétaire (terme de gauche) et la dissipation dans la couche d'Ekman du fond (terme de droite). Cet équilibre correspond à

$$\beta v = -r \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.21)$$

Pour le vent que l'on a choisi, le courant de retour sera dirigé vers le nord, et ce quelque soit la condition aux limite que l'on a choisie auparavant. Le terme de gauche est donc positif. Pour que le terme de droite soit positif, il faut donc que la circulation dans la gyre soit anticyclonique ce qui correspond à un courant de bord ouest. Cette équation peut s'écrire avec la variable  $h$  au lieu de  $v$ :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (3.22)$$

et admet comme solution

$$h = A(y) + B(y) \exp\left(-\frac{\beta}{r}x\right). \quad (3.23)$$

On obtient donc la solution totale en ajustant les fonctions  $A$  et  $B$  pour que  $h$  soit nulle au bord ouest et on obtient

$$h = h_0 \left[ 1 - \frac{x}{L} - \exp\left(-\frac{\beta}{r}x\right) \right] \sin \frac{\pi y}{L}. \quad (3.24)$$

Cette fonction  $h$  est tracée sans unité sur la figure 3.2. *Discuter de l'ordre de grandeur pour l'épaisseur de cette couche limite.*

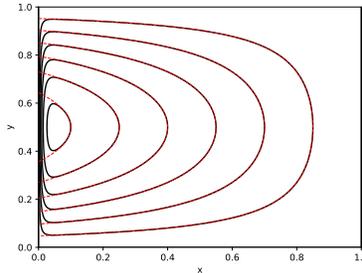


Figure 3.2: Hauteur  $h$  de l'océan pour le modèle de Stommel forcé par le vent en Eq. (3.16).

### 3.4.2 Le modèle de Munk

Le modèle de Stommel est bien justifié physiquement avec une couche d'Ekman au fond qui dissipe la vorticité planétaire. Mais on peut aussi proposer une autre forme de dissipation avec une fermeture turbulente. Dans ce cas l'équilibre s'écrit

$$\beta v = \frac{f}{H} \nabla \times \left( \frac{\tau}{\rho_0 f} \right) + A_h \nabla^2 \zeta, \quad (3.25)$$

Il est encore possible de trouver une solution analytique de ce modèle. Cette équation sera étudiée plus en détail dans le TD1.

## 3.5 Exercices

Redériver les équations Shallow Water pour une topographie non plate.