

THESE de DOCTORAT de l'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité

Dynamique des fluides géophysiques

présentée par

Guillaume Lapeyre

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet de la thèse :

**Topologie du mélange dans un fluide
turbulent géophysique**

soutenue le 10 juillet 2000

devant le jury composé :

M. Claude Basdevant	Président du jury
M. Raymond Pierrehumbert	Rapporteur
M. Massimo Vergassola	Rapporteur
M. Armando Babiano	Examineur
M. Bernard Legras	Examineur
Mme Bach Lien Hua	Co-directrice de thèse
M. Patrice Klein	Co-directeur de thèse

Remerciements

Bien entendu, un travail de thèse n'est pas simplement l'œuvre d'un thésard perdu dans le désert mais la réunion de plusieurs facteurs, aussi bien matériels et techniques que scientifiques ou humains. Sans échange, on ne peut pas améliorer ses connaissances et sa compréhension.

Tout d'abord, je tiens à remercier Patrice et Lien pour les discussions fructueuses que nous avons eues ensemble et pour les points de vue différents qu'ils ont apportés dans mon travail, ainsi que pour leur soutien quand quelques nuages noirs "AMNésiques" sont venus obscurcir le ciel.

J'ai aussi pu apprécier les discussions très enrichissantes que j'ai pu avoir avec plusieurs personnes telles que Raymond Pierrehumbert, Claude Basdevant ou Xavier Carton pour n'en citer que quelques unes. Je remercie aussi Bernard Legras pour m'avoir initié aux tourbillons polaires ainsi que ces étranges entités que sont les barrières "dynamiques" ou les variétés hyperboliques. Je pense aussi à Armando Babiano pour ses remarques et commentaires toujours fort pertinents sur la cascade de traceur en général et en particulier sur l'article traceur/vorticité.

Je tiens aussi à remercier les personnels des différents laboratoires où j'ai été accueilli, c'est-à-dire le Laboratoire de Physique des Océans à l'IFREMER à Brest et le Laboratoire de Météorologie Dynamique à l'ENS de Paris, et en particulier leur directeur. Je n'oublie pas non plus les personnes qui m'ont aidé dans les démarches administratives (quelques fois laborieuses) pour poursuivre une carrière dans les fluides géophysiques, en particulier Gérard Mégie et Robert Sadourny.

Enfin, j'aurais une pensée pour l'Algeco crew, le Montrouge crew et le BTZ crew avec qui j'ai pu passer de très bons moments et qui ont contribué de près ou de loin (n'est-ce-pas Eric et Frédéric ?) à ce manuscrit. Ils se reconnaîtront.

Table des matières

Introduction générale	9
1 Cascade turbulente du traceur	17
1.1 Introduction	17
1.2 Aspect général de la turbulence bidimensionnelle	17
1.2.1 Cascades d'énergie et d'entrophie	17
1.2.2 Caractéristiques spatiales des structures dynamiques	20
1.2.3 Cascade de scalaire passif	23
1.2.4 Rôle des différentes échelles dans la cascade turbulente de traceur	25
1.3 Dynamique non-locale de la cascade de traceur	25
1.3.1 Processus physique d'advection chaotique	26
1.3.2 Exemple du vortex dans un champ de déformation	29
1.3.3 Différence entre mélange chaotique et mélange diffusif	31
1.3.4 Non-localité de la cascade dans l'espace spectral	32
1.3.5 Conclusions	32
1.4 Méthodes d'approche du mélange de traceur	33
1.4.1 Variétés instables	33
1.4.2 Exposants de Liapounov	36
1.4.3 Diffusivité efficace	37
1.4.4 Approche statistique	38
1.4.5 Approche par l'étude des gradients de traceur	39
1.5 Discussion et choix d'une approche d'étude	40
2 Dynamique des gradients de traceur en turbulence bidimensionnelle	41
2.1 Introduction	41
2.2 Discussion sur l'approche suivie	41
2.2.1 Rappel du critère d'Okubo-Weiss	42
2.2.2 Discussion des hypothèses du critère d'Okubo-Weiss	43
2.2.3 Discussion sur notre approche	44
2.3 Résultats théoriques sur la dynamique des gradients de traceur	45
2.3.1 Orientation des gradients de traceur	45
2.3.2 Étude de l'équation d'orientation	47
2.3.3 Mécanismes physiques de la dynamique d'orientation	52
2.3.4 Résumé des résultats	58

2.4	Validation de nos résultats	59
2.4.1	Vortex axisymétrique	59
2.4.2	Validation statistique des alignements	59
2.4.3	Validation dans l'espace physique	61
2.5	Discussion	70
2.5.1	Relation avec les accélérations lagrangiennes	70
2.5.2	Échelle de temps de la dynamique des gradients	70
2.5.3	Discussion des hypothèses	71
2.6	Conclusion	73
3	Vorticité : traceur actif pour la cascade directe ?	75
3.1	Introduction	75
3.2	Observations géophysiques	78
3.2.1	Observations atmosphériques	79
3.2.2	Observations océaniques	82
3.3	Comparaison scalaire passif/vorticité en turbulence	86
3.4	Arguments théoriques sur la nature active de la vorticité	90
3.4.1	Inversibilité	90
3.4.2	Instabilité des filaments de vorticité	91
3.4.3	Effet d'élasticité en présence de forts gradients de PV	92
3.4.4	Relation entre la vorticité et la déformation	92
3.5	Article : Lapeyre et al. (2000)	97
3.5.1	Motivation	97
3.5.2	Position of the problem	98
3.5.3	Initial conditions and their cascade properties	102
3.5.4	Physical and spectral characterization of the cascades	107
3.5.5	Alignment properties of tracer gradients	112
3.5.6	Summary and conclusion	119
4	Revue de la dynamique de la vorticité en turbulence tridimensionnelle	121
4.1	Introduction	121
4.1.1	Analogie deux dimensions-trois dimensions	121
4.1.2	Singularité des équations d'Euler	122
4.1.3	Plan du chapitre	124
4.1.4	Notations	124
4.2	Observations de la vorticité et des vecteurs matériels	125
4.2.1	Formation de tubes de vorticité intenses	125
4.2.2	Alignement avec les axes de déformation	126
4.3	Dynamique de la vorticité et d'éléments matériels	128
4.3.1	Effets de la dynamique de Navier-Stokes	128
4.3.2	Dynamique dans la base de déformation	129
4.3.3	Discussion sur la dynamique des éléments matériels	131
4.4	Nature active de la vorticité tridimensionnelle	131
4.4.1	Différences de comportement entre vorticité et élément matériel	132

4.4.2	Dynamique locale de la vorticité	132
4.4.3	Réduction des non-l�arit�s dans l'équation de la vorticité	134
4.4.4	Relation entre vorticité et déformation	135
4.5	Conclusion	140
	Conclusion générale	143
A	Quelques résultats annexes	149
A.1	Relation entre les gradients et la courbure des isolignes	149
A.2	équation simplifiée pour l'évolution d'un tourbillon déformé	150
A.3	Effets de la divergence de la vitesse	151
A.4	Analogie entre l'évolution des nombres d'onde du traceur et les gradients de traceur	152
A.5	Lien avec la dispersion de particules et les exposants de Liapounov	153
A.5.1	Le problème de la dispersion de particules	153
A.5.2	Théorie de Liapounov	153
B	Article : Lapeyre et al. (1999)	157
B.1	Introduction	157
B.2	Equations for the evolution of tracer gradient	159
B.2.1	Magnitude and orientation	159
B.2.2	Orientation in strain coordinates	161
B.3	Dynamics of the gradient orientation	162
B.3.1	Different regimes of evolution	162
B.3.2	Criterion to partition the flow	164
B.4	Numerical and analytical results	165
B.4.1	Freely decaying turbulence	165
B.4.2	Analytic examples	168
B.5	Conclusion	170
B.A	Eigenvalue problem	171
C	Article : Klein et al. (2000)	173
C.1	Introduction	173
C.2	Second order Lagrangian approach of alignment dynamics	175
C.3	Discussion of the approach used	178
C.3.1	Relation with previous work	178
C.3.2	Three limiting cases	179
C.4	Experimental results	180
C.4.1	Preferential alignment of the tracer gradient vector	181
C.4.2	The role of the parameters r and s on the alignment process	184
C.4.3	Consequence on the growth rate of the tracer gradient	186
C.5	Conclusion	187
C.6	Acknowledgements	189
C.A		190

Références

192

Introduction générale

Les structures énergétiques présentes dans les écoulements atmosphériques et océaniques (jets, tourbillons ...) se retrouvent présentes dans la géométrie des champs physiques de traceurs (par exemple, la salinité dans l'océan ou l'humidité dans l'atmosphère). Ces traceurs présentent la propriété commune d'être transportés par l'écoulement le long de *trajectoires lagrangiennes* ainsi que le fait d'avoir une échelle spatiale d'injection du même ordre de grandeur que l'échelle des structures énergétiques (par exemple, à cause de l'existence d'un gradient moyen). De tels exemples abondent grâce notamment aux observations d'échelle spatiale extrêmement fine que l'on peut obtenir par mesure par satellite.

Un exemple océanique pourrait être le Gulf Stream et ses anneaux tourbillonnaires dont la signature est visible sur les champs de différents traceurs. Le Gulf Stream est le courant intense que l'on peut voir sur la figure 1 : il longe la côte Est américaine vers le Nord en faisant d'importants méandres qui peuvent engendrer des tourbillons. Sur la figure 1, on peut voir un fort contraste entre les eaux au Nord du Gulf Stream (couleurs vert et rouge, c'est-à-dire forte teneur en chlorophylle) et les eaux au Sud (couleur bleue) et l'on peut estimer exactement la position du front que constitue le Gulf Stream. De plus, on note la présence de plusieurs tourbillons au Nord du Gulf Stream qui contiennent de l'eau provenant du Sud, ainsi que la présence de filaments qui s'enroulent en spirale autour de ces tourbillons anticycloniques. On voit donc que le Gulf Stream et les tourbillons qu'il engendre développent des fronts très marqués ainsi que de fins filaments.

Un exemple similaire dans l'atmosphère est donné par le contenu en vapeur d'eau vu par satellite. La figure 2 montre que l'humidité a une structure fortement reliée aux dépressions et jets qui sont présents dans l'atmosphère. Par exemple, on observe de fins filaments qui se développent autour des dépressions (comme celle centrée sur la côte Ouest nord-américaine) ainsi que des fronts marqués (comme ceux dans l'hémisphère Sud).

On voit donc que *la turbulence géostrophique à l'échelle synoptique (c'est-à-dire du rayon interne de déformation) imprime sa marque sur les champs de traceurs en y développant des fronts très intenses et des structures filamentaires*. Ces caractéristiques correspondent en fait à ce qu'on appelle communément *la cascade turbulente de traceur vers les petites échelles* puisque le champ de traceur développe des petites échelles (c'est-à-dire des filaments et des fronts intenses de très faible largeur) à partir de son advection par les écoulements turbulents géophysiques. Ce transport par la turbulence a pour effet de déformer le champ de traceur par un pro-

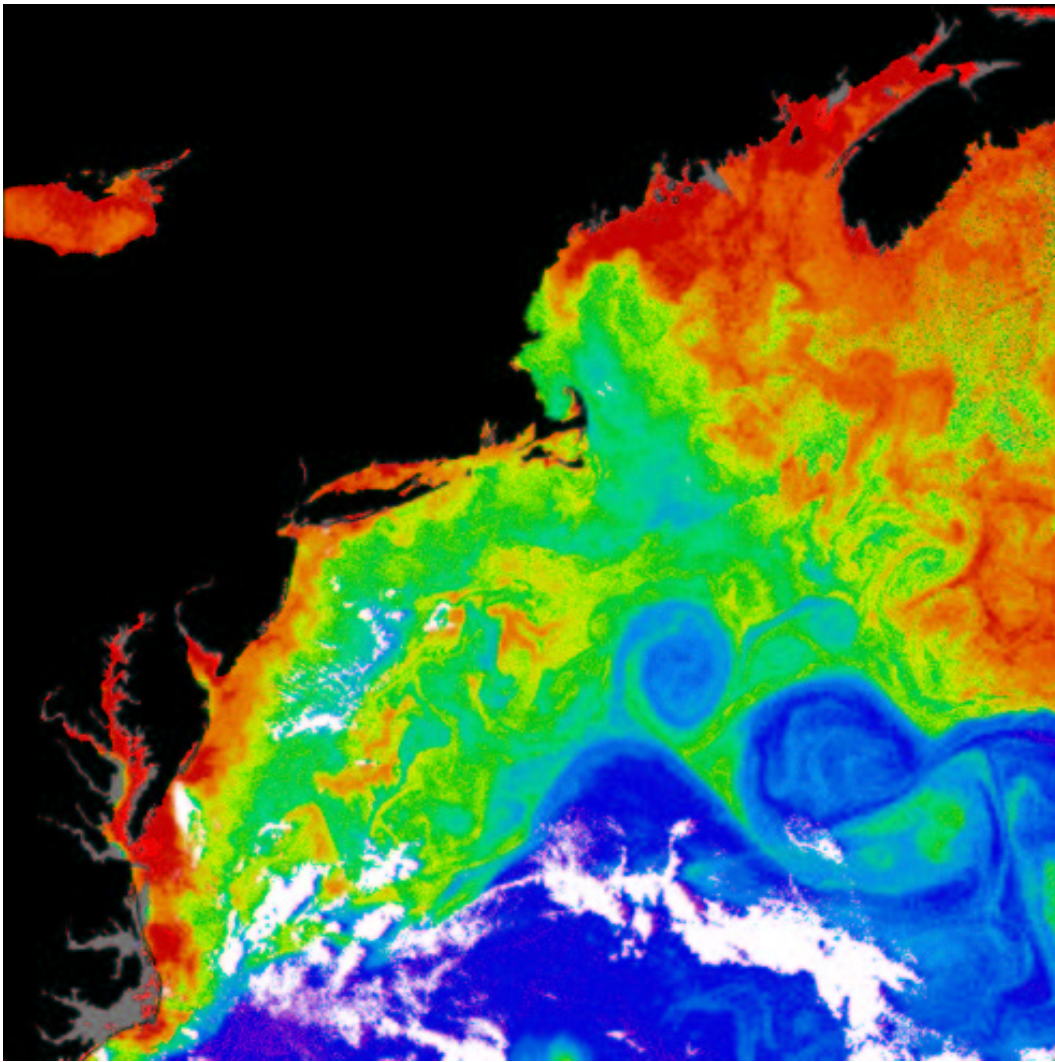


Figure 1: Couleur de l'océan de surface mesurée par satellite (CZCS embarqué sur NIMBUS 7) le long de la côte Est américaine. On peut voir la zone de séparation que constitue le Gulf Stream (contraste vert-bleu) ainsi qu'un tourbillon au Nord du Gulf Stream avec des eaux provenant du côté Sud.

cessus d'advection différentielle (c'est-à-dire une advection différente en des points différents).

Les exemples que nous venons de présenter indiquent bien une formation de gradients de traceur intenses, aussi bien pour les fronts grande échelle que pour les filaments. Ces forts gradients sont bien une manifestation de la cascade puisque, pour un traceur c , la quantité $|\nabla c|/c$ correspond bien à l'inverse d'une longueur.

Les échelles qui nous intéressent ici sont les échelles synoptiques, typiquement 1000km dans l'atmosphère et 100km dans l'océan. Ces échelles correspondent aux structures les plus énergétiques de l'atmosphère et de l'océan, c'est-à-dire aux structures qui devraient contrôler très fortement la cascade et le mélange de traceur.

GOES10 WV 26/12/99 06:00

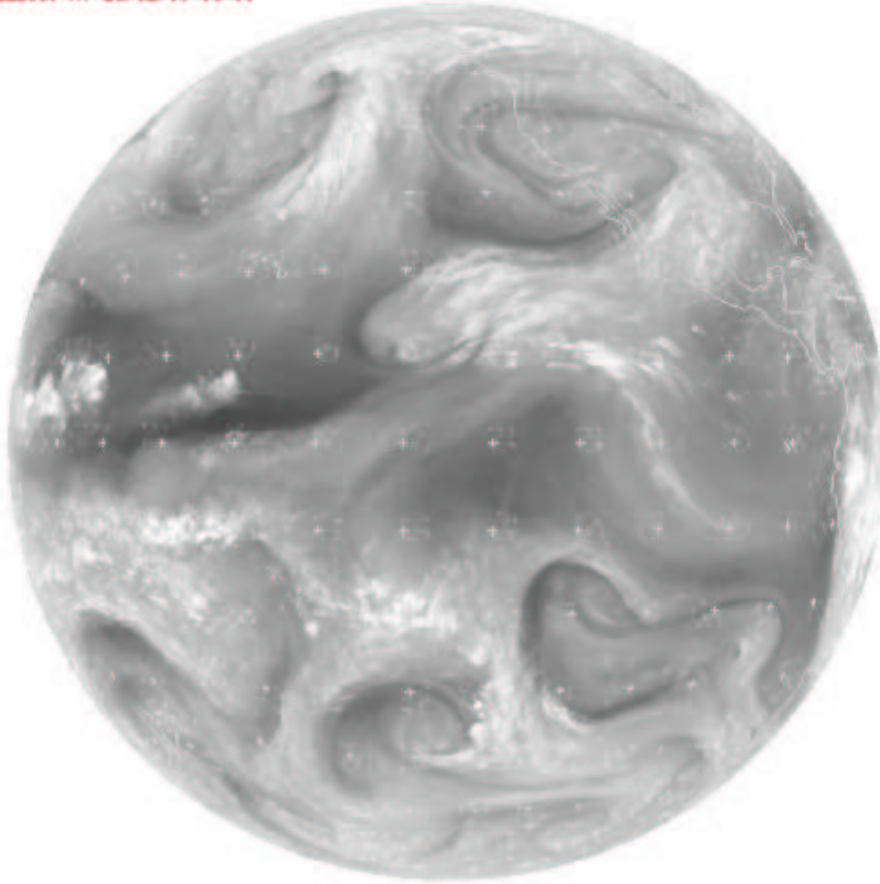


Figure 2: Contenu en vapeur d'eau de l'atmosphère vu par satellite (GOES). En blanc, les structures fortement chargées en vapeur d'eau. En noir, les régions de subsidence.

À ces échelles, on peut considérer que *les mouvements sont, dans une bonne approximation, bidimensionnels*, car les effets conjoints de la force de Coriolis et de la stratification contribuent à la bidimensionnalité le long des surfaces isentropiques dans l'atmosphère et des surfaces isopycnales dans l'océan. Nous considérerons donc *l'aspect horizontal de la cascade de traceur vers les petites échelles*.

Examinons un peu plus en détails certains aspects essentiels de la cascade dans l'espace physique. Le premier est l'observation que différents traceurs développent de forts gradients comme nous l'avons déjà remarqué sur les figures précédentes. La figure 3 montre les rapports de mélange de différentes espèces chimiques le long d'une trajectoire d'avion dans la stratosphère dans l'hémisphère Sud en hiver. On voit très nettement que pour ces différents traceurs, on observe des fortes variations spatiales *aux mêmes endroits de l'espace physique*, par exemple aux latitudes 59° et 65° , cette dernière latitude correspondant au bord du tourbillon polaire stratosphérique (jet intense vers l'Ouest en hiver). Par contre, ces traceurs sont tous relativement ho-

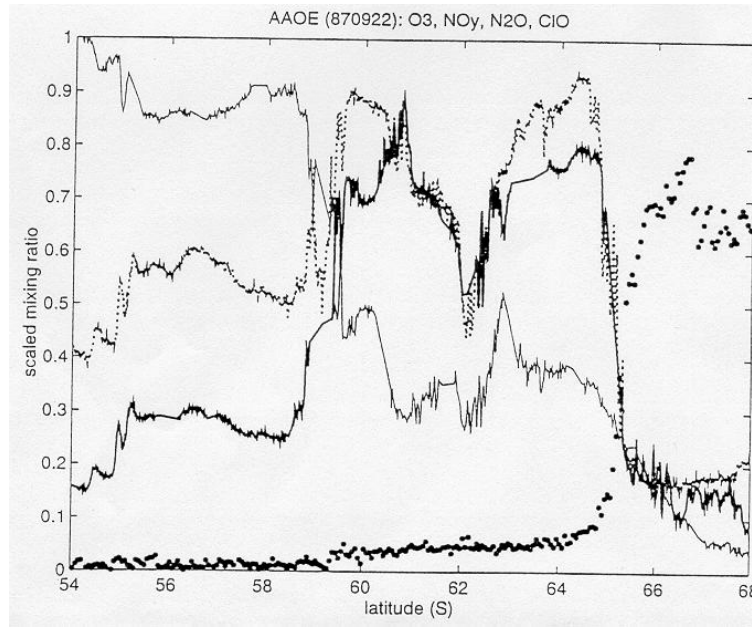


Figure 3: Rapport de mélange redimensionné de l’ozone O_3 (pointillés), de N_2O (trait plein et fin), de NO_y (trait plein épais), de ClO (pointillés épais) mesurés le long d’une trajectoire d’avion en septembre 1987 dans l’hémisphère Sud. Tiré de Tuck (1989).

mogènes entre 55.5° et 59° . On voit donc que ces différents traceurs ont des zones de fronts et des zones d’homogénéisation analogues. Cela signifie que c’est la topologie de l’écoulement qui contrôle les propriétés de mélange de ces différents traceurs, en particulier pour les régions de forts gradients. Il faut cependant noter que ces forts gradients ont différentes intensités si on mesure ces intensités par $|\nabla c|/c$ où c est un traceur car cette intensité dépend plutôt de l’histoire de chaque traceur.

On peut donc dire que *la cascade turbulente de traceur vers les petites échelles se manifeste par le développement de forts gradients de traceur aux mêmes endroits de l’espace physique (ce que nous appellerons des barrières au transport ou au mélange) mais avec des intensités différentes. Ce qui produit cette cascade, c’est la topologie de l’écoulement, en particulier les structures synoptiques car celles-ci correspondent au signal le plus énergétique des fluides géophysiques.*

Nous venons de voir comment se manifeste la cascade turbulente de traceur vers les petites échelles. On peut maintenant se poser la question de la paramétrisation des petites échelles créées par cette cascade dans les modèles de circulation générale de l’atmosphère ou de l’océan.

Examinons ce problème pour le cas de l’équation d’un traceur c en turbulence bidimensionnelle :

$$\partial_t c + \nabla \cdot (\mathbf{u} c) = 0 ,$$

où $\mathbf{u}$ est le vecteur vitesse.

Décomposons cette équation en une partie grande échelle (celle qui est résolue par les modèles numériques) et une partie petite échelle (celle qui est paramétrisée par ces modèles). L'équation pour le traceur grande échelle $\bar{c}$ est

$$\partial_t \bar{c} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{c}) = -\nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}'c'}) ,$$

où les termes $\mathbf{u}'$ et c' correspondent à la petite échelle et les termes $\bar{\mathbf{u}}$ et $\bar{c}$ à la grande échelle.

Nous avons vu à travers plusieurs exemples que la petite échelle semble être contrôlée par les propriétés grande échelle de l'écoulement à travers la cascade de traceur. Ceci semble vrai en turbulence bidimensionnelle car les structures principales qui contrôlent l'advection sont des structures grande échelle. En effet, la turbulence bidimensionnelle se caractérise par l'existence d'une cascade d'énergie vers *les grandes échelles* (Kraichnan 1967, Batchelor 1969). De plus, on constate que l'effet advectif des petites échelles est assez faible, hypothèse sous-jacente au modèle de dynamique de contours avec chirurgie de Dritschel (1989a) où les filaments de vorticité de petite échelle sont supprimés. Cette constatation est corroborée par le fait que la cascade de traceur dépend surtout des caractéristiques grande échelle de l'écoulement (Pierrehumbert 1991, Waugh et Plumb 1994). On peut donc penser que le flux turbulent $\overline{\mathbf{u}'c'}$ peut se paramétriser en fonction des propriétés grande échelle du traceur et de l'écoulement. Une paramétrisation de ces échelles non-résolues se ramène en fait à modéliser la cascade de traceur (ou d'ensrophie) au niveau de ces échelles (Basdevant et Sadourny 1983).

Examinons maintenant le modèle le plus répandu de paramétrisation du mélange petite échelle : la paramétrisation "down-gradient" de viscosité turbulente. Celle-ci a pour hypothèse fondamentale que le flux turbulent de traceur a une intensité proportionnelle au gradient de traceur grande échelle :

$$\overline{\mathbf{u}'c'} = -\kappa \nabla \bar{c} ,$$

avec κ la matrice de diffusivité. Cette hypothèse se dérive par analogie avec la diffusion moléculaire (Batchelor 1953) car on réduit les contrastes locaux de traceur en redistribuant le traceur des régions de forte concentration vers les régions de faible concentration, (c'est-à-dire dans le sens opposé au gradient).

Cette paramétrisation est adéquate si on pense que le mélange se fait localement comme pour la diffusion moléculaire. Mais correspond-elle   ce qui se passe réellement dans les fluides géophysiques ?

Pour répondre à cette question, on peut examiner le cas simplifié d'un tourbillon soumis à un cisaillement externe comme étudié par Mariotti et al. (1994) et Legras et al. (2001). Comme pour les observations géophysiques que nous avons présentées, le tourbillon crée des filaments et possède de très forts gradients, processus que l'on observait aussi pour les tourbillons du Gulf Stream (cf. figure 4). Il est donc un bon

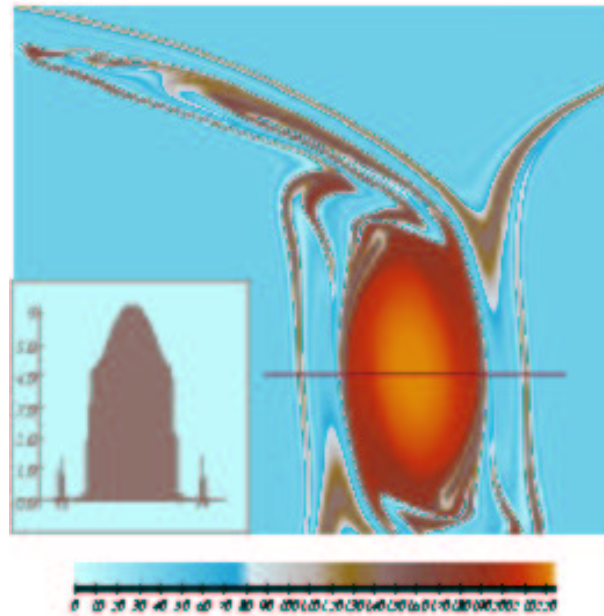


Figure 4: Vortex dans un champ de déformation externe (repris de Mariotti et al., 1994). La figure insérée représente le champ de vorticité pour une section à travers le vortex.

prototype des processus de cascade géophysique. À cause du champ de déformation que subit le tourbillon, il y a un processus de filamentation qui expulse la vorticité en de fines structures loin du tourbillon. Par le même mécanisme d'érosion du tourbillon, il y a intensification des gradients de bord du tourbillon comme on peut le voir par une coupe du tourbillon sur la figure 4. La création de petites échelles en forme de filaments a lieu au niveau des points critiques du tourbillon ; ces régions de fuite de matériel en filaments très fins hors du tourbillon correspondent à des régions de fort mélange entre l'intérieur et l'extérieur du tourbillon. Dans ces régions d'expulsion de filaments, on a bien un fort gradient grande échelle et un fort mélange petite échelle. Par contre, à cause de cette fuite de matériel, les isolignes de vorticité se resserrent sur le bord du tourbillon. Cela crée une accentuation des gradients le long du bord du tourbillon et il ne peut pas y avoir de transport à travers ces gradients intensifiés.

Cet exemple montre que *le transport turbulent n'est pas directement proportionnel au gradient grande échelle de vorticité local. Un fort gradient peut signifier aussi bien une barrière au transport qu'un point d'éjection de matériel*. Cela est dû au fait que la cascade a un aspect *non-local* dans l'espace physique qui est relié à la nature grande échelle de l'advection.

La paramétrisation classique élimine les gradients de traceur proportionnellement à ceux-ci. Si on considère le cas de la vorticité, on voit que cette paramétrisation va réduire les gradients au bord du tourbillon, ce qui va entraîner la destruction prématurée du tourbillon (Mariotti et al. 1994, Dritschel et Legras 1993, Yao et al. 1995). Ce problème se manifeste de façon toute particulière dans les modèles de circulation générale : dans ces modèles, les vortex sont représentés par une dizaine

de points de grille. Ce n'est pas suffisant pour représenter les forts gradients locaux souvent associés aux bords des tourbillons et le résultat est une dissipation artificielle des tourbillons dans ces modèles.

Il faut donc une meilleure paramétrisation des flux turbulents afin d'améliorer la représentation de la dynamique dans ces modèles de circulation générale. Une telle paramétrisation implique de pouvoir discriminer entre les régions imperméables au mélange (là où le mélange aux petites échelles sera fortement inhibé) et les régions de fort mélange reliées à la cascade. La compréhension des mécanismes de cascade en milieu presque non-diffusif est essentielle pour comprendre comment l'écoulement aux échelles synoptiques agit comme catalyseur ou inhibiteur du mélange petite échelle.

Nous venons de voir que les propriétés du mélange à l'échelle synoptique dans un écoulement géophysique turbulent ne correspondent pas à l'hypothèse de diffusivité turbulente¹. Un fort gradient moyen n'est pas forcément associé à un flux turbulent plus intense. Au contraire, il peut être associé à une barrière au mélange. Il nous faut donc comprendre comment les structures énergétiques présentes dans l'écoulement vont diriger la cascade vers les petites échelles et en particulier comment cette cascade se manifeste dans l'espace physique.

Afin de répondre à ce problème, nous allons reprendre et détailler les principaux traits de la cascade de traceur en turbulence bidimensionnelle dans le premier chapitre. Nous venons en fait d'esquisser ses traits, à savoir la formation de petites échelles à travers des gradients intenses de traceur et l'importance de la non-localité dans l'espace physique de la cascade de traceur. Cela nous conduira à expliquer les différentes méthodes d'approche du problème et nous discuterons l'approche choisie dans la thèse.

Dans le deuxième chapitre, nous développerons les principaux résultats théoriques de cette thèse. Nous avons examiné la cascade de traceur à travers la dynamique des gradients de traceur, dynamique qui tient compte des propriétés non-locales de la turbulence qui proviennent des champs de vitesse et d'accélération lagrangienne (Hua et al. 1998). Ces résultats ont fait l'objet de la publication de deux articles (Lapeyre et al. 1999, Klein et al. 2000) qui sont inclus en annexe. Nous verrons quels sont les mécanismes physiques de la cascade et nous montrerons comment on peut mieux comprendre celle-ci dans l'espace physique à partir de ces mécanismes.

Le troisième chapitre pose une question sous-jacente à notre étude, celle de la différence entre les traceurs actifs (reliés cinématiquement à l'écoulement) et les traceurs passifs (indépendants de l'écoulement) qui obéissent tous les deux à une équation d'advection identique. En particulier, nous chercherons à savoir si la cascade de vorticité vers les petites échelles est analogue à la cascade de scalaire passif. Dans ce but, nous utiliserons les résultats sur la dynamique des gradients de traceur développés dans le chapitre précédent afin de comparer les deux dynamiques. Ce travail a fait l'objet d'un article soumis (Lapeyre et al. 2001) qui est inclus dans le

¹On notera que cela ne veut pas dire qu'au sens statistique (c'est- dire macroscopique), la diffusivité turbulente classique n'est pas correcte. Cela veut simplement dire que *localement* (c'est- dire microscopiquement), la diffusivité turbulente classique n'est pas applicable.

chapitre.

Enfin, nous nous proposerons de faire une synthèse des résultats obtenus en turbulence tridimensionnelle sur la dynamique de la vorticité et de les comparer à nos résultats sur les gradients de traceur. La propriété de la vorticité en turbulence tridimensionnelle est d'obéir à des équations analogues à celles des gradients de traceur bidimensionnels et une littérature abondante existe sur le sujet. Cela nous permettra de voir que les processus étudiés au cours de la thèse sont assez généraux et existent aussi en turbulence tridimensionnelle. Néanmoins des différences importantes concernant la nature active de la vorticité peuvent apparaître.

Chapitre 1

Cascade turbulente du traceur

1.1 Introduction

Nous avons vu dans l'introduction générale qu'une compréhension fine de la cascade turbulente de traceur est nécessaire pour pouvoir paramétriser les échelles non résolues par les modèles de circulation générale. Nous allons donc présenter les propriétés essentielles de cette cascade de traceur en turbulence bidimensionnelle. Pour cela, nous allons d'abord nous attacher à décrire les aspects généraux de la turbulence en découplant le comportement dynamique de la vorticité et le comportement d'un traceur passif. Puis nous nous attacherons à montrer que l'effet de la turbulence sur un traceur (aussi bien passif qu'actif) se traduit par des propriétés *non-locales* dans l'espace physique qui font que le mélange procède d'une manière radicalement différente du mélange diffusif. Le paradigme utilisé pour montrer ces propriétés sera celui de l'advection chaotique mais les résultats que nous décrirons sont plus généraux que ceux de l'advection chaotique et s'appliquent aussi à des fluides turbulents. Enfin, nous détaillerons les différentes approches pour aborder le problème de la cascade de traceur et nous tenterons de justifier l'approche suivie au cours de la thèse vis-à-vis des autres approches.

1.2 Aspect général de la turbulence bidimensionnelle

1.2.1 Cascades d'énergie et d'ensrophie

1.2.1a Propriétés de conservation

Dans un écoulement purement bidimensionnel et non-divergent, la dynamique non-visqueuse est régie par la conservation de la vorticité ω :

$$\frac{D\omega}{Dt} = \partial_t \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \partial_t \omega + J(\psi, \omega) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega = \Delta \psi ,$$

avec ψ la fonction de courant, $\mathbf{u}$ le vecteur vitesse et $J(\psi, \omega) \equiv \partial_x \psi \partial_y \omega - \partial_y \psi \partial_x \omega$.

La turbulence bidimensionnelle se caractérise par deux propriétés essentielles : en l'absence de termes de forçage et de dissipation, l'énergie cinétique totale $E =$

$\frac{1}{2} \iint \mathbf{u}^2 dx dy$ et l'enstrophie totale $Z = \frac{1}{2} \iint \omega^2 dx dy$ sont conservées :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \iint \mathbf{u}^2 dx dy \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \iint (\nabla \psi)^2 dx dy \right) = 0 , \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \iint \omega^2 dx dy \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \iint (\Delta \psi)^2 dx dy \right) = 0 . \end{aligned}$$

1.2.1b Propriétés spectrales de ces cascades

De ces deux propriétés, découlent une cascade de l'énergie vers les grandes échelles et une cascade de l'enstrophie vers les petites échelles (Kraichnan 1967, Leith 1968, Batchelor 1969). Cela peut se montrer simplement (Fjørtoft 1953). Supposons qu'à l'instant initial, la vitesse se projette sur un seul mode noté K . Plus tard, ce mode va former de nouveaux modes, un plus grand noté k et un plus petit noté l . Les équations de conservation¹ impliquent que

$$\begin{aligned} u_K^2 &= u_k^2 + u_l^2 && \text{pour l'énergie ,} \\ K^2 u_K^2 &= k^2 u_k^2 + l^2 u_l^2 && \text{pour l'enstrophie .} \end{aligned}$$

On peut résoudre ce système et calculer l'énergie et l'enstrophie des deux nouveaux modes. Pour $K = 2$, $k = 3$ et $l = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} u_l^2 &= \frac{5}{8} u_K^2 = \frac{5}{3} u_k^2 , \\ l^2 u_l^2 &= \frac{5}{32} K^2 u_K^2 = \frac{5}{27} k^2 u_k^2 . \end{aligned}$$

Ceci montre que le barycentre de l'énergie se déplace vers les grandes échelles (il correspond à un nombre d'onde 1.75 inférieur à $K = 2$) et que le barycentre de l'enstrophie se déplace vers les petites échelles (nombre d'onde 2.6875 supérieur à $K = 2$).

En plus de déterminer le sens des cascades d'énergie et d'enstrophie, on peut aussi obtenir les pentes des spectres associés. Ces résultats sur les spectres se dérivent généralement à partir de la théorie du domaine inertiel ("inertial range") de Kolmogorov (1941) développée initialement pour la turbulence tridimensionnelle. L'hypothèse sur laquelle repose cette théorie est que le flux à un nombre d'onde donné de la quantité qui subit une cascade (l'énergie ou l'enstrophie) est déterminé par les variables locales dans l'espace spectral (c'est-à-dire au nombre d'onde en question). Si l'on considère une injection d'énergie à une échelle bien définie, alors il y a une cascade inverse d'énergie qui donne un spectre d'énergie en $k^{-5/3}$ (Kraichnan 1967) et une cascade directe d'enstrophie qui donne un spectre d'énergie en k^{-3} et un spectre correspondant d'enstrophie en k^{-1} (Kraichnan 1967, Batchelor 1969). Le schéma de la figure 1.1 récapitule le sens des cascades et les spectres d'énergie associés.

¹Nous avons omis le facteur 1/2 pour les quantités conservées.

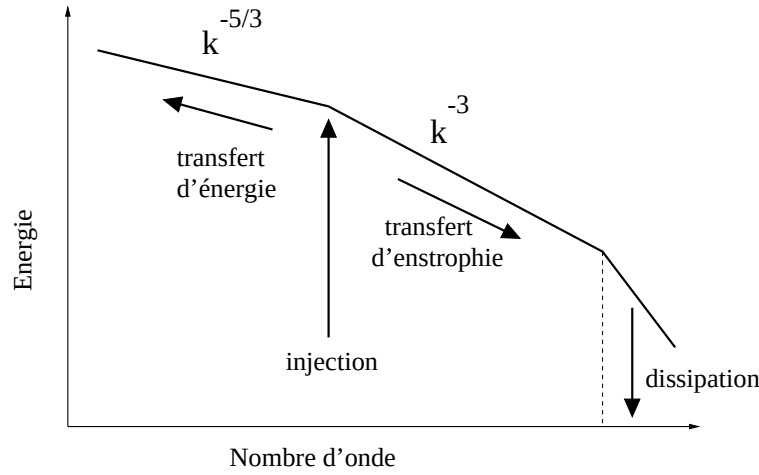


Figure 1.1: Cascades d'énergie et d'ensrophie vues dans l'espace des nombres d'onde (échelle logarithmique).

On peut rappeler brièvement comment se dérive le spectre d'ensrophie en k^{-1} (Kraichnan 1967, Basdevant et al. 1981). Considérons $\Lambda(k)$ le taux de transfert de l'ensrophie $Z(k)$ des nombres d'onde inférieurs à k vers les nombres d'onde supérieurs à k . Par un argument dimensionnel, ce taux de transfert s'exprime comme

$$\Lambda(k) \sim \frac{k Z(k)}{\tau(k)}, \quad (1.1)$$

avec $\tau(k)$ l'échelle de temps caractéristique pour la déformation de structures d'échelles k^{-1} .

En faisant une hypothèse de localité dans l'espace des nombres d'onde, on peut dire que $\tau(k)$ doit être proportionnel à $(k Z(k))^{-1/2}$ (Kraichnan 1967). Cela implique que $\Lambda(k) \sim (k Z(k))^{3/2}$. Or, le taux de cascade d'ensrophie $\Lambda(k)$ doit être indépendant de l'échelle k pour que le spectre soit stationnaire à l'équilibre. Cela entraîne alors que $Z(k) \sim k^{-1}$.

Cependant, il faut revoir cette hypothèse de localité car les échelles de taille k^{-1} sont déformées par toutes les structures de taille supérieure à k^{-1} (Kraichnan 1971). Une estimation de l'échelle de temps inertielle $\tau(k)$ est

$$\tau(k) = \left(\int_{k_0}^k Z(p) dp \right)^{-1/2},$$

avec k_0 l'échelle d'injection.

Pour trouver $Z(k)$, on pose $U(k) = \int_{k_0}^k Z(p) dp$. Celui-ci vérifie $k^{-1} \lambda = U^{1/2} dU/dk$. Le spectre d'ensrophie est alors

$$Z(k) \sim k^{-1} (\log(k/k_0))^{-1/3}.$$

Basdevant et al. (1981) ont montré que l'on pouvait se passer de cette correction logarithmique si on suppose une intermittence spatio-temporelle de la cascade avec

loi d'auto-similarité. Cette intermittence permet de restaurer la localité dans les transferts d'enstrophie à travers les fortes contributions locales dans le calcul de $\tau(k)$ (Basdevant et Sadourny 1983). Cependant, il faut noter que ces modèles auto-similaires sont difficilement applicables à la turbulence bidimensionnelle à cause de la régularité du champ de vitesse (Benzi et al. 1986).

La cascade inverse d'énergie est observée aussi bien dans les simulations numériques (Basdevant et al. 1981, Frisch et Sulem 1984, Smith et Yakhot 1993, Babiano et al. 1995, Babiano et al. 1997, Boffetta et al. 2000a) que dans les expériences de laboratoire (Sommeria 1986, Paret et Tabeling 1998). Le spectre d'énergie est bien en $k^{-5/3}$ et les hypothèses de localité dans l'espace spectral semblent bien vérifiées pour cette cascade inverse (Babiano 1999, Boffetta et al. 2000a).

Le spectre relié à la cascade directe d'enstrophie semble à peu près correspondre au spectre en k^{-3} (Brachet et al. 1988, Borue 1994, Paret et al. 1999, Lindborg et Alvelius 2000) même si d'autres simulations font état de spectres plus pentus (Basdevant et al. 1981, McWilliams 1984, Legras et al. 1988, Santangelo et al. 1989, Ohkitani 1991). Pour les échelles une cascade directe d'enstrophie est attendue, l'hypothèse de localité n'est pas valide (Ohkitani 1990, Maltrud et Vallis 1993); en particulier la correction logarithmique de Kraichnan (1971) ne semble pas être observée (Lindborg et Alvelius 2000). Par contre, il existe bien un régime inertiel avec un transfert d'enstrophie indépendant du nombre d'onde et un transfert d'énergie nul (Basdevant et al. 1981, Ohkitani 1991, Maltrud et Vallis 1993).

Nous reviendrons plus tard sur la non-localité de cette cascade d'enstrophie dans l'espace spectral et sur l'argument qui indique la pente du spectre (section 1.3.4).

1.2.2 Caractéristiques spatiales des structures dynamiques

Nous venons de voir que l'une des caractéristiques spectrales essentielles de la turbulence bidimensionnelle correspond à la cascade d'énergie vers les grande échelles et à la cascade d'enstrophie vers les petites échelles. On peut maintenant examiner les caractéristiques dans l'espace physique de cette turbulence afin de voir les propriétés générales des champs de vitesse et de vorticité.

1.2.2a Description générale de la turbulence dans l'espace physique

La turbulence bidimensionnelle se traduit dans l'espace physique par *l'apparition de structures cohérentes (les vortex) qui sont fortement énergétiques et concentrent de fortes valeurs d'enstrophie* (Basdevant et al. 1981, McWilliams 1984), comme la figure 1.2a le montre. De plus, on observe aussi *la formation de fins filaments avec de fortes valeurs de gradients de vorticité* (figure 1.2b) qui concentrent de fortes valeurs de dissipation d'enstrophie (McWilliams 1984) puisque la dissipation d'enstrophie se fait proportionnellement à la palinstrophie (intégrale du carré des gradients de

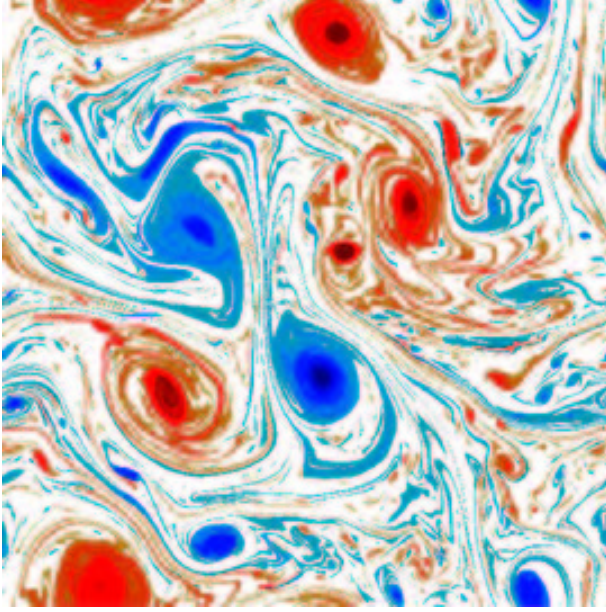


Figure 1.2a :



Figure 1.2b : .

Figure 1.2 : Champs de vorticité (a) et de gradients intenses de vorticité (b) pour la simulation turbulente décrite dans Hua et Klein (1998). Pour la figure (b), on a dessiné les gradients dépassant une certaine valeur.

vorticité) pour un opérateur de diffusion classique en laplacien :

$$\frac{d}{dt} \iint \omega^2 dx dy = -\nu \iint |\nabla \omega|^2 dx dy .$$

En turbulence bidimensionnelle, on observe donc une concentration de l'énergie et de l'enstrophie dans les vortex et une concentration de la palinstrophie dans les filaments.

1.2.2b Les vortex

Nous venons de voir qu'un des aspects fondamentaux de la turbulence bidimensionnelle est l'apparition de vortex, ce qui a été documenté par Basdevant et al. (1981) et McWilliams (1984). On appelle généralement ces vortex des structures cohérentes (Brown et Roshko 1974) puisqu'elles correspondent à des entités reconnaissables avec des composantes ordonnées et localisées en contraste avec l'aspect désorganisé et chaotique de la turbulence. Nous allons reprendre leurs caractéristiques générales (McWilliams 1990b, Dritschel 1993).

Ces structures sont dynamiquement très actives car elles concentrent l'enstrophie et l'énergie. De plus, elles ont un temps de vie très long par rapport à leur temps de retournement (temps mis par une particule pour accomplir un tour du tourbillon). Ce long temps de vie est relié au fait qu'elles correspondent à des états préférés par

rapport à la dynamique non-linéaire, c'est-à-dire que ce sont des structures proches de la stationnarité :

$$J(\psi, \omega) = 0 ,$$

dans un référentiel en rotation avec elles. Cette relation particulière entre la vorticité et la fonction de courant correspond à une réduction des non-l arit s au sens où le terme jacobien non-l aire s'annule. Le champ de vitesse du tourbillon n'a donc pas d'effet d'advection sur la vorticité du tourbillon. De plus, l'enstrophie est exactement conservée dans ce cas, et il ne peut y avoir ni cascade inverse d'énergie ni cascade directe d'enstrophie pour un vortex isolé et stable.

Par ailleurs, les vortex peuvent interagir entre eux très fortement et très brutalement. Des vortex de signe contraire et de même amplitude (en enstrophie totale) vont former des dipôles qui vont se propager très rapidement dans l'écoulement, processus étudié expérimentalement et numériquement par Couder et Basdevant (1986). Des vortex de même signe et de même amplitude peuvent fusionner et former un seul vortex s'ils sont suffisamment proches (Melandar et al. 1988). Par contre quand deux vortex d'amplitude différente se rencontrent, le vortex le plus fort va déformer le vortex le plus faible et ce dernier va se décomposer en filaments (Melandar et al. 1987, Dritschel 1995). Ces différents processus sont accompagnés de l'expulsion de nombreux filaments de vorticité qui vont occuper tout le champ entre les tourbillons comme sur la figure 1.2a.

Que deviennent ces vortex par rapport à la cascade inverse d'énergie et la cascade directe d'enstrophie ?

Les mécanismes d'interaction entre vortex font que seuls les vortex les plus intenses peuvent survivre. Ce mécanisme de regroupement de vortex est, en un certain sens², la manifestation physique de la cascade inverse d'énergie.

Par ailleurs, ces vortex sont relativement peu sensibles à la cascade d'enstrophie, sauf lors d'interactions brutales : leur structure de vorticité reste approximativement conservée et il y a relativement peu de filaments qui sont formés sauf lors d'une rencontre avec un vortex plus intense qui va entraîner la déformation et la filamentation (donc une cascade d'enstrophie) du vortex le plus faible. Babiano et al. (1987) et McWilliams (1990a) ont montré que la suppression des vortex d'un champ turbulent augmente la destruction d'enstrophie par rapport à la situation où les vortex sont toujours présents. On peut donc dire que la vorticité à l'intérieur des vortex ne participe pas à la cascade d'enstrophie vers les petites échelles. Une cascade d'enstrophie vers les grandes échelles pourrait même être possible comme le suggèrent des études de transfert spectral d'énergie et d'enstrophie (Basdevant et al. 1981, Babiano et al. 1987, Maltrud et Vallis 1993, Ohkitani 1991). C'est seulement lorsque les vortex interagissent fortement qu'il y a production importante de filaments de vorticité (donc

²Comme Paret et Tabeling (1998) le remarquent dans leur expérience de laboratoire *forcée*, la fusion des tourbillons n'est peut-être pas la manifestation de la cascade inverse d'énergie. Le lien entre ces tourbillons et la cascade inverse n'est pas encore bien compris : on peut, par exemple, observer une cascade inverse sans aucun tourbillon (Maltrud et Vallis 1993, Celani et al. 2000).

cascade directe d'énstrophie), pouvant aboutir à la destruction des vortex les plus faibles par les plus forts.

Les vortex font partie des structures les plus énergétiques de l'écoulement. Ce sont eux qui gouvernent l'advection ainsi que la déformation du champ de traceur. *Les vortex sont donc les moteurs de la cascade d'énstrophie parce qu'ils correspondent aux structures les plus énergétiques mais ils ressentent peu l'effet de cette cascade.*

1.2.3 Cascade de scalaire passif

Nous venons de voir que l'effet de la turbulence est de créer des vortex qui concentrent l'énergie et de créer des filaments qui concentrent la dissipation d'énstrophie. On peut se demander maintenant comment un champ de scalaire passif va réagir dans un tel écoulement turbulent.

1.2.3a Propriétés de conservation

Considérons un scalaire passif c , c'est-à-dire un scalaire conservé le long des trajectoires lagrangiennes et qui a une dynamique indépendante de celle de la turbulence (c'est-à-dire qui est découplé de la vorticit  ) :

$$\frac{Dc}{Dt} \equiv \partial_t c + J(\psi, c) = 0 .$$

La variance de ce scalaire et sa cor  lation avec la vorticit   sont conserv  es en l'absence de for  age et de dissipation :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint c^2 dx dy &= 0 , \\ \frac{d}{dt} \iint \omega c dx dy &= 0 . \end{aligned}$$

1.2.3b Propri  t  s spectrales de la cascade

   cause de l'advection par l'  coulement turbulent, on s'attend    ce que les taches de traceur soient   tir  es en de longs filaments, de la m  me mani  re que les filaments de vorticit  . Donc, il doit y avoir une cascade de traceur vers les petites   chelles

On peut   tablir la pente du spectre de scalaire passif    partir de la th  orie du domaine inertiel comme pour les spectres d'  nergie et d'  nstrophie. Le taux de cascade de la variance de scalaire passif $\Lambda'(k)$ s'exprime de fa  on analogue au taux de cascade de l'  nstrophie (  q. (1.1)) :

$$\Lambda'(k) \sim \frac{k C(k)}{\tau(k)} , \quad (1.2)$$

avec $C(k)$ la densit   spectrale de la variance de traceur au nombre d'onde k . Pour un flux ind  pendant du nombre d'onde et pour une cascade directe d'  nstrophie³ avec

³Nous nous int  ressons    des   chelles inf  rieures aux   chelles d'injection de traceur et d'  nergie. Batchelor (1959) a montr   que pour un spectre d'  nergie en $k^{-5/3}$, on devait obtenir un spectre de variance de traceur en $k^{-5/3}$.

un spectre en k^{-1} , on obtient un spectre de traceur en k^{-1} en utilisant l'hypothèse de localité pour le calcul de $\tau(k)$. Si on utilise le spectre non-local de Kraichnan (1971), on obtient des spectres identiques pour l'enstrophie et la variance de traceur. Le spectre théorique de traceur a aussi été dérivé pour d'autres types de spectres (Vallis 1993). En particulier, le spectre en k^{-1} semble générique si le spectre d'enstrophie est plus pentu que k^{-1} . Ce spectre en k^{-1} avait été précédemment dérivé par Batchelor (1959) en s'appuyant sur l'évolution des nombres d'onde dans un champ de déformation supposé stationnaire.

Un autre type de spectre peut être obtenu si l'on considère une formation de gradients très intenses quasi-infinis : pour des fronts de traceur placés de façon aléatoire, Saffman (1971) a montré que l'on obtenait un spectre théorique en k^{-2} . Ce spectre ne tient pas compte des effets dissipatifs à petite échelle. Il suppose juste que de nombreuses discontinuités sont présentes dans le champ de traceur, ce qui pourrait expliquer certaines observations atmosphériques (Ngan et Shepherd 1997b). On peut noter que cet argument peut aussi s'appliquer à la vorticit  .

Les exp  riences de turbulence 2D avec traceur passif montrent que le spectre de variance de traceur a une phase transitoire en k^{-2} (Brachet et al. 1988, Pierrehumbert 1991) puis une phase stationnaire en k^{-1} (Babiano et al. 1987, Ohkitani 1991, Pierrehumbert 1991, Oetzel et Vallis 1997, Jullien et al. 1999). La phase transitoire en k^{-2} s'observe lorsque les conditions initiales du traceur sont    des   chelles suffisamment grandes par rapport    l'  chelle diffusive et que le champ de vitesse correspond aussi    des   chelles assez grandes ; cela permet de d  velopper dans le champ de traceur de tr  s forts gradients rectilignes (d'o   le spectre interm  diaire) qui s'empileront les uns contre les autres et qui diminueront d'intensit      cause de la diffusion.

Il faut cependant pr  ciser que le spectre n'est pas l'  l  ment essentiel de la cascade car ce sont plut  t les phases qui sont importantes. En effet, les structures sont plus associ  es aux relations de phase des composantes spectrales qu'   la forme de leurs amplitudes (Armi et Flament 1985, Tsinober 1998b). En particulier, Armi et Flament (1985) ont montr   que le changement de la forme du spectre pour un champ de traceur donn   (la temp  rature de surface au large de la Californie avec la pr  sence fronts et de tourbillons) ne fait que modifier la signature qui distingue les structures coh  rentes des structures de petite   chelle : plus le spectre est plat, plus les motifs petite   chelle associ  es (fronts, c'est-  -dire forts gradients de traceur) sont pr  sents. Lorsque le spectre est plus pentu, ces motifs petite   chelle sont plus liss  s (correspondant    une diminution des gradients associ  s) mais sont toujours pr  sents. Ces structures spatiales sont donc plut  t reli  es aux relations de phase des composantes spectrales.

1.2.3c Propri  t  s de la cascade dans l'espace physique

Comme nous l'avons vu pour les exemples de l'introduction g  n  rale, un champ de traceur turbulent d  veloppe tr  s rapidement des petites   chelles en formant de fins filaments ainsi que des forts gradients de la m  me fa  on que les structures filamenteuses de la vorticit  . Par ailleurs, le scalaire passif peut   tre pi  g      l'int  rieur des tourbillons coh  rents et s'enrouler en forme de spirale    cause de la rotation diff  rentielle qui r  gne    l'int  rieur du tourbillon.

Comme l'ont compris Obukhov (1949), Corrsin (1951) ainsi que Batchelor (1959), la formation de filaments et d'intenses gradients s'explique en termes de transfert entre les différentes composantes de Fourier de la distribution de scalaire passif puisque l'on peut montrer que l'équation d'évolution de ces nombres d'onde est similaire à l'équation pour les gradients (nous développons cette analogie en annexe A.4).

Ce processus de formation de petites échelles dans le champ de traceur s'explique par l'effet de la déformation. Cet effet de déformation provient de l'advection différentielle (décrite par le tenseur de gradient de vitesse $\nabla \mathbf{u}$) qui peut cisailer, étirer ou enrouler une tache de traceur. Ces différents effets auront pour conséquence d'accroître ou de réduire les gradients de traceur. Statistiquement, dans le cas non-diffusif, on observe un accroissement des gradients ce qui correspond à la manifestation physique de la cascade vers les petites échelles. Quand la diffusion entre en jeu, on observe une réduction des gradients (Brachet et al. 1988) et le traceur a tendance à s'homogénéiser en l'absence d'injection (par conservation de la moyenne de traceur et dissipation de la variance).

1.2.4 Rôle des différentes échelles dans la cascade turbulente de traceur

Nous venons de détailler quelques aspects essentiels de la turbulence qui seront en rapport avec la cascade de traceur vers les petites échelles.

Les deux propriétés essentielles de la turbulence bidimensionnelle sont la conservation de l'énergie et de l'ensrophie. Il en résulte une cascade inverse de l'énergie vers les grandes échelles et une cascade directe de l'ensrophie vers les petites échelles. Dans l'espace physique, il y a émergence de vortex, structures cohérentes très énergétiques. Par ailleurs, la cascade de traceur passif ainsi que la cascade d'ensrophie vers les petites échelles se matérialisent par la formation de fins filaments et la production de forts gradients.

L'énergie cinétique est contenue en majeure partie à grande échelle par le mécanisme de cascade inverse, ce qui signifie que l'advection des structures de traceur est principalement due à ces structures grande échelle. En particulier, l'existence des vortex en turbulence bidimensionnelle va être responsable de la cascade de traceur vers les petites échelles.

L'étude de la cascade de traceur (que ce soit vorticité ou scalaire passif) vers les petites échelles devra prendre en compte le fait que ce sont les structures moyenne et grande échelle qui gouvernent la cascade et que cette cascade se révèle par la formation de forts gradients de nature filamentaire (cf. les fils de la figure 1.2b). Nous allons maintenant voir quelles sont les implications de la concentration de l'énergie à grande échelle pour la cascade de traceur.

1.3 Dynamique non-locale de la cascade de traceur

Afin de caractériser la dynamique de la cascade de traceur dans un écoulement turbulent, nous allons examiner les principaux traits de cette cascade. Nous avons

vu que le moteur de la cascade, c'est-à-dire l'advection, est dominé par les grandes échelles et ce facteur va être très important pour la dynamique de la cascade de traceur.

Les caractéristiques dynamiques de la cascade de traceur dans un écoulement turbulent ont été particulièrement mises en évidence dans le cas d'écoulement simples, périodiques temporellement et non-turbulents, reliés à ce qu'on nomme "l'advection chaotique". Nous allons décrire les propriétés de la cascade dans de tels écoulements simplifiés afin de mieux mettre en évidence le caractère non-local de cette dynamique.

Il faut cependant rappeler que l'advection chaotique est différente de l'advection due à la dynamique turbulente. Cela est par exemple apparent dans l'expérience de Rothstein et al. (1999) : pour un écoulement chaotique, les trajectoires lagrangiennes décrivent un canevas spatial bien déterminé qui n'évolue pas dans le temps (ou qui est périodique), alors que pour le même écoulement mais légèrement turbulent, un tel canevas disparaît car la complexité est à la fois spatiale et temporelle comme le souligne Aref (1999).

1.3.1 Processus physique d'advection chaotique

1.3.1a Description de la cascade dans l'espace physique

Aref (1984) a été l'un des premiers à montrer qu'un écoulement bidimensionnel très simple dans sa structure eulérienne peut engendrer des trajectoires complexes pour les particules fluides. De même, un champ de scalaire passif non-diffusif peut être déformé de façon très complexe, ce qui a pour effet de le transférer vers des échelles arbitrairement petites. Un exemple de cette advection chaotique est donné par la figure 1.3 qui montre l'évolution de particules formant initialement une tache de traceur dans un écoulement avec une structure grande échelle (une onde progressive⁴) et une perturbation d'échelle plus petite, périodique en temps (Pierrehumbert 1991). Dans cet écoulement, la fonction de courant dans le repère de l'onde s'écrit

$$\psi = \sin(x) \sin(y) + \frac{y}{2} + 0.15 \sin(x - 0.3t) \sin(2y) .$$

La fonction de courant de l'écoulement de base est représentée sur la figure 1.4. On peut voir un jet qui fait un méandre ainsi que deux cellules de recirculation au Nord et au Sud de celui-ci.

Tout d'abord, la tache de traceur a une évolution relativement lente, étant étirée le long d'une direction par le champ de déformation (figure 1.3 à $t = 2, 3$). Puis les particules qui constituent cette tache sont advectées brusquement et très rapidement autour de l'une des cellules de recirculation de l'écoulement de base ($t = 4, 5$). Ces particules remplissent toute une région avec une grande efficacité et se répandent petit à petit à travers cette région ($t = 6, 7$) alors qu'il n'y a pas de mélange diffusif classique dans le modèle. Bien que le terme "mélange" soit associé à des processus irréversibles, on peut néanmoins employer le terme de "mélange chaotique" pour caractériser cette advection des particules fluides qui redistribue le traceur dans toute la région chaotique et permet au mélange d'être beaucoup plus efficace.

⁴En anglais, "travelling wave".

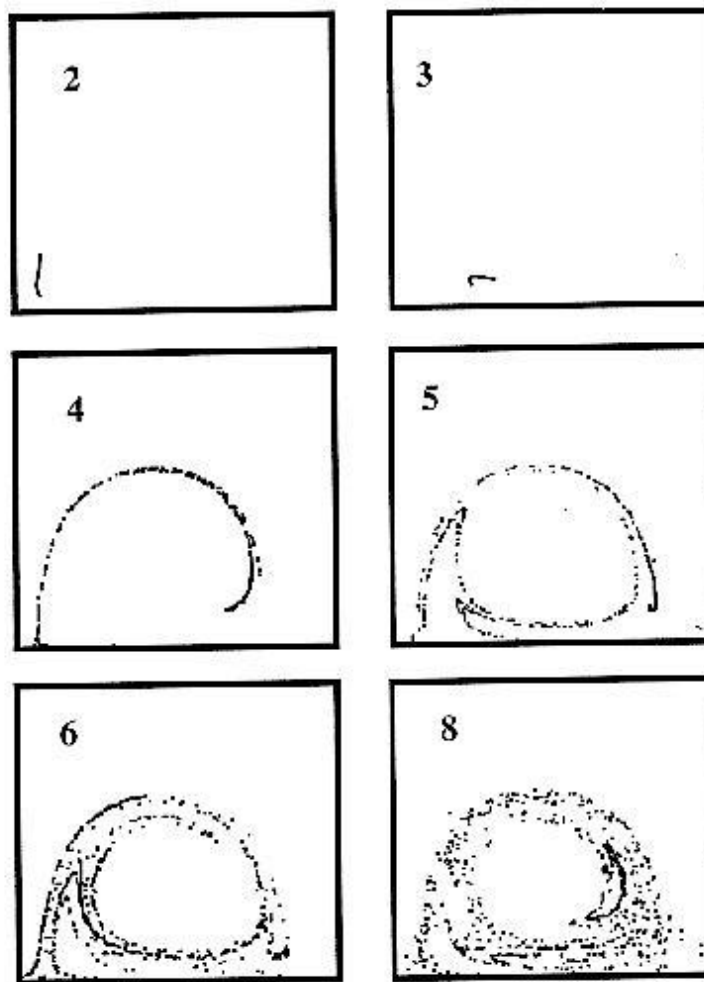


Figure 1.3: Évolution de particules formant initialement une tache de traceur dans un écoulement grande échelle avec advection chaotique. Tiré de Pierrehumbert (1991) .

À partir de cette observation, on peut faire plusieurs remarques. Premièrement, l'aspect fondamental de cette advection chaotique est que *c'est l'advection lagrangienne et non pas eulérienne qui contrôle le mélange*. Dans ce genre d'écoulement, on a bien souvent une expression analytique simple de la vitesse eulérienne tandis que l'évolution des trajectoires est très complexe. La deuxième remarque est que des particules initialement voisines ont des trajectoires radicalement différentes et la distance de séparation croît exponentiellement pour ces particules voisines. On le voit ici par le fait que les particules qui constituent la tache initiale de traceur se dispersent très rapidement. Par ailleurs, *cette advection chaotique procède de manière non-locale dans l'espace physique* : les particules ont été advectées à travers toute une région d'échelle assez grande tandis qu'initialement elles se déplaçaient de manière plus locale.

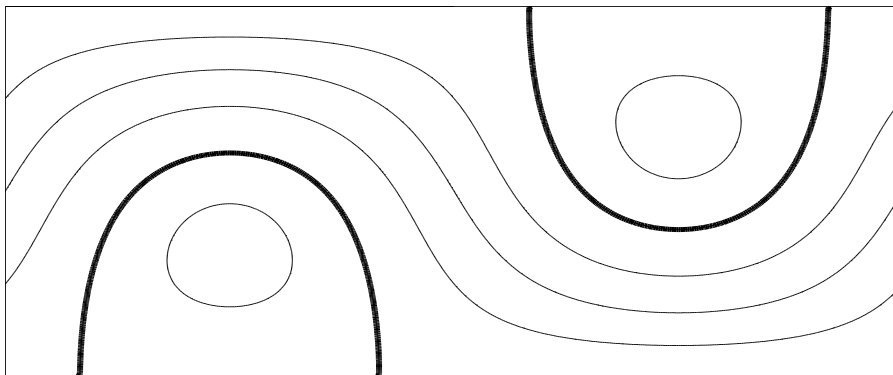


Figure 1.4: Fonction de courant de l'écoulement de base de l'onde progressive dans le référentiel de l'onde. En gras, on a marqué les séparatrices qui intersectent les axes aux points de stagnation.

1.3.1b Relation avec les systèmes dynamiques et le chaos

Les processus d'advection chaotique peuvent se comprendre à travers la théorie des systèmes dynamiques. Afin d'examiner l'advection chaotique, considérons l'équation des trajectoires lagrangiennes $x(t)$ et $y(t)$:

$$\frac{Dx}{Dt} = -\partial_y \psi, \quad \frac{Dy}{Dt} = \partial_x \psi,$$

où ψ est la fonction de courant. Cette équation est en fait un système dynamique hamiltonien avec la fonction de courant ψ comme hamiltonien du système. Examinons les propriétés générales de ce système.

Tout d'abord, si la fonction de courant est indépendante du temps, le système est intégrable. Les mouvements se font le long des isolignes de la fonction de courant c'est-à-dire

$$\frac{D\psi(x(t), y(t))}{Dt} = 0.$$

Le système n'est pas chaotique et les trajectoires sont régulières et des particules initialement proches voient leur distance de séparation croître lentement ; le mélange sera alors faible.

Si maintenant la fonction de courant possède des lignes de courant fermées et bornées par une séparatrice qui termine en des points de stagnation (comme sur la figure 1.4) et si l'on ajoute une perturbation temporellement périodique à cette fonction de courant, on peut s'attendre à ce que les trajectoires soient plus complexes et parcourent tout le fluide. C'est bien ce qui se passe pour l'écoulement de la figure 1.3. Les particules qui se sont retrouvées au niveau du point de stagnation de la fonction de courant ont été très vite dispersées à travers toute une région chaotique. On observe alors des régions où l'advection fait se rencontrer des particules très éloignées initialement et une tache de traceur sera redistribuée dans toute cette zone chaotique. Cette zone chaotique se situe dans la périphérie proche de la séparatrice de

la fonction de courant non-perturbée. Il peut néanmoins exister des îlots de régularité (comme l'intérieur des lignes de courant fermées de l'écoulement de base de la figure 1.4) où le transport se fait de manière laminaire.

Le mélange dans la région chaotique se fait plus en disséminant le traceur dans toute la région chaotique tandis que le mélange dans les îlots de régularité (ou autrement appelés tores de KAM⁵) se fait plus le long de contours fermés.

On voit donc que *c'est l'écoulement grande échelle qui gouverne la cascade vers les petites échelles* (Pierrehumbert 1991) : la géométrie de la région de mélange chaotique (c'est-à-dire la région où se répandent très rapidement les particules) ainsi que la géométrie des îlots de régularité sont fixées par les lignes de courant grande échelle. Les motifs petite échelle de l'advection déterminent seulement l'extension spatiale de la région chaotique.

1.3.2 Exemple du vortex dans un champ de déformation

Ces propriétés de l'advection chaotique se manifestent aussi bien pour les scalaires passifs que pour la vorticité. Nous allons examiner un exemple où c'est la vorticité qui est associée à l'aspect non-local de la cascade de traceur dans l'espace physique.

L'exemple que nous allons considérer est celui d'un vortex soumis à une déformation extérieure (Mariotti et al. 1994, Paret et Tabeling 1997, Legras et al. 2001) car cela permet de mieux appréhender les propriétés de mélange associées à ces structures. Les processus qui prennent place sont génériques : on les retrouve dans d'autres situations comme le tourbillon polaire stratosphérique (Polvani et Plumb 1992) ou la formation de la tropopause (Ambaum 1997). Ils permettent de comprendre comment les petites échelles sont influencées par les grandes échelles.

1.3.2a Description

La figure 4 à la page 14 montre un tourbillon soumis à l'effet d'un cisaillement externe. On observe que le vortex se déforme à cause de ce cisaillement externe et qu'il tente de s'équilibrer avec ce champ de déformation. Il en résulte deux phénomènes complémentaires : expulsion de filaments de vorticité et intensification du gradient de vorticité le long du bord du vortex, phénomènes qui contribuent à l'érosion du tourbillon. Voyons en détail ces phénomènes.

1.3.2b Filamentation

Le premier effet du cisaillement externe sur le vortex est d'étirer le vortex et d'entraîner une partie du matériel du vortex très loin de lui. Ce matériel est expulsé hors du vortex en de fins filaments comme on peut le voir sur la figure 4 à la page 14. Le cœur du tourbillon n'est pas affecté par ce processus et les isolignes de vorticité restent elliptiques (Legras et al. 2001). Le processus de filamentation est dû au fait que l'écoulement total possède des points de stagnation (ou points critiques) qui vont

⁵Ces tores peuvent être reliés au théorème de Kolmogorov, Arnold et Moser qui montre l'existence de trajectoires stables pour certaines perturbations de systèmes hamiltoniens. Pour plus de détails sur le théorème, voir par exemple le livre de Tabor (1989).

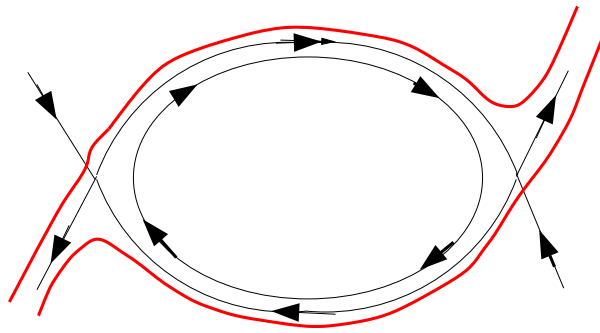


Figure 1.5: Schéma d'un vortex dans un champ de cisaillement : en noir, la fonction de courant dans le repère du vortex ; en rouge, la vorticité. À l'intérieur du tourbillon, la vorticité reste elliptique. Par contre à l'extérieur, les isolignes de vorticité s'ouvrent par la création de filaments au niveau des points selles de la fonction de courant. De plus, des filaments sont expulsés loin du tourbillon.

entrer à l'intérieur du vortex et qui vont produire l'éjection de filaments (Polvani et Plumb 1992, Legras et al. 2001), comme sur le schéma de la figure 1.5. Les filaments ainsi produits ne restent généralement pas localement dans la région de filamentation du tourbillon mais sont advectés à travers l'écoulement comme on l'observait aussi pour l'onde progressive (Mariotti et al. 1994).

1.3.2c Intensification des gradients de bord

Associée à ce processus de filamentation, on observe aussi une intensification des gradients de bord (voir la coupe du vortex sur la figure 4 à la page 14). En effet, par conservation de la vorticité et la non-divergence de la vitesse, l'aire entre deux contours de vorticité est conservée ; si le contour extérieur développe un filament et que le contour intérieur n'évolue pas, l'aire du filament est "enlevée" de l'aire entre les deux contours ; cela va entraîner un resserrement des deux contours donc un raidissement des gradients de bord. Par ailleurs, les filaments précédemment créés s'enroulent autour du tourbillon mais pas directement le long du bord. Les gradients de bord ne peuvent donc pas être réduits par la production de petites échelles (c'est-à-dire de filaments).

1.3.2d Impact sur les propriétés de mélange

Examinons maintenant les propriétés de mélange reliées à ce vortex. On s'intéresse en particulier à l'effet de la structure grande échelle (le vortex sans ses filaments) sur le mélange petite échelle (les filaments), sans se préoccuper d'une diffusion moléculaire (plutôt en vue de paramétriser le mélange petite échelle). Le vortex possède trois types de régions aux propriétés très différentes : un cœur relativement bien mélangé et préservé de tout contact avec l'extérieur, deux régions d'éjection de filaments et deux régions d'intenses gradients de bord.

Au niveau des points d'éjection de filaments, il y a formation de nombreux fi-

laments. Ces zones témoignent d'un mélange de vorticité à petites échelles (ou flux turbulent de vorticité) entre le vortex et l'extérieur. Cela aboutit à une zone relativement bien mélangée autour des points de stagnation.

Par contre, au niveau des gradients de bord intenses, il n'y a pas de mélange direct entre l'intérieur du vortex et l'extérieur. Tout au plus, les filaments engendrés dans les régions de filamentation peuvent se retrouver piégés dans la cellule de recirculation juste à l'extérieur du vortex (Elhmaïdi et al. 1993, Legras et al. 2001). Dans ces régions de gradients intenses, il n'y a donc pas de mélange à petites échelles mais, au contraire, une véritable barrière au transport.

On voit donc qu'il y a deux types de régions de gradients grande échelle autour des vortex : le premier est associé à une barrière au transport (là où les gradients s'intensifient) tandis que le second est associé à la région d'expulsion de filaments et de mélange actif (il y a bien un gradient grande échelle mais il sera lissé par le mélange petite échelle). De plus, *la production de petites échelles est entièrement contrôlée par l'écoulement grande échelle* de la même manière que dans l'exemple de l'onde progressive.

De ces deux remarques, on peut déduire que l'hypothèse de localité dans l'espace physique de la théorie de paramétrisation de mélange classique n'est pas valide ici puisque de forts gradients ne sont pas nécessairement associés à un fort mélange turbulent. Cela est dû en particulier à l'aspect non-local de l'advection chaotique qui crée des structures filamentaires à certains endroits (donc développe le mélange dans ces régions) mais crée aussi des barrières au mélange qui sont reliées aux premières par le même mécanisme dynamique (l'érosion du tourbillon).

À partir de cet exemple réaliste pour la turbulence, nous voyons que *les processus qui ont cours pour l'advection chaotique ont aussi cours pour la turbulence bidimensionnelle* et la cascade de vorticité (la formation de filaments de vorticité et le raidissement des gradients de bord) procède de façon analogue à la cascade de scalaire passif.

Un point essentiel pour mieux comprendre le mélange dû à cette advection chaotique est de comprendre ce qui distingue les régions de gradients intenses et les régions de filamentation (qui sont aussi associées à de forts gradients pour la structure grande échelle), deux processus qui sont reliés à la structure grande échelle de l'écoulement.

1.3.3 Différence entre mélange chaotique et mélange diffusif

Nous avons vu précédemment comment agissait le mélange chaotique. Une tache de traceur commence à remplir les grandes échelles pour éliminer petit à petit ses inhomogénéités de petite échelle. Comment procède le mélange dû à la diffusion moléculaire? Celle-ci élimine d'abord les inhomogénéités de petites échelles puis répand la tache de traceur, d'échelle en échelle vers les plus grandes échelles, c'est-à-dire *dans le sens opposé du mélange chaotique. La non-localité de l'advection chaotique est donc à opposer à la localité du mélange par processus diffusif* (Pierrehumbert 1991).

Cette différence de processus d'homogénéisation se traduit par une différence d'échelles de temps caractéristiques du mélange chaotique et du mélange diffusif.

Pour une diffusivité κ , une inhomogénéité à l'échelle d sera supprimée en temps $T_{diffusion} = d^2/\kappa$. Le temps typique du mélange chaotique dépend de la taille de la région chaotique L et des exposants de Liapounov σ (c'est-à-dire le taux exponentiel d'éloignement de particules fluides initialement voisines) : $T_{chaos} = \frac{1}{\sigma} \log(L/d)$ par définition des exposants de Liapounov. On voit donc que la dépendance du temps caractéristique en fonction de l'échelle de l'inhomogénéité est radicalement différente.

Les natures spatiales et temporelles des mélanges diffusif et chaotique impliquent que *le mélange chaotique n'est pas représentable localement par les opérateurs classiques de diffusion turbulente qui se fondent sur un mélange de type diffusion moléculaire.*

1.3.4 Non-localité de la cascade dans l'espace spectral

Après avoir vu comment procédait la cascade dans l'espace physique, on peut s'intéresser à son aspect dans l'espace spectral.

Nous avons vu dans les sections 1.2.1b et 1.2.3b que les spectres de traceur (vorticité et scalaire passif) s'obtenaient généralement à partir d'une hypothèse de localité dans l'espace des nombre d'onde. Cette hypothèse correspond au fait que ce sont les quantités locales (c'est-à-dire au nombre d'onde donné) qui déterminent les spectres.

L'hypothèse de localité dans l'espace des nombres d'onde a été examinée par Ohkitani (1990) et Maltrud et Vallis (1993). Ohkitani (1990) montre que les triades correspondant à une forte production de palinstrophie sont très allongées, c'est-à-dire qu'elles correspondent à des interactions de deux nombres d'onde d'échelles très différentes. Par ailleurs, Maltrud et Vallis (1993) montrent à travers une étude similaire des flux d'énergie et d'énstrophie que ce sont les structures grande échelle (en particulier, les vortex) qui sont responsables de la cascade de l'énstrophie à petite échelle. Ceci contredit donc l'hypothèse de localité pour la cascade directe d'énstrophie et cela confirme les observations que nous venons de faire sur la cascade et sur l'importance des structures énergétiques (les tourbillons) dans cette cascade.

On peut reprendre l'argument de Kraichnan de la section 1.2.1b pour déterminer les spectres, en utilisant le fait que c'est l'écoulement grande échelle qui gouverne la cascade (Pierrehumbert 1991). Le temps caractéristique $\tau(k)$ pour la déformation de structures d'échelles k^{-1} correspond à la déformation due aux structures grandes échelles. On peut donc dire que $\tau(k)$ sera indépendant de k pour les grands nombres d'onde (sauf à l'échelle de la diffusion); on obtient alors un spectre en k^{-1} à partir de l'équation (1.2), en utilisant une hypothèse de non-localité extrême à l'opposé de l'hypothèse de localité de Kraichnan (1967). Dans la théorie de Kraichnan, l'indépendance de $\tau(k)$ par rapport à k est montrée a posteriori alors qu'on la pose ici a priori. Cette indépendance a bien été observée (Ohkitani 1991, Oetzel et Vallis 1997).

1.3.5 Conclusions

Nous venons de voir que *la cascade de traceur est contrôlée essentiellement par les structures grande échelle en turbulence bidimensionnelle. La cascade se matérialise particulièrement par deux types de régions : dans certaines régions de l'espace physique (notamment près des points critiques de l'écoulement), il y a un processus de*

filamentation, c'est-à-dire une création de structures d'épaisseur très mince (donc de petite échelle). Cela correspond à des régions de fort mélange. Il existe aussi de véritables barrières au transport qui correspondent à des gradients de traceur très intenses. Ces forts gradients peuvent provenir du même mécanisme que la filamentation comme l'exemple d'un tourbillon soumis à une déformation externe le montre mais ils peuvent aussi en être découplés.

La non-localité dans l'espace physique se manifeste en créant de telles régions et en les associant aux propriétés grande échelle de l'écoulement. Il est impossible d'avoir une vision locale des phénomènes de transport et de mélange car toute la structure de l'écoulement rentre en jeu. Ces processus de mélange chaotique prennent aussi place dans des écoulements turbulents bidimensionnels (par exemple pour l'évolution des tourbillons) parce que l'énergie de ces écoulements est concentrée aux échelles grandes et intermédiaires.

Un des objectifs de la thèse est d'essayer de caractériser les régions qui ont des propriétés de cascade différente et d'améliorer notre compréhension des mécanismes qui produisent cette cascade. De plus, les observations indiquent que les propriétés de cascade sont capturées par la structure grande échelle de la turbulence. Afin de pouvoir proposer une résolution du problème, nous tenterons de tirer partie de cette propriété.

1.4 Méthodes d'approche du mélange de traceur

Nous venons de voir les caractéristiques essentielles de la cascade de traceur. Nous pouvons maintenant discuter de la méthode d'approche à suivre pour étudier cette cascade. Nous allons donc passer en revue les différentes méthodes d'approche qui existent pour le problème.

L'étude de la cascade peut s'interpréter à travers la théorie des systèmes dynamiques comme nous l'avons montré brièvement pour le mélange chaotique. Les livres d'Ottino (1989) et de Guckenheimer et Holmes (1983) mettent en lumière les différentes approches physiques et techniques mathématiques pour étudier le mélange chaotique. Nous allons détailler et discuter quelques unes de ces approches.

1.4.1 Variétés instables

Une des approches en vogue à l'heure actuelle est fondée sur la théorie du mélange chaotique dans des écoulements simples et sur les propriétés géométriques de l'écoulement associées à ce mélange. Cette géométrie de l'écoulement peut se définir à travers des variétés stables et instables reliées aux points de stagnation de l'écoulement (ou plutôt à la généralisation de ces points dans le cas d'un écoulement non stationnaire).

1.4.1a Dynamique des lobes

Considérons un écoulement stationnaire qui possède des points de stagnation, par exemple l'onde progressive de la figure 1.4. Nous voyons sur cette figure que l'écoulement est séparé entre l'intérieur des tourbillons et le jet ; la ligne séparatrice est l'isoligne de la fonction de courant qui passe par les points de stagnation. Si on

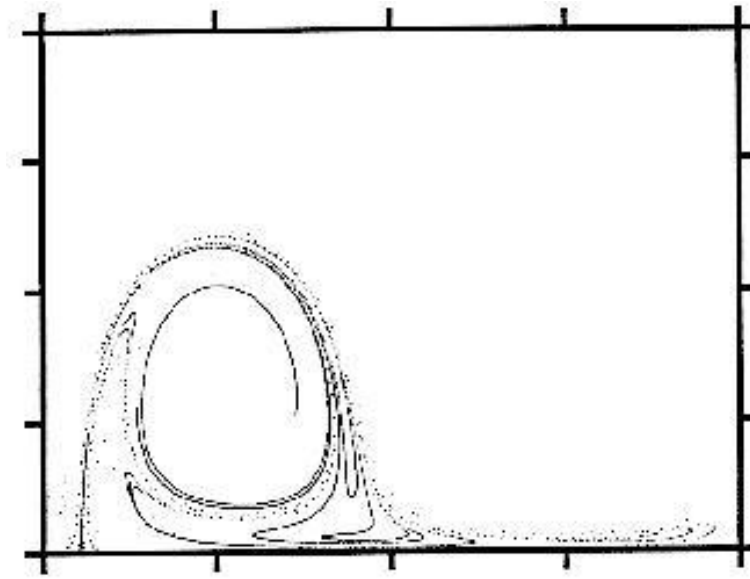


Figure 1.6: Variété instable pour l'onde progressive. Tiré de Pierrehumbert (1991)

perturbe l'écoulement et que l'on examine les trajectoires (figure 1.3), on s'aperçoit que les trajectoires semblent suivre un motif géométrique qui suit plus ou moins la séparatrice. En fait, ce motif géométrique est persistant pour un écoulement laminaire, ce qui a été mis en évidence récemment par Rothstein et al. (1999) dans une expérience de laboratoire et précédemment prédit par Pierrehumbert (1994).

L'existence de propriétés d'invariance dans l'évolution de lignes matérielles (c'est-à-dire des filaments de traceur) est reliée aux variétés stables et instables des points périodiques hyperboliques qui contrôlent la dynamique globale. Que sont ces objets ?

Supposons que l'écoulement de base possède un point de stagnation hyperbolique (c'est-à-dire un point où la vitesse s'annule). Au niveau de ce point, on peut définir⁶ une direction stable et une direction instable de l'écoulement, c'est-à-dire une direction pour laquelle deux particules initialement voisines vont converger ou se séparer exponentiellement ; ces directions sont fixées par les vecteurs propres de la hessienne de la fonction de courant (en fait, le tenseur de gradient de vitesse). Pour un écoulement stationnaire comme l'onde progressive, cela correspond aux directions indiquées par les séparatrices (figure 1.4).

La théorie des systèmes dynamiques nous dit qu'il existe des courbes particulières qui partent le long de ces directions (Guckenheimer et Holmes 1983, Wiggins 1992), appelées variétés ("manifold" en anglais) stable et instable reliées au point de stagnation. Ces variétés vont servir de canevas géométrique pour le développement du mélange chaotique car il suffit alors de connaître seulement ces variétés et on peut alors déterminer comment va s'organiser le transport dans l'écoulement. On peut voir ce phénomène en comparant les figures 1.6 et 1.3.

⁶Le point est hyperbolique si le système linéaire associé (c'est-à-dire la matrice ∇u) a deux valeurs propres de signe opposé.

Le théorème de Melnikov qui s'applique à une faible perturbation d'un système intégrable (comme notre écoulement perturbé) permet alors d'étudier le transport dans un tel système à partir d'une dynamique de "lobes" (Wiggins 1992). La dynamique des lobes est fondée sur l'idée de tourniquets ("turnstiles") pour l'advection : les lobes, c'est-à-dire des régions délimitées par les variétés stables et instables sont transportés de part et d'autre de la variété instable qui constitue une sorte de frontière pour le mélange. En effet, pour traverser cette variété instable, il faut nécessairement passer à l'intérieur d'un de ces lobes. On peut alors facilement calculer le flux advectif qui rentre par cette frontière en suivant les trajectoires à travers une suite de portes à tambour ("revolving doors") sur les frontières.

Cette approche a été utilisée dans plusieurs écoulements périodiques ou faiblement apériodiques et permet de déterminer le transport dans un jet avec des méandres (Duan et Wiggins 1996, Miller et al. 1997, Malhotra et al. 1998), pour le problème de l'onde progressive (Malhotra et Wiggins 1998) ou pour le problème des niveaux critiques de l'onde de Rossby (Ngan et Shepherd 1997a).

Cependant, on peut faire quelques objections à cette approche. La première est que la théorie des lobes ne permet pas réellement de comprendre le mélange dans sa complexité puisqu'elle décrit le mélange en terme de transport entre deux régions (intérieur/extérieur) et que ces définitions d'intérieur/extérieur sont toutes relatives. Un exemple de ce problème est donné par Koh et Plumb (2000) dans l'étude des variétés associées à un tourbillon de vortacité uniforme. Les variétés ne sont pas localisées au même endroit que le bord du tourbillon et on ne peut pas diagnostiquer à partir de l'étude du transport des lobes combien de fluide est sorti ou rentré du tourbillon. Ces variétés ne sont donc pas reliées aux barrières au transport comme on pourrait le croire a priori.

De plus, cette théorie repose sur le théorème de Melnikov qui nécessite des systèmes proches de l'intégrabilité. Or les écoulements qui nous intéressent (les écoulements atmosphériques et océaniques) sont turbulents et ne sont pas en général des faibles perturbations de systèmes intégrables. Ils ne sont d'ailleurs pas non plus périodiques ou faiblement apériodiques. Koh et Plumb (2000) ont montré qu'une mauvaise application des variétés (par exemple, en sélectionnant le motif quasi-périodique de l'écoulement) peut conduire à des résultats non-pertinents. En un certain sens, cela est dû au fait que l'énergie a un spectre plein en turbulence alors que les écoulements d'advection chaotique ont une structure géométrique de base (c'est-à-dire non-perturbée) relativement simple (donc un spectre d'une certaine façon très localisé autour d'un certain nombre d'onde).

1.4.1b Variétés de temps fini

Afin d'étendre les résultats précédents à des cas plus réalistes, il faut revoir la notion de variété, en tenant compte de l'évolution temporelle de l'écoulement (et donc de l'évolution des points de stagnation et des variétés associées). Un premier pas dans ce sens a été réalisé par Malhotra et Wiggins (1998) et Haller et Poje (1998) qui introduisent un concept de stabilité ou d'instabilité de lignes matérielles

en temps fini. Cela permet de définir des variétés invariantes de temps fini, qui seront associées à des trajectoires hyperboliques transitoires. Un théorème mathématique donne alors les conditions d'existence des variétés de temps fini pour un point de stagnation instantané donné. Il est intéressant de voir que cette vision rejoint les résultats qualitatifs d'Okubo (1970) et de Weiss (1981) que nous développerons à la section 2.2.1 : les variétés instables correspondent aux trajectoires qui restent hyperboliques (au sens d'Okubo-Weiss⁷) pendant un temps assez long. La condition d'application du théorème est similaire (mais plus rigoureuse mathématiquement) à l'hypothèse d'Okubo-Weiss dont nous allons parler plus tard, à savoir que les vecteurs propres du tenseur de gradient de vitesse soient lentement variables. Cela provient de la définition des variétés reliées aux problèmes de dispersion de particules et d'évolution des gradients de traceur.

Ces résultats théoriques ont été appliqués à l'étude des doubles gyres océaniques dans un bassin (Poje et Haller 1999) ainsi qu'en turbulence bidimensionnelle (Poje et al. 1999, Haller et Yuan 2000). Dans ce dernier cas, Poje et al. (1999) observent que pour des dipôles, leur notion de variétés de temps fini n'est pas valable car le point de stagnation a un mouvement trop rapide. De façon plus générale, cette théorie devrait donner des éléments utiles dans des écoulements relativement stationnaires (au sens lagrangien) mais les hypothèses sur lesquelles elle repose ne devraient pas être valides dans *tout un champ turbulent*, puisque l'on sait que le critère d'Okubo-Weiss ne l'est pas (Basdevant et Philipovitch 1994, Hua et Klein 1998).

1.4.2 Exposants de Liapounov

Une autre méthode pour estimer le mélange chaotique consiste à évaluer les propriétés de dispersion d'un ensemble de particules qui subissent le mélange chaotique. Ces propriétés peuvent être vues à travers les exposants de Liapounov de temps fini qui correspondent au taux de croissance exponentielle de la distance entre deux particules initialement très proches, calculée sur une certaine durée de temps. Cette méthode permet de diagnostiquer les barrières au transport (Pierrehumbert et Yang 1993, Babiano et al. 1994, Bowman et Chen 1994, Yang 1998). Quand la barrière est relativement bien définie et persistante, cette technique permet de voir des exposants de Liapounov très faibles au niveau de la barrière au transport. Cependant, on constate une forte hétérogénéité spatiale des exposants (motifs de petite échelle très présents), ce qui contraste avec l'idée qu'on peut se faire du mélange dans ces écoulements grande échelle puisque le mélange chaotique devrait être relativement homogène au moins sur les petites échelles et sur des courtes échelles de temps (à cause de sa nature non-locale). De plus, pour effectuer ces calculs, il faut poser arbitrairement la durée sur laquelle on examine la dispersion. Cette durée va entrer en jeu : sur une durée trop courte, on ne peut réellement parler de séparation exponentielle alors que sur une durée trop longue, on risque de calculer un taux de séparation due à des régions de déformation différentes (ce qui reviendrait à avoir un champ de déformation aléatoire comme pour le modèle de Kraichnan de vitesse δ -corrélée temporellement). En fait, ce temps sur lequel repose le calcul devrait dépendre des

⁷c'est-à-dire que le taux de déformation soit plus grand que la vorticité.

caractéristiques locales de l'écoulement. Une méthode a été proposée pour pallier à ce défaut et consiste à calculer des exposants de Liapounov de taille finie (Artale et al. 1997). Au lieu de calculer directement l'exposant à partir de la distance de séparation, cette méthode calcule le temps moyen de séparation exponentielle et semble donner de meilleurs résultats que les exposants de temps fini (Boffetta et al. 2000b).

Cette méthode repose sur une vision lagrangienne de l'écoulement et calcule généralement une quantité moyennée (distance ou temps) sur des trajectoires lagrangiennes, ce qui peut entraîner une même valeur des exposants pour tout un filament alors que la région de naissance du filament devrait avoir un exposant de Liapounov très différent de la région où il est advecté sans subir de déformation. De plus, cette méthode fait un diagnostic a posteriori du mélange et ne permet pas de comprendre les processus dynamiques qui sont présents.

1.4.3 Diffusivité efficace

Une méthode a posteriori pour analyser le mélange de traceur a été proposée par Nakamura (1996) et mis en application dans l'atmosphère par Haynes et Shuckburgh (2000). Celle-ci consiste à calculer la diffusion effective (c'est-à-dire réellement ressentie par le traceur) le long de contours fermés de traceur. Pour cela, on paramétrise le traceur c par rapport à une coordonnée d'aire A , représentant l'aire entre un contour du traceur et un contour de référence. Dans cette nouvelle coordonnée, le traceur est gouverné par l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} c(A, t) = \frac{\partial}{\partial A} \left(\kappa_{eff} \frac{\partial c}{\partial A} \right) ,$$

$$\kappa_{eff} \equiv \frac{\partial}{\partial A} \left(\iint_{A(c,t)} |\nabla c|^2 dA \right) / \left(\frac{\partial c}{\partial A} \right)^2 .$$

Comme on peut le voir, cette méthode ne caractérise pas localement le mélange puisqu'elle moyenne la diffusion sur des isolignes fermées de traceur et donne alors une diffusion efficace κ_{eff} pour chaque isoligne. Cela ne donne une information a posteriori que sur l'efficacité des structures à se protéger contre la diffusion mais cela ne donne pas d'information locale sur les régions où le mélange est fortement inhibé (bord de vortex avec gradient abrupt) ou fortement accru (point d'éjection de filament). Cette méthode permet de caractériser les barrières au mélange dans l'atmosphère comme l'ont montré Haynes et Shuckburgh par de faibles valeurs de diffusivité efficace.

Un point faible de cette méthode est qu'elle est fondée sur un opérateur de diffusion en laplacien. Il n'est pas évident que pour un autre opérateur différentiel on obtienne des diffusivités identiques. A priori, on peut penser que ce sont les processus non-diffusifs de déformation qui contrôlent la cascade et le mélange. Cette diffusivité efficace pourrait donc dépendre de l'opérateur de diffusion alors que le taux de cascade semble indépendant de celui-ci.

1.4.4 Approche statistique

Une autre approche de l'étude de la cascade de scalaire passif a été initiée depuis les travaux de Kolmogorov (1941). En effet, on peut s'intéresser aux statistiques du scalaire passif comme Kolmogorov s'était intéressé aux fonctions de structures de la vitesse et à leurs lois d'échelles. Cette approche a pour but fondamental de comprendre l'intermittence qui est généralement observée en turbulence, c'est-à-dire le fait que l'évolution temporelle des gradients de traceur peut être très calme (avec de faibles gradients) mais avec des périodes très courtes de très forts gradients, ce qui correspond à la non-gaussianité des ailes des lois de probabilité des fonctions des structures du traceur et à la dépendance en fonction de l'échelle des incréments de traceur. Deux limites sont particulièrement étudiées : la limite où le champ de déformation est stationnaire (Batchelor 1959) et la limite où l'on peut considérer la déformation comme aléatoire avec un modèle de vitesse δ -corrélée en temps (Kraichnan 1968, Kraichnan 1974). Cette dernière limite correspond à ne pas prendre en compte les accélérations (c'est-à-dire les dérivées temporelles de la vitesse).

Les résultats de cette approche sont obtenus pour un problème de champ de scalaire forcé, de façon à obtenir les exposants des fonctions de structures en présence d'une injection bien définie et stationnaire. On peut décomposer la solution générale de ce problème en une partie forcée et une partie homogène (appelée mode zéro par Chertkov et al. (1995a)). Cette dernière sert à raccorder la solution générale (la somme des solutions forcée et homogène) aux conditions aux limites (c'est-à-dire aux échelles dissipatives et d'injection). On peut noter que l'intermittence associée à ce problème semble provenir de la partie du champ scalaire qui est non-forcée (Chertkov et al. 1995a, Gawedzki et Kupiainen 1995, Vergassola 1996). Il semble que cela soit aussi vrai dans le cas de la cascade inverse de la turbulence bidimensionnelle (Celani et al. 2000).

Une des méthodes utilisées par ces études est fondée sur une approche lagrangienne du problème (Chertkov et al. 1995b, Frisch et al. 1998). Par exemple, l'utilisation d'un référentiel quasi-lagrangien en co-mouvement permet de transformer le problème d'advection d'un traceur en problème relié à l'évolution de son gradient (Chertkov et al. 1995b). Cette dernière étude montre que la statistique du scalaire passif dépend fondamentalement de la statistique des exposants de Liapounov (résultat similaire obtenu par Antonsen et al. (1996)). Un exemple de cette dépendance des exposants de Liapounov est donné par le sens de la cascade directe relié au signe des exposants de Liapounov, résultat qui apparaît entre autres dans les modèles compressibles (Chertkov et al. 1997, Chertkov et al. 1998, Gawedzki et Vergassola 2000) : un exposant positif est relié à une cascade directe alors qu'un exposant négatif est relié à une cascade inverse. Cela signifie que la séparation exponentielle de particules est associée à une cascade directe (nous verrons en annexe qu'elle correspond bien à une formation de gradient), alors que le rapprochement des particules est associé dans ces modèles à une cascade inverse.

Les résultats obtenus par ce genre d'approche permettent d'avoir accès à la structure globale de la cascade et à son aspect intermittent. Ils permettent aussi de com-

prendre les rapports entre l'advection lagrangienne et le mélange de traceur mais ils ne répondent pas à la question des processus locaux responsables de la cascade dans l'espace physique. De plus, la plupart des résultats sont dérivés dans l'une des deux limites, de déformation aléatoire dans le temps à la Kraichnan (1974), ou de déformation stationnaire à la Batchelor (1959). La situation intermédiaire semble difficile à étudier, bien que quelques avancées aient été faites (Chertkov et al. 1995b). Nous ne suivrons donc pas cette direction dans notre travail car nous voulons comprendre les mécanismes de la cascade dans l'espace physique. Par contre, les méthodes lagrangiennes utilisées dans ces travaux sont très pertinentes pour qui veut comprendre la cascade de traceur aussi bien dans l'espace physique, qu'au sens statistique.

1.4.5 Approche par l'étude des gradients de traceur

Le dernier type d'approche qui s'offre à nous est fondé sur l'étude de l'évolution des gradients de traceur. Nous avons vu que la cascade de traceur procédait par la formation de forts gradients de traceur. Ceci a été remarqué en particulier par Herring et al. (1974) qui ont montré dans leur simulation que les termes non-linéaires sont à l'origine d'une production continue de gradients de vorticit  . Comprendre l'évolution des gradients de traceurs (vorticit  , scalaire passif) peut donc permettre de comprendre les m  canismes de cascade vers les petites   chelles.

Un premier pas dans l'étude de l'évolution des gradients de vorticit   a   t   fait par Weiss (1981). Celui-ci a examin   l'évolution des vecteurs gradients de traceur le long de trajectoires lagrangiennes. Cette   volution est reli  e directement au tenseur de gradient de vitesse.    partir de cette observation, il en d  duit le type d'  volution des gradients de traceur en fonction des propri  t  s du tenseur de gradient de vitesse. Il faut noter que des r  sultats identiques avaient   t   d  riv  s par Okubo (1970) qui consid  rait le probl  me de la dispersion de particules. Ces r  sultats permettent d'avoir une id  e de la cascade (Weiss 1981, McWilliams 1984, Brachet et al. 1988) en montrant les r  gions de faible cascade (correspondant g  n  ralement aux c  urs des tourbillons) et les r  gions de forte cascade (associ  es    une forte d  formation) et confirment que cette approche permet de comprendre la cascade dans l'espace physique.

Cependant, le crit  re d'Okubo-Weiss n'utilise que les propri  t  s *cin  matiques* de l'advection puisqu'il ne tient pas du tout compte de la dynamique propre des   quations de Navier-Stokes. Basdevant et Philipovitch (1994) et Hua et Klein (1998) ont montr   que ce diagnostic n'est pas correct pour pr  voir l'  volution des gradients de traceur et qu'il fallait aussi utiliser des informations provenant des acc  l  rations lagrangiennes qui sont en fait reli  es aux propri  t  s non-locales de la turbulence (Hua et al. 1998).

Par ailleurs, McWilliams (1984) a propos   de diagnostiquer la cascade    partir du taux de croissance des gradients de vorticit  . Il a montr   que ce diagnostic semble permettre de comprendre un peu mieux comment les tourbillons   voluent. Par exemple, il note qu'un tourbillon fortement d  form   et qui revient    une forme axisym  trique correspond    une pr  dominance de la d  croissance de ses gradients

de vorticité. Il note de plus que la forme de quadrupole du taux de croissance autour des tourbillons est reliée à l’évolution de l’ellipticité des tourbillons puisque cela correspond à une contraction ou un élargissement des contours de vorticité. Par ailleurs, il note aussi que ce taux de croissance permet de matérialiser les régions de forte cascade. Néanmoins, on peut penser que ce taux de croissance doit pouvoir se connaître sans diagnostiquer le taux de croissance des gradients mais en connaissant les propriétés intrinsèques de la turbulence, comme on peut le faire avec le critère d’Okubo et Weiss par exemple.

1.5 Discussion et choix d’une approche d’étude

Nous avons passé en revue ce qui est connu sur la cascade de traceur vers les petites échelles en turbulence bidimensionnelle. Cette cascade se matérialise par la production de fins filaments de traceur et d’intenses gradients à travers l’effet de l’advection différentielle due aux structures énergétiques de l’écoulement. Ces structures énergétiques sont concentrées plutôt aux échelles grandes et intermédiaires et dominant l’advection et le mélange. Il en résulte que la cascade de traceur s’effectue de manière non-locale dans l’espace physique contrairement au mélange diffusif qui se développe localement.

Nous avons aussi examiné les différentes méthodes d’approche pour étudier la cascade. Certaines approches font des diagnostics a posteriori sur le champ de traceur advecté par la turbulence et ne permettent pas de comprendre les mécanismes physique sous-jacents à la cascade. La méthode de calcul de variétés stables et instables examine le mélange d’un point de vue cinématique car elle suppose connu le champ de vitesse et ne cherche pas à utiliser ses propriétés dynamiques liées à la turbulence mais seulement ses propriétés liées à l’advection chaotique (existence de points de stagnation et de séparatrices les reliant). L’approche statistique du mélange a fait apparaître qu’on pouvait développer des outils lagrangiens pour étudier le mélange de traceur. Bien que cette approche statistique ne permette pas de comprendre la cascade dans l’espace physique, nous pouvons utiliser des outils lagrangiens analogues pour étudier la cascade dans l’espace physique, ce qui est fait dans l’approche suivie par Okubo et Weiss.

Comme il a été mis en évidence, la cascade turbulente se manifeste par la production de forts gradients de traceur et c’est la dynamique de cette production que l’on va étudier. Nous voulons comprendre comment les processus d’advection par des structures turbulentes énergétiques d’échelle assez grande (par exemple, les tourbillons) vont “forcer” le traceur à développer une cascade vers les petites échelles et comment cette cascade va se réaliser dans l’espace physique. En cela, nous allons étudier *l’évolution lagrangienne des gradients de traceur passif* puisque ces gradients sont la manifestation de la cascade. Cette méthode lagrangienne fonctionne particulièrement bien en deux dimensions comme nous le verrons et comme les études statistiques à la Chertkov le montrent.

Chapitre 2

Dynamique des gradients de traceur en turbulence bidimensionnelle

2.1 Introduction

Nous venons de voir quelles sont les propriétés génériques de la cascade de traceur, en particulier nous avons montré que cette cascade procédait par la formation de forts gradients. L'approche suivie pour étudier la cascade est donc d'étudier *la dynamique lagrangienne de ces gradients dans l'espace physique*. Nous allons présenter de façon synthétique les principaux résultats de la thèse qui concernent la dynamique non-diffusive des gradients de traceur. Nous ne nous préoccupons pas ici des effets diffusifs et nous nous plaçons dans un écoulement bidimensionnel. Ces résultats sont développés dans deux articles (Lapeyre et al. 1999, Klein et al. 2000) inclus en annexe. Il est *très fortement conseillé* au lecteur de commencer par lire ces articles puis de lire ensuite ce chapitre afin d'en tirer une meilleure compréhension.

Nous allons rappeler dans un premier temps les résultats qualitatifs antérieurs puis nous allons poser le problème de la dynamique du gradient de traceur de manière la plus précise possible, en montrant que c'est *l'équation pour l'orientation relative du gradient par rapport aux axes de déformation qui est essentielle pour la dynamique*. Ensuite, nous étudierons cette équation pour faire ressortir les régimes dynamiques qui lui sont associés. Les mécanismes physiques présents dans les solutions théoriques seront explicités de manière simple. Dans un dernier temps, on essaiera de valider ces résultats à l'aide de simulations numériques de turbulence bidimensionnelle.

2.2 Discussion sur l'approche suivie

Weiss (1981) a dérivé un critère qualitatif afin d'estimer la dynamique du gradient de traceur (aussi obtenu par Okubo (1970) dans un autre contexte). Ce critère a été souvent utilisé pour diagnostiquer des simulations turbulentes mais, dans un même temps, il est connu que ce critère n'est pas valable pour des cas pathologiques comme le vortex ponctuel par exemple, ou de façon plus générale les vortex axisymétriques

(Brachet et al. 1988, Pierrehumbert et Yang 1993). Le fait que ce critère n'est pas pertinent a été aussi mis en évidence dans des simulations numériques turbulentes par Basdevant et Philipovitch (1994) et Hua et Klein (1998). Nous allons donc décrire ce critère puis discuter ces hypothèses et montrer en quoi il n'est pas pertinent.

2.2.1 Rappel du critère d'Okubo-Weiss

Considérons un traceur q advecté le long des trajectoires lagrangiennes :

$$\frac{Dq}{Dt} = 0 .$$

Si nous prenons le gradient de cette équation, nous obtenons

$$\frac{D\nabla q}{Dt} = -[\nabla \mathbf{u}]^* \nabla q , \quad (2.1)$$

où $[\nabla \mathbf{u}]^*$ est le transposé du tenseur de gradient de vitesse. Dans un premier temps, et afin de faciliter les calculs, on définit les quantités σ_n (l'étirement), σ_s (le cisaillement), ω (la vorticité) et σ (le taux de déformation) par les relations suivantes¹ :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \partial_x u - \partial_y v , & \omega &= \partial_x v - \partial_y u . \\ \sigma_s &= \partial_x v + \partial_y u , & \sigma &= \sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_s^2} . \end{aligned}$$

Weiss (1981) a dérivé un critère à partir de l'équation (2.1) afin de caractériser la dynamique du gradient de traceur, critère qui a aussi été dérivé par Okubo (1970) pour le problème de la dispersion de particules. Deux hypothèses sont faites pour obtenir leur critère :

- implicitement, le gradient de traceur s'aligne avec un des vecteurs propres de $[\nabla \mathbf{u}]^*$,
- et le tenseur $[\nabla \mathbf{u}]^*$ évolue lentement le long des trajectoires lagrangiennes.

La première hypothèse permet de remplacer le tenseur par une quantité scalaire dans l'équation (2.1). Cette quantité scalaire n'est autre qu'une des valeurs propres du tenseur qui vaut $\pm\lambda^{1/2}$ avec λ la quantité d'Okubo-Weiss :

$$\lambda = \sigma^2 - \omega^2 . \quad (2.2)$$

La deuxième hypothèse indique que λ est constant, ce qui permet d'intégrer l'équation (2.1) :

$$\nabla q \approx \nabla q(t=0) \exp(\pm\lambda^{1/2}t) .$$

De deux choses l'une :

- soit λ est positif, c'est-à-dire la déformation domine. Les valeurs propres sont réelles et on aura une croissance exponentielle des gradients. Weiss qualifie ces régions d'hyperboliques car les points selle de la fonction de courant (points de stagnation avec existence de directions stable et instable) possèdent une telle propriété ($\lambda > 0$) et ces points sont communément appelés hyperboliques.

¹On considère ici un écoulement non-divergent. Le cas d'un écoulement divergent ne change pas les résultats que nous allons montrer comme indiqué à la section A.3.

- soit λ est négatif, c'est-à-dire la vorticité domine. Les valeurs propres sont imaginaires pures et on aura une rotation des gradients (sans croissance nette). Weiss qualifie ces régions d'elliptiques en référence aux points elliptiques de la fonction de courant. Cela correspond par exemple au cœur des vortex.

La quantité λ correspond à évaluer l'intensité relative de la déformation par rapport à la vorticité. La déformation fait croître les gradients de façon exponentielle et la vorticité les fait tourner.

2.2.2 Discussion des hypothèses du critère d'Okubo-Weiss

Examinons maintenant les hypothèses sur lesquelles repose ce critère. Considérons la première hypothèse, à savoir l'alignement du gradient avec un des vecteurs propres de $[\nabla \mathbf{u}]^*$. La première question qui vient à l'esprit est celle de l'existence de l'alignement. Brachet et al. (1988) ont examiné l'alignement avec le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de $[\nabla \mathbf{u}]^*$ quand le taux de déformation domine la vorticité (c'est-à-dire quand $\lambda \geq 0$) et ont noté un alignement qualitatif entre le gradient de traceur et le vecteur propre. Par contre, d'autres études (Gibson et al. 1988, Ohkitani 1995, Protas et al. 1999) ont observé un alignement qualitatif avec le vecteur propre de la matrice de déformation (partie symétrique du tenseur de gradient de vitesse). On peut donc se poser une question plus pertinente : quelle est la dynamique exacte de l'*orientation* des gradients ? Y a-t-il alignement avec une orientation privilégiée ? De cette réponse, nous pourrions déduire le comportement du gradient total (orientation et norme) d'après l'équation (2.1).

La seconde hypothèse, en fait la plus déterminante, est la lente évolution du tenseur de gradient de vitesse $[\nabla \mathbf{u}]^*$ le long des trajectoires lagrangiennes. Si on calcule l'équation au deuxième ordre pour l'évolution lagrangienne du gradient de traceur, on obtient

$$\frac{D^2 \nabla q}{Dt^2} = \left([\nabla \mathbf{u}]^2 - \frac{D[\nabla \mathbf{u}]^*}{Dt} \right) \nabla q .$$

L'hypothèse d'Okubo-Weiss revient donc à négliger $\frac{D}{Dt}[\nabla \mathbf{u}]^*$ devant $[\nabla \mathbf{u}]^2$. Weiss (1981) a examiné cette question mais la résolution de ses simulations était insuffisante pour pouvoir correctement répondre. Plus récemment, Basdevant et Philipovitch (1994) et Hua et Klein (1998) ont montré que la quantité $\frac{D}{Dt}[\nabla \mathbf{u}]^*$ n'était pas négligeable, en particulier sur le bord des vortex et à l'intérieur de ceux-ci alors qu'elle était bien négligeable au voisinage des points selles de l'écoulement.

On peut examiner à quelles quantités dynamiques est reliée la quantité $\frac{D}{Dt}[\nabla \mathbf{u}]^*$. À partir des équations d'Euler, on trouve qu'elle correspond à la partie à trace nulle de la hessienne de pression :

$$\frac{D}{Dt}[\nabla \mathbf{u}]^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_{xx}P - \partial_{yy}P & 2\partial_{xy}P \\ 2\partial_{xy}P & \partial_{yy}P - \partial_{xx}P \end{pmatrix} . \quad (2.3)$$

De façon plus générale, cette quantité est reliée à la partie à trace nulle du tenseur de gradient d'accélération (Hua et al. 1998). Elle est donc reliée aux propriétés *dynamiques* de l'écoulement par le principe fondamental de la dynamique $D\mathbf{u}/Dt = \mathbf{F}$

où $\mathbf{F}$ sont les forces exercées sur la particule fluide. Ne pas prendre en compte cette quantité revient à faire une étude cinématique du problème. De plus, la partie à trace nulle de la hessienne de pression est reliée aux propriétés non-locales de la pression. En effet, en prenant la divergence des équations d'Euler, on peut montrer que

$$\Delta P = \frac{1}{2}(\omega^2 - \sigma^2) . \quad (2.4)$$

Le terme $\omega^2 - \sigma^2$ dans le membre de droite représente les effets non-linéaires de la turbulence. Ce sont eux qui permettent de déterminer la pression à travers l'inverse de l'opérateur laplacien et ils sont à l'origine de non-gaussianité de la loi de probabilité de la pression (Hua 1994). Toute la structure spatiale des non-linéarités intervient donc pour connaître la pression en chaque point. Cette relation fait de la pression une quantité non-locale. La partie à trace nulle de la hessienne de pression représente aussi, dans un certain sens, la non-localité de la pression bien que l'on applique deux différentiations. On peut noter que cette non-localité est supposée nulle dans l'hypothèse d'Okubo et de Weiss puisque cette hypothèse est que $D[\nabla \mathbf{u}]/Dt = 0$, d'après l'équation (2.3) (Ohkitani 1995).

À partir de l'équation 2.4 et d'un modèle de fermeture turbulente, on peut montrer que le spectre des gradients de pression (ou plus généralement de l'accélération lagrangienne en turbulence quasi-géostrophique) a une pente identique à celle du spectre de l'énergie cinétique (Hua et al. 1998). Une étude de spectre de floteurs lagrangiens dans l'océan (Rupolo et al. 1996) a montré que l'accélération possédait bien un spectre très pentu (en k^{-3}). De plus, les travaux de Hua et collaborateurs ont montré que le tenseur d'accélération lagrangienne $\nabla \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right)$ gouverne de façon importante la dynamique du gradient de traceur, aussi bien en turbulence bidimensionnelle (Hua et Klein 1998) qu'en turbulence quasi-géostrophique stratifiée (Hua et al. 1998, Klein et al. 1998).

Nous voyons que *pour bien représenter la dynamique du gradient de traceur, il est nécessaire de prendre en compte $\frac{D}{Dt}[\nabla \mathbf{u}]^*$ qui est du même ordre de grandeur que $[\nabla \mathbf{u}]^2$, cela afin de prendre en compte la dynamique reliée aux équations d'Euler du mouvement des particules fluides, en particulier les accélérations lagrangiennes.*

2.2.3 Discussion sur notre approche

À partir de cette discussion, nous voyons apparaître deux points-clés : le premier est qu'il faut examiner *l'évolution de l'orientation des gradients de traceur* pour comprendre exactement leur dynamique. C'est ce à quoi nous allons nous attacher et c'est ce qui fait l'originalité de ce travail. Le deuxième point concerne la méthode que nous allons utiliser. Les résultats précédents soulignent que la dynamique lagrangienne des gradients de traceur est gouvernée de façon prépondérante par les tenseurs de gradient de vitesse et d'accélération lagrangienne, et le second tenseur prend en compte la non-localité de la cascade turbulente. Nous allons donc étudier *la dynamique lagrangienne de l'orientation des gradients de traceur en considérant que les quantités importantes sont essentiellement $\nabla \mathbf{u}$ et $\nabla \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right)$* . Nous faisons donc l'hypothèse que l'on peut se restreindre aux deux premiers ordres de la dynamique.

2.3 Résultats théoriques sur la dynamique des gradients de traceur

2.3.1 Orientation des gradients de traceur

2.3.1a Relation avec la cascade

Comme nous venons de le dire, ils nous faut étudier la dynamique de l'orientation des gradients de traceur. Pourquoi cette dynamique est en fait primordiale ? La cascade de traceur se manifeste par la formation de petites échelles donc de grands nombres d'onde, c'est-à-dire par la production de forts gradients (Saffman 1971, Herring et al. 1974, Weiss 1981, McWilliams 1984, Protas et al. 1999). L'équation de cette production de gradient se déduit de l'équation (2.1) :

$$\frac{D \log |\nabla q|}{Dt} = -\frac{\nabla q}{|\nabla q|} \cdot \left(S \frac{\nabla q}{|\nabla q|} \right), \quad (2.5)$$

où S est la matrice de déformation, c'est-à-dire la partie symétrique du tenseur de gradient de vitesse :

$$S \equiv \frac{1}{2} ([\nabla \mathbf{u}] + [\nabla \mathbf{u}]^*) .$$

Nous appellerons cette quantité (2.5) le taux de cascade puisqu'elle est liée à la production de petites échelles. Cette équation nous montre que le taux de cascade dépend à la fois des valeurs propres de S (de valeurs $\pm\sigma$) et de l'*orientation relative du gradient par rapport aux axes de déformation* (les vecteurs propres orthogonaux² de S). Par exemple, la vorticit   n'intervient pas dans la matrice S alors qu'on peut s'attendre à un effet sur la dynamique. Donc cet effet doit se faire sentir à travers l'alignement.

L'importance de la dynamique du gradient de traceur dans la base des axes de déformation a été d'abord mise en évidence par Dresselhaus et Tabor (1991). Si nous connaissons l'orientation de ces gradients relativement à cette base a priori (c'est-à-dire directement à partir des propriétés de l'écoulement et sans avoir à diagnostiquer un traceur), nous serons alors capables d'estimer le taux de production de gradient donc la cascade et cette estimation sera connue par rapport à des quantités locales. Nous aurons alors accès aux propriétés génériques de la cascade.

2.3.1b Dérivation de l'équation de l'orientation

Nous venons de voir que le sujet d'intérêt est l'*alignement du gradient de traceur avec les axes de déformation*. Afin de déterminer l'équation de cet alignement, nous allons faire apparaître explicitement l'angle du gradient de traceur avec les axes de déformation. Nous décomposons d'abord le gradient de traceur en sa norme $|\nabla q|$ et son angle θ :

$$\nabla q = |\nabla q| (\cos \theta, \sin \theta) .$$

²Comme la matrice S est symétrique, ces vecteurs propres sont orthogonaux.

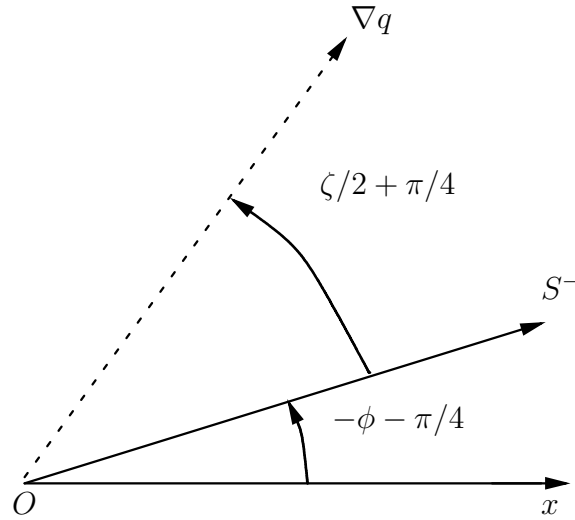


Figure 2.1: Vecteur ∇q et axe compressionnel de déformation $\mathbf{S}^-$. L'angle entre $\mathbf{S}^-$ et l'axe Ox correspond à $-\phi - \pi/4$. L'angle entre le gradient de traceur et l'axe compressionnel de déformation vaut $\theta + \phi + \pi/4 = \zeta/2 + \pi/4$.

Nous pouvons faire de même avec la déformation. En effet, la matrice S se décompose en une partie reliée à l'étirement σ_n et une partie reliée au cisaillement³ σ_s . Ces deux effets sont équivalents si on fait un changement de base adéquat. On peut donc écrire

$$(\sigma_n, \sigma_s) = \sigma (\sin 2\phi, \cos 2\phi) ,$$

avec σ positif.

Les équations pour la norme et l'orientation du gradient de traceur se déduisent alors simplement de l'équation (2.1) :

$$\frac{D \log |\nabla q|^2}{Dt} = -\sigma \sin(2(\theta + \phi)) , \quad (2.6a)$$

$$2 \frac{D\theta}{Dt} = \omega - \sigma \cos(2(\theta + \phi)) . \quad (2.6b)$$

L'équation (2.6a) montre que le taux de cascade dépend à la fois du taux de déformation σ et de l'angle entre le gradient de traceur et les axes de déformation à travers $2(\theta + \phi)$. L'angle entre le gradient de traceur et l'axe compressionnel de déformation vaut $\theta + \phi + \pi/4$ modulo π (cf. figure 2.1). Le facteur 2 dans $2(\theta + \phi)$ permet de tenir compte du fait que les vecteurs propres sont définis à leur sens près (c'est-à-dire si $\mathbf{e}$ est vecteur propre, $-\mathbf{e}$ est aussi vecteur propre). Nous noterons $\mathbf{S}^-$ l'axe compressionnel de déformation, c'est-à-dire associé à la plus forte croissance des gradients (c'est-à-dire $-\sin \zeta = 1$) et $\mathbf{S}^+$ l'axe extensionnel, c'est-à-dire associé à la plus forte décroissance (c'est-à-dire $-\sin \zeta = -1$). Ce choix de notation provient du fait que

³Ce cisaillement ne possède pas de vorticité et correspondrait par exemple à une fonction de courant $\psi = \sigma_s(x^2 - y^2)/2$.

le gradient de traceur est aligné avec l'axe $\mathbf{S}^+$ pour $2(\theta + \phi) = +\frac{\pi}{2}$ et $\mathbf{S}^-$ pour $2(\theta + \phi) = -\frac{\pi}{2}$.

L'équation (2.6b) montre que la vorticité et la déformation agissent de façon directe sur l'orientation du gradient de traceur. Cette équation a été dérivée ou étudiée qualitativement par différents auteurs (Keyser et al. 1988, Dresselhaus et Tabor 1991, Dritschel et al. 1991, Chertkov et al. 1995b) mais sans prendre en compte l'effet de la rotation des axes de déformation. Le point crucial pour l'étude de la dynamique est de prendre une variable liée à l'orientation par rapport aux axes de déformation, par exemple,

$$\zeta = 2(\theta + \phi) .$$

Alors l'équation pour ζ est

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \omega + 2\frac{D\phi}{Dt} - \sigma \cos \zeta . \quad (2.7)$$

On peut simplifier un peu plus cette équation en passant par une variable adimensionnelle pour le temps :

$$\tau = \int_0^t \sigma(s) ds . \quad (2.8)$$

Alors on obtient l'équation essentielle pour *la dynamique de l'orientation du gradient de traceur* :

$$\frac{D\zeta}{D\tau} = r - \cos \zeta , \quad (2.9)$$

$$\text{avec} \quad r = \frac{\omega + 2D\phi/Dt}{\sigma} . \quad (2.10)$$

On voit donc que l'équation peut se mettre sous une forme très simple et qu'elle ne dépend que de deux quantités r et τ . *Cette forme a été obtenue exactement, sans faire d'approximation ou d'hypothèse (sauf à négliger la diffusion). La quantité r est le rapport entre les effets de rotation effective $\omega + 2\frac{D\phi}{Dt}$ (due à la vorticité ω et à la rotation des axes de déformation $2\frac{D\phi}{Dt}$) et les effets de déformation σ . De cette quantité va dépendre de façon cruciale la dynamique du gradient de traceur comme nous le verrons par la suite.* De plus, le temps caractéristique de la dynamique est défini à travers τ ( quation (2.8)).

Nous allons d'abord étudier analytiquement cette équation. Ensuite, nous interpréterons ces résultats de façon physique en montrant quels sont les mécanismes qui agissent sur le gradient de traceur. Enfin, nous discuterons l'aspect dynamique de nos résultats par contraste avec l'aspect cinématique du critère d'Okubo-Weiss.

2.3.2  tude de l'équation d'orientation

Dans cette section, nous allons résumer les résultats concernant la dynamique de l'orientation (Lapeyre et al. 1999, Klein et al. 2000). La section suivante discutera en détail leur interprétation physique.

Il a été mis en évidence deux régimes pour la dynamique de l'orientation. Un premier régime correspond aux régions dominées par la déformation ($|r| \leq 1$) et un second régime correspond aux régions dominées par la rotation effective. Pourquoi la séparation entre ces deux régimes ? Parce que l'équation (2.9) possède deux points fixes pour $|r| \leq 1$ alors que ce n'est pas le cas pour $|r| > 1$. Par ailleurs, nous verrons que ces régimes possèdent des dynamiques très différentes.

L'hypothèse sur laquelle ces résultats sont fondés est que *les quantités r et s (s sera défini un peu plus loin (eq. 2.12)) sont lentement variables le long des trajectoires lagrangiennes.*

2.3.2a Régions dominées par la déformation : $|r| \leq 1$

Les résultats que nous allons présenter ici sont fondés sur l'hypothèse que r est *lentement variable* le long d'une trajectoire lagrangienne. Nous discuterons cette hypothèse dans une section ultérieure.

Partons de l'équation pour l'orientation ζ :

$$\frac{D\zeta}{D\tau} = r - \cos \zeta .$$

La première chose que l'on peut dire sur cette équation est qu'elle possède *deux points fixes* :

$$\zeta_{\pm} = \pm \arccos r .$$

On peut calculer le taux de croissance exponentielle associé à ces points fixes :

$$\left. \frac{D \log |\nabla q|^2}{Dt} \right|_{\zeta=\zeta_{\pm}} = -\sigma \sin \zeta_{\pm} = \mp \sigma \sqrt{1-r^2} . \quad (2.11)$$

Le point fixe ζ_- est donc associé à une croissance de la norme du gradient alors que le point fixe ζ_+ est associé à une décroissance du gradient.

Considérons maintenant les trajectoires dans l'espace des phases $(\zeta, \frac{D\zeta}{D\tau})$ sur la figure 2.2. L'étude des trajectoires de ζ dans cet espace montre qu'il va y avoir *alignement avec le point fixe ζ_-* quel que soit $\zeta \neq \zeta_+$. De plus, le point fixe ζ_+ est instable puisque toutes les trajectoires s'en écartent.

On peut montrer mathématiquement (cf. Lapeyre et al. (1999)) que :

- si $|r| < 1$, alors il y a convergence exponentiellement en temps (en τ) vers ζ_- et la norme du gradient croît de façon exponentielle :

$$|\nabla q|^2 \approx |\nabla q_0|^2 \exp \left(\tau \sqrt{1-r^2} \right) .$$

- si $|r| = 1$, il y a convergence plus lente (de type $1/\tau$) du gradient vers $\zeta_- = \zeta_+ = (1 - \text{sign}(r))\pi/2$ et croissance linéaire de la norme du gradient :

$$|\nabla q| \approx \frac{|\nabla q_0|}{\sqrt{1+A^2}} \tau ,$$

avec A une constante qui dépend des conditions initiales.

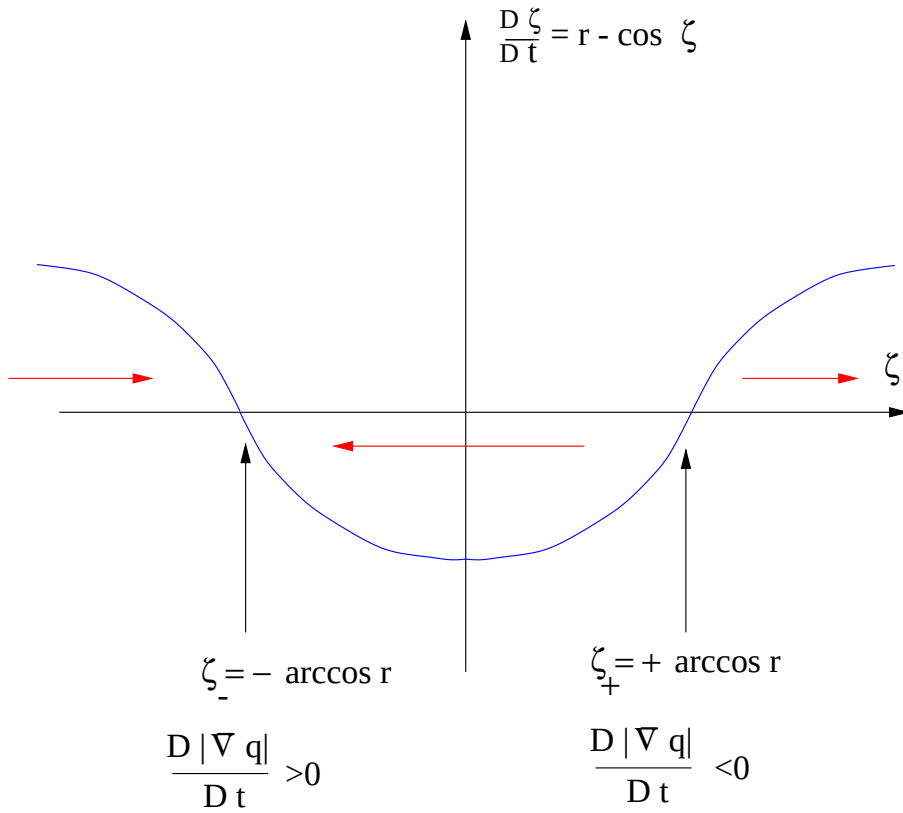


Figure 2.2: Courbe en bleu : dérivée temporelle de ζ en fonction de ζ . Il y a deux points fixes $\zeta_{\pm}$ qui correspondent à des taux de croissance de signe opposé. Les flèches rouges horizontales symbolisent le sens d'évolution de ζ (flèche vers la gauche quand $\frac{D\zeta}{Dt} < 0$ et vers la droite quand $\frac{D\zeta}{Dt} > 0$).

On observe dans ce régime *un processus d'alignement associé avec une croissance des gradients. Cela va donc bien dans le sens d'une cascade de traceur vers les petites échelles, c'est-à-dire une formation de forts gradients. Le mécanisme est dû au fait que le gradient s'écarte de l'orientation instable où il décroît et préfère l'orientation stable où il croît.*

Par ailleurs, on peut montrer que les orientations $\zeta_{\pm}$ correspondent aux directions données par les vecteurs propres du tenseur de gradient de vitesse exprimé dans la base des axes de déformation $[\nabla \mathbf{u}]_{\text{strain}}$ comme cela est expliqué dans l'annexe de l'article Lapeyre et al. (1999). *Ces orientations sont donc différentes des axes de déformation ainsi que des vecteurs propres du tenseur de gradient de vitesse.* Le cas particulier $|r| = 1$ correspond à $\zeta_+ = \zeta_-$ et ces orientations font un angle de 45° avec les axes de déformation.

2.3.2b Régions dominées par la rotation effective : $|r| > 1$

Les résultats suivants proviennent des deux articles (Lapeyre et al. 1999, Klein et al. 2000). Ils sont fondés sur les mêmes hypothèses de stationnarité pour r et s .

Partons de l'équation de l'orientation :

$$\frac{D\zeta}{D\tau} = r - \cos \zeta .$$

Supposons tout d'abord que r est très grand et lentement variable le long des trajectoires lagrangiennes. On peut alors négliger $\cos \zeta$, et on a simplement croissance linéaire de l'orientation telle que $\zeta = \zeta_0 + r\tau$, ce qui signifie que le gradient est en *rotation* dans le repère des axes de déformation.

De façon générale (c'est-à-dire sans utiliser l'hypothèse que r est grand), quand $|r| > 1$, on peut montrer que $|D\zeta/D\tau|$ est toujours supérieur à $|r| - 1$ donc que *le gradient sera toujours en rotation, mais cette rotation n'est pas uniforme dans le temps* car le taux de rotation dépend de $\cos \zeta$. Cela signifie que statistiquement, il va exister des orientations plus probables que d'autres. En particulier, *l'orientation qui correspond au plus faible taux de rotation ($D\zeta/D\tau$) sera l'orientation statistiquement la plus probable*⁴. Cette orientation correspond à $\zeta_{prob} = (1 - \text{sign}(r)) \pi/2$. Ce résultat est vrai pour le temps défini par τ . Or le temps réel est t et non τ . Il faut donc calculer le taux de croissance minimal $D\zeta/Dt$. On calcule d'abord les extrema de $D\zeta/Dt$, qui correspondent à résoudre $D^2\zeta/Dt^2 = 0$. Cette dernière quantité s'écrit

$$\frac{D^2\zeta}{Dt^2} = \frac{D\omega}{Dt} + 2\frac{D^2\phi}{Dt^2} - \frac{D\sigma}{Dt} \cos \zeta + \sigma^2(r - \cos \zeta) \sin \zeta ,$$

et on rappelle que $D\omega/dt$ est nul en turbulence bidimensionnelle.

Ici, on peut faire deux hypothèses pour trouver une solution simplifiée de l'orientation associée au plus faible taux de rotation :

- $2D^2\phi/Dt^2$ est négligeable par rapport aux autres termes, en particulier devant $D\sigma/Dt$. Cela revient à dire que le taux de rotation des axes de déformation varie lentement le long des trajectoires lagrangiennes.
- r est grand devant $\cos \zeta$.

Si ces deux hypothèses sont vérifiées, alors

$$\frac{D^2\zeta}{Dt^2} = -\frac{D\sigma}{Dt} \cos \zeta + \sigma^2 r \sin \zeta .$$

On peut simplifier cette équation en définissant une nouvelle quantité :

$$s = \frac{1}{\sigma^2} \frac{D\sigma}{Dt} . \tag{2.12}$$

Cette quantité correspond à la variation de l'échelle de temps de la dynamique à travers $s = -\frac{D\sigma^{-1}}{Dt}$ où σ^{-1} a bien une dimension d'un temps.

⁴Cela se prouve comme suit : si dP est la probabilité que ζ soit dans l'intervalle $[z, z + dz]$, alors $dP = dt/T$ avec dt le temps pendant lequel ζ se trouve entre z et $z + dz$ et T le temps total. On peut récrire cela comme $dP = (dt/dz)(dz/T) = (1/\dot{\zeta})(dz/dT)$. Donc le maximum de probabilité dP correspond au minimum de $|\dot{\zeta}|$. CQFD.

Maintenant, introduisons un nouvel angle α :

$$(r, s) = \chi (\cos \alpha, \sin \alpha) \quad \text{avec} \quad \chi = \sqrt{r^2 + s^2} ,$$

$$\text{et} \quad \alpha = \arctan \left(\frac{s}{r} \right) + \frac{\pi}{2} (1 - \text{sign}(r)) . \quad (2.13)$$

Dans ce cas, on obtient alors :

$$\frac{D^2 \zeta}{Dt^2} = \sigma^2 \chi \sin(\zeta - \alpha) .$$

On voit alors que α correspond au minimum de $D\zeta/Dt$ alors que $\alpha + \pi$ correspond au maximum. On peut supposer que le gradient sera statistiquement proche de α puisque cette orientation correspond au minimum du taux de rotation.

On peut donner une autre interprétation pour l'orientation α . En effet, elle intervient dans la matrice liée à la dérivée seconde de la norme des gradients :

$$\frac{D^2 |\nabla q|^2}{Dt^2} = \nabla q \cdot (N \nabla q) .$$

L'orientation α est l'orientation du vecteur propre $\mathbf{N}^-$ correspondant à la plus petite valeur propre de N . La pertinence de N s'explique par le fait que les vecteurs propres de cette matrice ne dépendent pas de la base envisagée (contrairement au cas où on aurait pris $D^2(\nabla q)/Dt^2$) et que cette matrice prend en compte la dynamique de l'orientation.

En ce qui concerne l'évolution de la norme du gradient, on peut s'attendre à une faible croissance ou décroissance des gradients. En fait, nous verrons que les simulations turbulentes possèdent des valeurs assez faibles de s , ce qui implique que l'orientation la plus probable est proche de la bissectrice des axes de déformation (c'est-à-dire $\alpha \approx (1 - \text{sign}(r))\pi/2$) donc possède un taux de production nul. Il est instructif de calculer le taux de croissance associé à l'orientation α :

$$-\sigma \sin \alpha = -\frac{s \sigma}{\sqrt{r^2 + s^2}} . \quad (2.14)$$

Cela signifie que *le signe du taux de croissance du gradient est opposé à celui de s quand les gradients s'alignent avec $\mathbf{N}^-$ (c'est-à-dire $\zeta = \alpha$)*. De plus, si le rapport s/r est faible, alors le taux de croissance effectif des gradients sera fortement réduit par rapport au taux maximal (σ).

Il est intéressant de contraster ce résultat théorique avec les résultats d'Okubo-Weiss. En effet, Okubo et Weiss s'attendaient simplement à une rotation dans les régions dominées par la rotation. *On obtient bien ici une rotation mais en plus, on prédit un alignement avec une orientation spécifique qui correspond au taux de rotation minimal. Cette orientation spécifique est caractéristique de ces régions puisqu'elle est associée à un faible taux de cascade.*

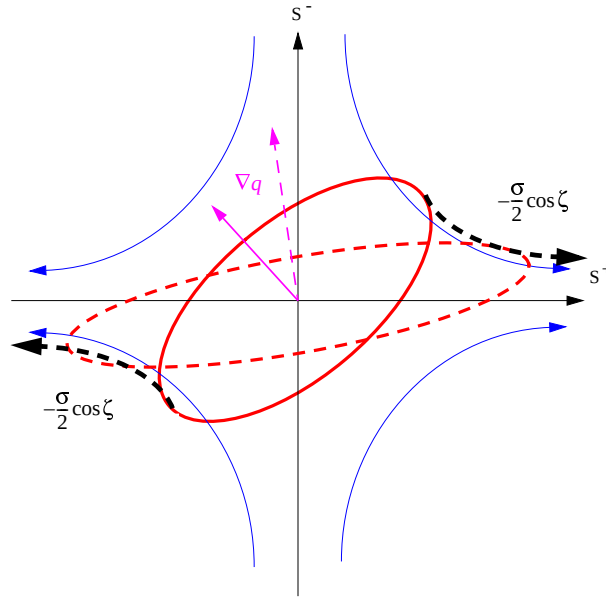


Figure 2.3: Cas d'un champ de déformation. Les axes représentent l'axe compressionnel de déformation $\mathbf{S}^-$ et l'axe extensionnel de déformation $\mathbf{S}^+$. En bleu, les lignes de courant. En trait continu rouge, une tache de traceur elliptique à l'instant initial. En tirets rouges, la même tache mais plus tard. En mauve, les gradients de traceur correspondants. L'effet de la déformation $(-\frac{\sigma}{2} \cos \zeta)$ est symbolisé par les tirets épais noirs.

2.3.3 Mécanismes physiques de la dynamique d'orientation

Après avoir dérivé les différents régimes dynamiques à travers l'équation d'orientation, nous allons décrire les mécanismes physiques associés à ces régimes. Tout d'abord, nous allons expliciter séparément les différents mécanismes qui s'exercent sur le gradient de traceur (équation 2.7). Ces mécanismes sont la déformation $-\sigma \cos \zeta$, la vorticité ω , la rotation des axes de déformation $\frac{D\phi}{Dt}$ et la variation du taux de déformation (à travers $\tau = \int_0^t \sigma(t') dt'$). L'équation d'orientation (2.7) présente la particularité d'être une combinaison linéaire de ces termes, ce qui justifie notre démarche.

Nous allons donner des exemples fondés pour la plupart sur des écoulements *cinématiquement* simples mais ces exemples simplifiés mettent bien en évidence la dynamique des gradients. Ensuite, nous combinerons ces mécanismes afin d'expliquer l'évolution exacte des gradients.

2.3.3a Cas d'une déformation pure

Examinons le cas d'une déformation pure. Par exemple, prenons la fonction de courant suivante :

$$\psi = \frac{\sigma}{2} xy .$$

Nous avons représenté sur la figure 2.3 les lignes de courant correspondantes en bleu. On peut associer deux axes à la déformation. L'un ($\mathbf{S}^-$) correspond à une

direction de compression et l'autre ($\mathbf{S}^+$) à une direction d'extension. Si on place une tache de traceur (trait continu rouge) dans ce champ de déformation, celle-ci va s'orienter le long de l'axe d'extension et elle va s'étirer (tirets rouges). Que se passe-t-il pour le gradient de traceur ? Il va s'orienter vers l'axe compressionnel de déformation et se renforcer (vecteur mauve, continu pour l'instant initial et discontinu au temps ultérieur).

Donc l'effet de la déformation pure (qui correspond au terme⁵ $-\frac{\sigma}{2} \cos \zeta$ dans l'équation d'orientation (2.7)) est d'aligner le gradient de traceur avec l'axe compressionnel de déformation $\mathbf{S}^-$ et d'amplifier fortement la norme du gradient. Si le gradient était aligné avec les axes compressionnel ou extensionnel de déformation (c'est-à-dire $\zeta = \pm\pi/2$), la déformation n'exercerait plus de rotation sur le gradient et $-\sigma \cos \zeta = 0$. Par contre, il y aurait croissance ou décroissance très forte du gradient (au taux $-\sigma \sin \zeta = \pm\sigma$). La rotation du gradient due à la déformation est la plus forte quand le gradient est aligné avec les bissectrices des axes de déformation ($\zeta = 0$ ou π). Dans ce cas, $-\sigma \cos \zeta = \pm\sigma$. Par contre, cela correspond à un taux de croissance nul des gradient ($-\sigma \sin \zeta = 0$).

La déformation a pour effet d'aligner le gradient de traceur avec l'axe compressionnel de déformation et de l'amplifier de façon exponentielle. Ces effets sont plus ou moins marqués selon l'orientation instantanée du gradient relativement aux axes de déformation.

2.3.3b Cas d'une vorticité pure

Le cas de la vorticité est bien plus simple. Prenons, par exemple, la fonction de courant

$$\psi = \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2) .$$

Les lignes de courant sont circulaires. La figure 2.4 montre qu'une tache de traceur va simplement être en rotation sans se déformer. De même, *le gradient est en rotation uniforme* au taux de rotation $\omega/2$. *Il n'y a ni croissance, ni décroissance des gradients.*

2.3.3c Cas du vortex ponctuel

Nous allons maintenant mettre en évidence pourquoi la rotation des axes de déformation est primordiale pour la dynamique du gradient de traceur. L'exemple le plus simple est le cas du vortex ponctuel, mais les remarques que nous allons faire s'appliquent aussi au cas plus général des vortex axisymétriques ou vortex circulaires d'extension finie dont on regarde l'effet à longue portée.

Le vortex ponctuel correspond à la fonction de courant suivante :

$$\psi = \frac{\Gamma}{4\pi} \log(x^2 + y^2) ,$$

⁵Puisque $\zeta = 2(\theta + \phi)$, il faut diviser par 2 l'équation d'orientation pour obtenir les termes qui influent directement sur l'orientation θ . D'où le $-\frac{\sigma}{2} \cos \zeta$ et non $-\sigma \cos \zeta$. Nous ferons la même chose pour les autres effets.

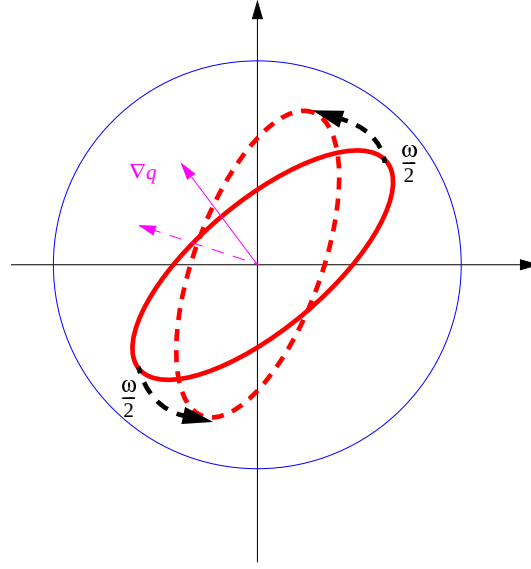


Figure 2.4: Cas d'un champ de vorticité. En bleu, une ligne de courant. En trait continu rouge, une tache de traceur elliptique à l'instant initial. En tirets rouges, la même tache mais plus tard. En mauve, les gradients de traceur correspondants. L'effet de la vorticité ($\omega/2$) est symbolisé par les tirets épais noirs.

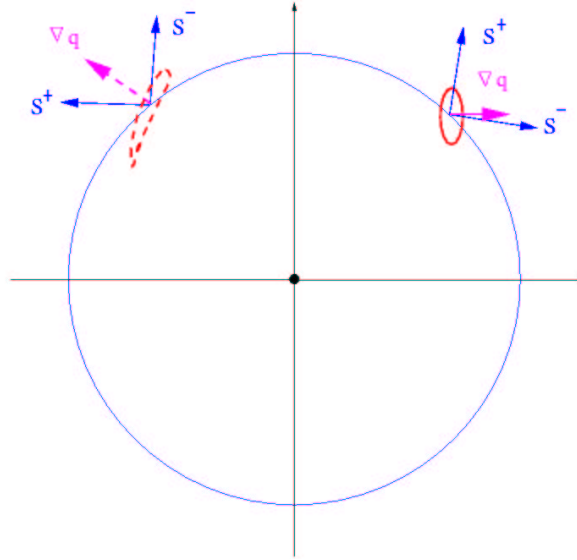


Figure 2.5: Cas d'un vortex ponctuel. En bleu, une ligne de courant. En trait continu rouge, une tache de traceur elliptique à l'instant initial. En tirets rouges, la même tache mais plus tard. En mauve, les gradients de traceur correspondants. Les axes en bleu sont les axes de déformation (vecteur propres de S).

avec Γ la circulation du vortex.

Cet écoulement se caractérise par le fait que la vorticit   ω est concentr  e    l'origine et nulle dans le reste de l'espace. Par contre, le taux de d  formation n'est pas nul et vaut $\sigma = 2\Gamma/2\pi r^2$ o   r est la distance au tourbillon. Si on calcule le crit  re de Weiss, on obtient $\sigma^2 - \omega^2 = 4\Gamma^2/4\pi^2 r^4 > 0$, donc ce crit  re pr  dit une croissance exponentielle des gradients de traceur. Or, on n'observe qu'une croissance lin  aire de ceux-ci, ce qui signifie que le crit  re de Weiss ne fonctionne pas.

La figure 2.5 montre l'  volution d'une tache de traceur (en rouge) dans cet   coulement. On peut voir que cette tache va lentement s'  tirer (en spirale) et s'aligner avec la direction orthoradiale. Le gradient est donc en rotation. La vorticit     tant nulle en dehors de l'origine, elle ne peut pas   tre la cause directe de cette rotation. Par contre, nous savons qu'il existe une d  formation non-nulle. Cette d  formation poss  de en particulier des axes qui sont eux aussi en rotation sur une trajectoire lagrangienne comme le montre le dessin. *C'est cette rotation qui va permettre au gradient de traceur de tourner.* Pour s'en convaincre, le taux de rotation du gradient lorsqu'il est radial vaut $\Omega = -\Gamma/r^2$, ce qui est exactement   gal    la rotation des axes de d  formation $\frac{D\phi}{Dt}$.

Cet exemple met donc en   vidence l'importance de la rotation des axes de d  formation pour la dynamique des gradients. Cette rotation a pour effet de mettre le gradient en rotation, tout comme la vorticit  . Pour voir cette rotation, il faut se placer dans un rep  re lagrangien (d'o   la d  riv  e lagrangienne $\frac{D}{Dt}$).

2.3.3d Variation du temps caract  ristique de la dynamique

Il y a un dernier effet qui va influencer la dynamique du gradient. L'  quation (2.9) pour l'orientation du gradient (mais aussi pour sa norme) s'adimensionne au point de vue du temps gr  ce au changement de variables entre τ et t dans l'  quation (2.8) :

$$\tau = \int_0^t \sigma(t') dt' .$$

Cette transformation a un effet important sur la dynamique compte tenu du fait que σ est variable dans le temps. L'  chelle de temps de la dynamique est donn  e par $Dt/D\tau$ qui repr  sente la variation de l'  chelle de temps normale Dt par rapport    la variation de l'  chelle de temps adimensionnelle $D\tau$. Cette   chelle de temps de la dynamique de la cascade est juste

$$\frac{Dt}{D\tau} = \sigma^{-1} .$$

Sa variation temporelle va ralentir ou acc  l  rer la dynamique des gradients dans le r  f  rentiel de temps classique t . Cette variation est simplement

$$\frac{D(\sigma^{-1})}{Dt} = -\frac{1}{\sigma^2} \frac{D\sigma}{Dt} = -s .$$

On voit donc que cette variation est   troitement li  e    la quantit   s introduit pr  c  demment.

Donc la variation de l'échelle de temps de la dynamique va induire un effet dynamique supplémentaire en ralentissant ou accélérant la rotation du gradient de traceur. Cela explique pourquoi la quantité $s = \frac{D\sigma}{Dt}/\sigma^2 = -D(\sigma^{-1})/Dt$ (évolution du temps caractéristique de la dynamique) intervient dans la direction préférentielle dans le régime de rotation.

2.3.3e Compétition déformation-rotation effective

Nous avons vu que l'effet de rotation due à la déformation pure dépend de l'orientation par rapport aux axes de déformation et que la rotation des axes de déformation doit être prise en compte dans le référentiel lagrangien. C'est donc bien la quantité $\zeta = 2(\theta + \phi)$ (ou une quantité analogue) qu'il faut étudier, puisqu'elle représente l'orientation du gradient relativement aux axes de déformation et c'est sa dynamique lagrangienne qui va permettre de comprendre la dynamique du gradient de traceur.

Afin d'explicitier le mécanisme d'alignement du gradient, nous allons nous placer dans le référentiel lié à la particule (et non plus un référentiel eulérien comme précédemment). Les axes de ce repère seront les axes de déformation et nous tiendrons compte de la rotation effective (c'est-à-dire la rotation due à la vorticit   et    la rotation des axes de d  formation).

Commen  ons par le cas o   la d  formation σ est plus forte que la rotation effective ($\omega + 2\frac{D\phi}{Dt}$). Prenons une tache de traceur (cf. figure 2.6a). Quels effets subit-elle? D'abord, elle subit l'effet de la rotation effective (fl  ches en bleu), c'est-  -dire une rotation due    la fois    la vorticit   (ω) et    la rotation des axes de d  formation ($2\frac{D\phi}{Dt}$). D'un autre c  t  , elle subit l'effet de la d  formation, qui a tendance    aligner la tache avec l'axe extensionnel de d  formation ($\mathbf{S}^+$) et    l'  tirer tr  s fortement le long de cet axe.

Comme l'effet de la d  formation sur l'orientation d  pend    la fois du taux de d  formation σ et de l'orientation $\cos \zeta$, il va exister des orientations o   l'effet de la d  formation est exactement l'oppos   de l'effet de la rotation effective, c'est-  -dire $\omega + 2\frac{D\phi}{Dt} - \sigma \cos \zeta = 0$ (cf. figure 2.6a).

Si la tache de traceur   tait dans une autre position (par exemple dans un autre cadran, comme sur la figure 2.6b), les diff  rents effets vont faire tourner la tache assez rapidement, ce qui va la ramener vers son orientation d'  quilibre, comme les   quations le montrent.

Nous voyons donc que la solution d'  quilibre d  pend des effets directs de la vorticit   (ω) et de la d  formation ($\sigma \cos \zeta$) sur la rotation du gradient ∇q mais aussi de l'effet indirect de la rotation des axes de d  formation $\frac{D\phi}{Dt}$.

Maintenant, examinons le cas o   la rotation effective $\omega + 2\frac{D\phi}{Dt}$ est plus forte que la d  formation σ (cf. figure 2.7). Il n'existe plus d'orientation d'  quilibre car la rotation effective est toujours plus forte que la d  formation m  me pour l'orientation o   l'effet de la d  formation est maximal ($\zeta = 0$ ou π). De ce fait, la tache de traceur sera toujours en rotation. Mais comme l'effet de la d  formation d  pend de l'orientation,

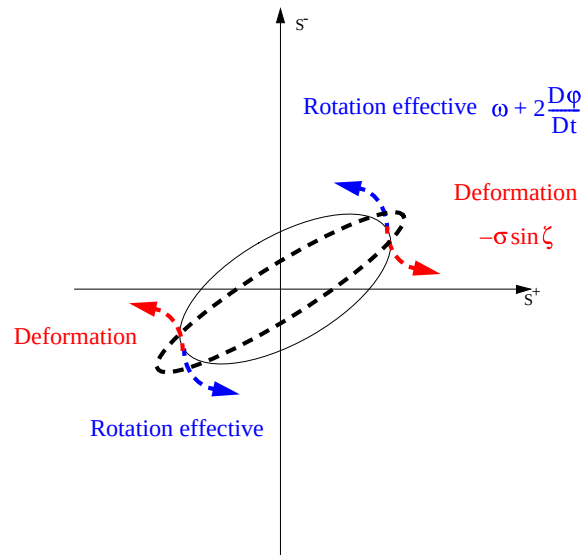


Figure 2.6a : Les effets de déformation sont dominants : une tache de traceur (en contour noir fin) va subir l'effet de la rotation effective (flèches en bleu) et l'effet de la déformation (flèches en rouge). On voit ici que ces effets sont opposés et que l'orientation de la tache de traceur est en équilibre. Il va simplement y avoir allongement de la tache (en tirets noir épais).

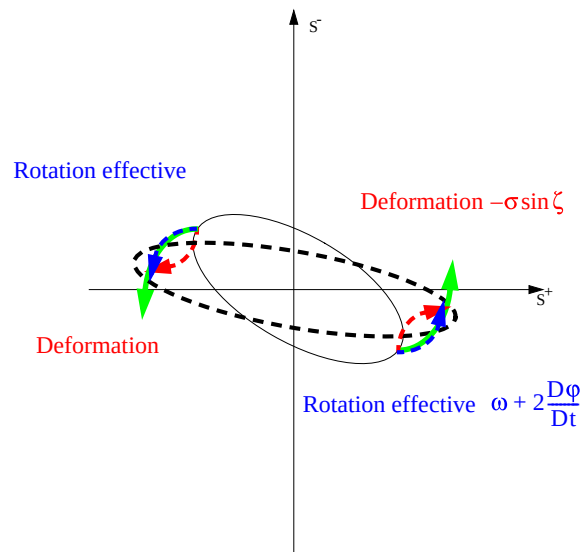


Figure 2.6b : Même légende que la figure précédente mais la tache de traceur est placée différemment. La flèche en vert est la résultante des effets de rotation effective et de déformation. La tache de traceur tourne très rapidement.

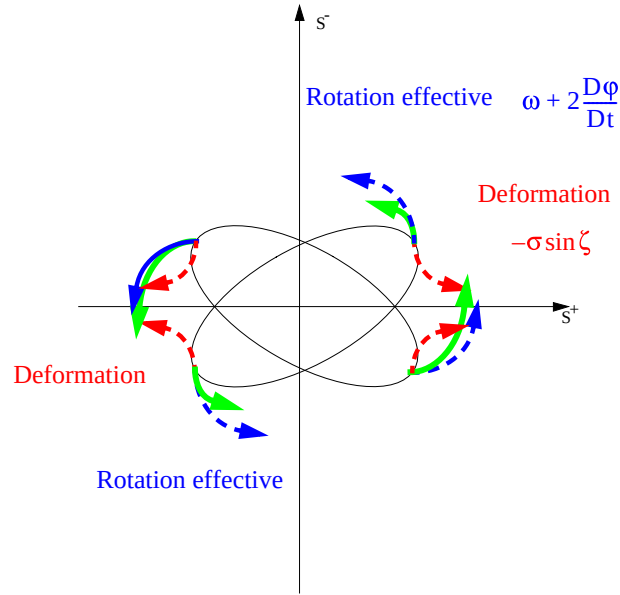


Figure 2.7: Les effets de rotation effective sont dominants : la signification des flèches est identique à celle des figures précédentes. La tache de traceur est en rotation pour les deux orientations sur la figure mais la rotation est plus ou moins forte.

la rotation sera non-uniforme. En particulier, il y aura une orientation où le taux de rotation sera minimal ($\zeta = \alpha$). Le tache de traceur passera statistiquement plus de temps près de cette orientation que près d'autres orientations.

2.3.4 Résumé des résultats

Nous venons de voir quelle était la dynamique du gradient de traceur. *Le mécanisme majeur de cette dynamique réside dans la compétition entre les effets de déformation et les effets de rotation effective (vorticité et rotation des axes de déformation). Cette compétition peut être quantifiée à travers une seule quantité r :*

$$r = \frac{\omega + 2 \frac{D\phi}{Dt}}{\sigma} .$$

Un deuxième mécanisme est présent pour la dynamique et correspond à *l'évolution de l'échelle de temps de la dynamique le long de la trajectoire lagrangienne*. En effet, le temps typique de la dynamique est donné par σ^{-1} . L'évolution de σ va donc influencer sur cette échelle de temps. La quantité adimensionnelle qui contrôle cette évolution peut être la quantité s :

$$s = \frac{1}{\sigma^2} \frac{D\sigma}{Dt} = - \frac{D(\sigma^{-1})}{Dt} .$$

Quand les effets de déformation dominent les effets de rotation effective (c'est-à-dire quand $|r| \leq 1$), nous avons montré qu'il y avait deux orientations d'équilibre pour le gradient, une stable et une instable. Le gradient devrait s'aligner très rapidement

avec l'orientation d'équilibre stable, en un temps typique donné par σ^{-1} . Associée à cet alignement, il y a croissance exponentielle des gradients si $|r| < 1$ et simplement croissance linéaire si $|r| = 1$.

Quand les effets de rotation effective dominant (c'est-à-dire $|r| > 1$), le gradient est en rotation non-uniforme dans le repère lié aux axes de déformation. Néanmoins, comme le taux de rotation varie temporellement, le gradient sera statistiquement plus proche de l'orientation où ce taux sera minimal. Cette orientation dépend à la fois de r mais aussi de s puisque la quantité s est associée à l'évolution de l'échelle de temps de la dynamique. Ce régime correspond à une faible croissance ou décroissance de la norme du gradient et le signe de cette croissance est relié à celui de $-s$.

2.4 Validation de nos résultats

Après avoir expliqué nos résultats théoriques, nous pouvons examiner leur validité par rapport à des solutions analytiques connues (le tourbillon axisymétrique par exemple) et par rapport à des simulations numériques de turbulence bidimensionnelle.

2.4.1 Vortex axisymétrique

Un premier cas où nos résultats se distinguent du critère d'Okubo-Weiss est le vortex axisymétrique. En effet, le critère r vaut exactement ± 1 dans ce cas (Lapeyre et al. 1999). Notre théorie prédit une croissance linéaire des gradients et un alignement à 45° des axes de déformation, ce qui est bien le cas. Le critère de Weiss, lui, ne caractérise pas bien la dynamique puisqu'il est soit positif et prévoit une croissance exponentielle des gradients, soit négatif et ne prévoit pas de croissance des gradients.

2.4.2 Validation statistique des alignements

Nous allons examiner la pertinence de nos résultats théoriques à partir de simulations de turbulence bidimensionnelle. À cette fin, nous avons utilisé des simulations numériques de turbulence bidimensionnelle en décroissance libre à une résolution de 1024^2 dont le code pseudo-spectral est détaillé dans Hua et Haidvogel (1986). Nous considérons une simulation particulière mais ces résultats sont tout aussi valides pour d'autres simulations comme nous avons pu l'observer. Cette simulation possède une viscosité telle que le nombre de Reynolds vaut approximativement 3.5×10^4 . Le traqueur que nous allons examiner est la vorticit  . D'autres simulations avec un scalaire passif montrent des r  sultats analogues et une comparaison entre vorticit   et scalaire passif est d  volue au chapitre 3.

Examinons les propri  t  s d'alignement dans les simulations afin de v  rifier les pr  dictions de notre th  orie. On s'int  resse d'abord    l'alignement dans les r  gions domin  es par la d  formation ($|r| \leq 1$). Nous avons   tabli que ζ doit   tre une fonction de r dans ces r  gions. La loi de probabilit   jointe de $\zeta + \pi/2$ par rapport    r (figure 2.8a) montre que ζ est pr  f  rentiellement entre $-\pi$ et 0 , ce qui indique que les gradients pr  f  rent les r  gions de croissance (car $\sin \zeta$ est n  gatif et donc $\frac{D \log |\nabla q|^2}{Dt} =$

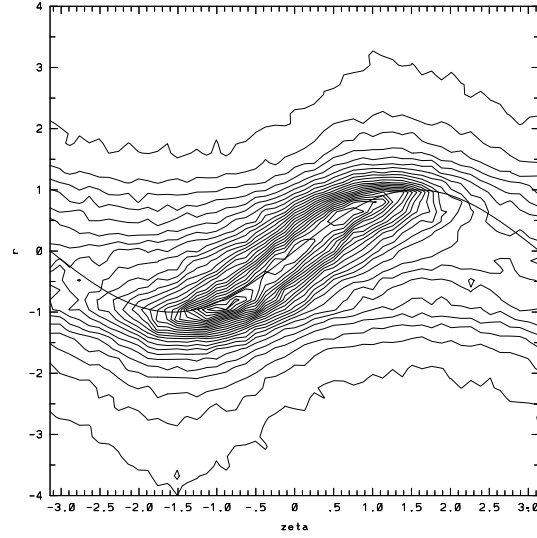


Figure 2.8a : Loi de probabilité jointe de $\zeta + \pi/2$ (en abscisse) et r (en ordonnée). La courbe en gras correspond à $\cos \zeta$. On a pris $\zeta + \pi/2$ afin d'améliorer la lecture de la figure.

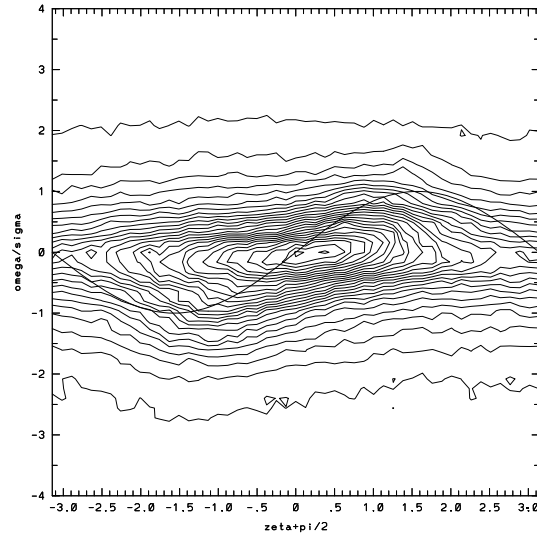


Figure 2.8b : Loi de probabilité jointe de $\zeta + \pi/2$ (en abscisse) et ω/σ (en ordonnée). La courbe en gras correspond à $\cos \zeta$.

$-\sigma \sin \zeta$ est positif). De plus, ζ se trouve bien le long de la courbe $r = \cos \zeta$. Ces deux conclusions signifient qu'il y a *alignement avec l'orientation stable* ζ_- .

Afin de contraster ce résultat avec les résultats d'Okubo-Weiss, on peut montrer la loi de probabilité jointe de $\zeta + \pi/2$ en fonction de ω/σ . Si les hypothèses d'Okubo et de Weiss étaient valides, on s'attendrait à obtenir la même genre de loi : $\zeta \approx -\arccos(\omega/\sigma)$. En effet, si on effectue les mêmes développements analytiques que les nôtres, mais en utilisant l'hypothèse de stationnarité du tenseur de gradient de

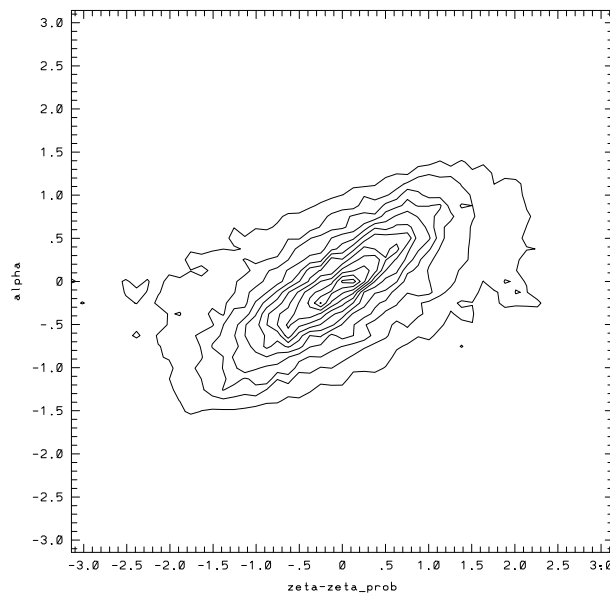


Figure 2.9: Loi de probabilité jointe de $\zeta - \zeta_{prob}$ (en abscisse) et de $\alpha - \zeta_{prob}$ (en ordonnée) pour des forts gradients et $|r| > 3$. L'ajout de $\zeta_{prob} = (1 - \text{sign}(r))\pi/2$ permet de confondre les deux maxima de probabilité (autour de $\zeta = 0$ et $\zeta = \pi$) à l'origine.

vitesse, on obtient un alignement avec un vecteur propre de $[\nabla \mathbf{u}]^*$ dans les régions où $\sigma^2 - \omega^2 > 0$. Or il n'en est rien (figure 2.8b). Au contraire, les deux quantités semblent presque indépendantes. La seule région où $\zeta \approx -\arccos(\omega/\sigma)$ correspond à $|\omega/\sigma| \approx 0$, c'est-à-dire au niveau des points selle entre les vortex, comme l'ont observé Basdevant et Philipovitch (1994) et Hua et Klein (1998). Cela confirme que nos résultats capturent bien la dynamique au contraire du critère d'Okubo-Weiss.

On peut aussi examiner l'alignement dans les régions dominées par la rotation effective par une loi de probabilité jointe de $\zeta - \zeta_{prob}$ par rapport à $\alpha - \zeta_{prob}$. Nous avons ajouté le terme $\zeta_{prob} = (1 - \text{sign}(r))\pi/2$ afin de ramener autour de 0 les valeurs de ζ autour de π . La figure 2.9 montre qu'il y a une bonne corrélation entre $\zeta - \zeta_{prob}$ et $\alpha - \zeta_{prob}$ quand $|r| > 3$. Quand $|r|$ s'approche de 1 par contre, l'alignement diminue mais reste toujours valide (non présenté). Cela indique donc bien que cet alignement avec α est pertinent dans les régions de forte rotation effective.

D'autres diagnostics statistiques sont proposés en particulier dans Klein et al. (2000) et montrent que les gradients de traceur s'alignent bien mieux avec les orientations préférentielles que nous avons dégagées qu'avec les orientations antérieures (vecteurs propres des tenseurs de gradient de vitesse ou d'accélération, ou du tenseur de déformation).

2.4.3 Validation dans l'espace physique

Comme la simulation semble valider du point de vue statistique nos résultats, on peut examiner les caractéristiques spatiales de la cascade et des alignements afin de

tirer quelques remarques sur les processus de cascade dans l'espace physique. Mais ces remarques sont tout au plus qualitatives et nécessiteraient d'être confirmées dans d'autres types d'écoulement pour avoir une portée générale.

Pour cette étude, on a sélectionné l'interaction entre deux vortex dans une simulation numérique similaire à la précédente. Le champ de vorticité ω est présenté par la figure 2.10a et montre deux vortex cycloniques ($\omega > 0$) qui sont en train d'étirer un filament (en jaune). La résolution spatiale est de 500 points sur 200, ce qui implique que les deux vortex sont bien résolus spatialement.

2.4.3a Quantité r

Consid r ns la quantité r qui devrait permettre de déterminer le régime dynamique du gradient de traceur (déformation ou rotation effective) sur la figure 2.10b. Le code de couleur est comme suit : en bleu et rouge, on a représenté les régions dominées par la rotation effective ($|r| > 1$), mais de signes contraires (rouge pour $r > 1$ et bleu pour $r < -1$); en vert, on a représenté les régions dominées par la déformation ($|r| < 1$). La première chose que l'on remarque est que ce champ est relativement lisse (c'est-à-dire avec un bruit de petite échelle assez faible) mais avec des discontinuités très marquées.

Examin ns la structure du vortex de gauche. Celui-ci présente un cœur où les effets de rotation effective sont dominants ($r > 1$)   cause de la forte vorticité intérieure ω .   l'extérieur, on observe une région (le long du grand axe de l'ellipse) où la déformation domine ($|r| < 1$)   cause d'un fort taux de déformation σ (on observe que σ est maximal dans cette région). On observe aussi une région (le long du petit axe de l'ellipse) où les effets de rotation effective sont dominants ($r < -1$)   cause d'une forte rotation des axes de déformation $2 D\phi/Dt$.

Le sens de rotation dans le repère de la déformation étant donné par r , on voit que cette rotation va dans des sens opposés à l'intérieur ($r > 1$) et à l'extérieur ($r < -1$) du vortex. Cela est dû à une très forte rotation des axes de déformation à l'extérieur du tourbillon, rotation dans le sens opposé à celui de la rotation due à la vorticité à l'intérieur du tourbillon. *La rotation des axes de déformation peut donc être aussi forte à l'extérieur du vortex que la vorticité à l'intérieur du vortex.* Ce phénomène a été observé pour tous les vortex dans les différentes simulations examinées et on le retrouve dans le cas de l'ellipse de Kirchhoff (non présenté), ce qui pourrait indiquer un aspect générique pour les tourbillons de forme elliptique.

Pour le deuxième vortex, le motif est plus complexe. Bien que la vorticité soit toujours du même signe, le critère r présente deux bandes de signe opposé ($r > 1$ et $r < -1$) qui s'enroulent en spirale à l'intérieur du vortex. Entre les deux vortex, règne une région dominée par la déformation due aux deux vortex.

2.4.3b Relation entre les gradients de traceur et r

On peut comparer la figure précédente à la forme des forts gradients de vorticité ou de traceur. On représente seulement les gradients qui dépassent une certaine valeur (arbitraire). La figure 2.10c montre que ce champ possède une structure filamentaire et dont les filaments semblent empilés les uns contre les autres, en particulier dans

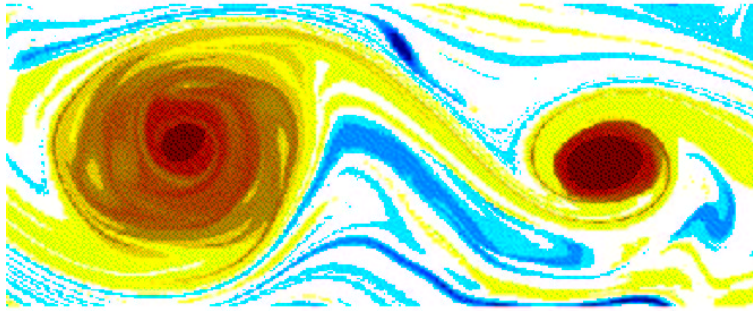


Figure 2.10a : Vorticité ω . En jaune/rouge/marron, vorticité positive de plus en plus forte. En bleu clair/bleu foncé, vorticité négative de plus en plus forte.

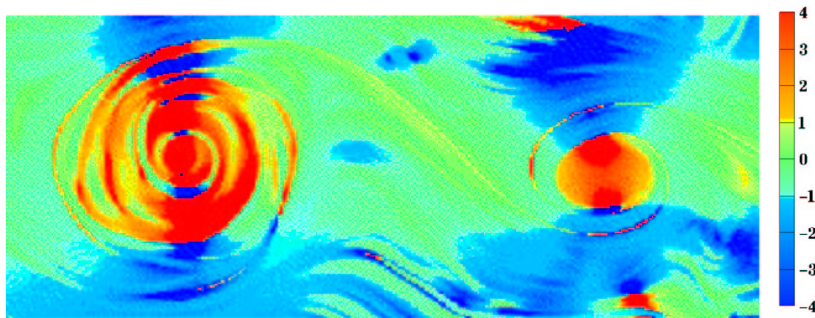


Figure 2.10b : Quantité r



Figure 2.10c : Gradient de vorticité au dessus d'un certain seuil



Figure 2.10d : Gradient de traceur au dessus d'un certain seuil

la région entre les deux tourbillons. Les forts gradients de vorticité sont situés sur les bords des vortex ainsi qu’au niveau du filament qui est fortement étiré par les deux vortex.

En superposant cette figure avec la figure de r on s’aperçoit que les forts gradients au bord des vortex se situent au niveau des *discontinuités* de r qui séparent en particulier les régions de r positif aux régions de r négatif (non présenté). Cela fonctionne particulièrement pour la forme en spirale du vortex de gauche et cette concordance des forts gradients et des fortes discontinuités de r est aussi observée dans d’autres simulations (par exemple, dans le cas de la formation d’un tripole (non présenté)).

Si on considère un scalaire réellement passif⁶, on obtient des forts gradients aux mêmes positions dans l’espace physique (figure 2.10d). On observe cependant des amplitudes différentes pour les deux gradients : de façon générale, les gradients de scalaire passif sont plus intenses que les gradients de vorticité mais on peut trouver aussi des régions où les gradients de vorticité sont plus intenses que les gradients de scalaire passif. Cette différence est due au fait que la norme des gradients dépend de toute l’histoire lagrangienne (cf.  q. (2.6a)), au contraire de l’orientation qui dépend plus des propriétés locales de l’écoulement.

Il semblerait donc qu’il y ait deux types de gradients. Ceux associés aux discontinuités de r semblent situées au niveau de barrières au transport. Par exemple on pourrait placer dans cette catégorie, les gradients que l’on observe le long des bords du petit vortex, en dehors des régions où deux filaments s’intersectent. Une autre catégorie correspondrait aux gradients dans les régions où les effets de déformation dominant ($|r| < 1$), là où on s’attend à ce que la cascade soit la plus effective. Ces gradients seraient dans des régions de forte déformation comme, par exemple, le long du filament qui s’étire entre les deux vortex. Nous allons revenir à ces gradients produits par la cascade avec un autre diagnostic.

2.4.3c *Alignement avec les directions privilégiées*

Après avoir examiné l’aspect descriptif de la quantité r , on peut s’intéresser à l’alignement des gradients avec les directions préférentielles (figure 2.11a). Dans les régions dominées par la déformation ($|r| \leq 1$), on marque en rouge (respectivement en vert) les points où l’angle du gradient de traceur avec l’orientation d’équilibre stable ζ_- (resp. instable ζ_+) est inférieur à 15° . Dans les régions dominées par la rotation effective ($|r| > 1$), on marque en bleu les points où l’angle du gradient de traceur avec l’orientation α est inférieur à 15° .

Tout d’abord, on remarque que les régions d’alignement sont très fortement concentrées dans certaines zones de l’espace physique. Il y a aussi une sorte de bruit petite échelle (qui se traduit par une sorte de “pointillisme”) et qui provient de l’importance des petites échelles pour les gradients : pour un spectre typique de traceur en k^{-1} , le spectre des gradients sera en k^1 , ce qui rend les petites échelles importantes et ce phénomène est plus marqué pour l’orientation des gradients que pour

⁶On pourrait objecter que les gradients de vorticité sont particuliers puisque reliés à la dynamique mais nous verrons au chapitre 3 que ce n’est pas exactement le cas.

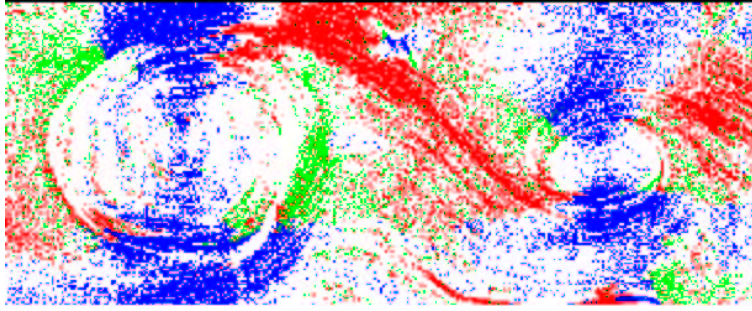


Figure 2.11a : Alignements : en rouge, avec orientation stable ζ_- pour $|r| < 1$; en vert avec orientation instable ζ_+ pour $|r| < 1$; en bleu avec orientation préférentielle α pour $|r| > 1$.

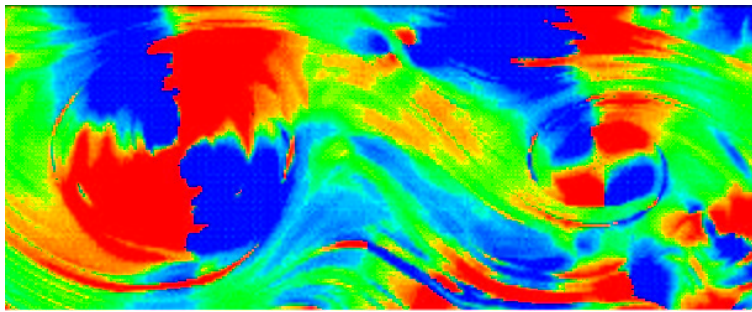


Figure 2.11b : Quantité $-s$. En rouge $-s > 0.15$; en bleu $-s < -0.15$; en vert $|s| < 0.15$.

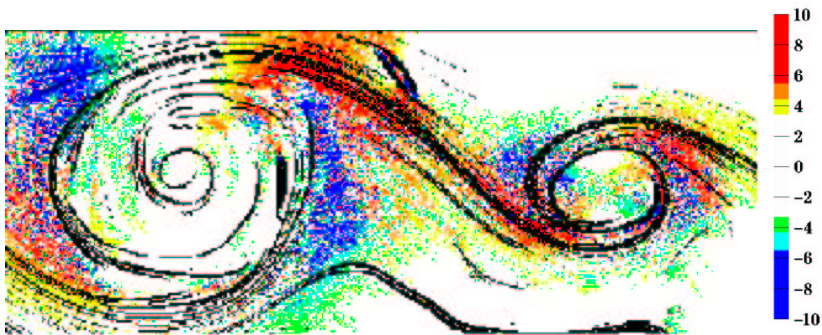


Figure 2.11c : Taux de croissance exponentielle $-\sigma \sin \zeta$ auquel on a superposé les gradients de vortacité.

leur norme. Néanmoins, l'alignement est organisé au niveau des grandes échelles en forme de taches de couleur autour des tourbillons et au niveau des filaments.

Un examen détaillé des régions d'alignement indique que dans certaines régions autour des tourbillons ainsi que dans les régions de forte déformation (entre les deux tourbillons), le gradient s'aligne bien avec les orientations préférentielles. Cet

alignement s'observe aussi bien dans les régions de rotation effective que dans les régions de déformation.

Dans les régions de rotation effective, on observe l'alignement à l'extérieur des tourbillons mais rarement à l'intérieur de ceux-ci. Une explication possible pourrait être liée à la diffusion susceptible d'avoir un effet important sur la dynamique de l'orientation pour les faibles gradients de traceur (Constantin et al. 1995). Une autre explication pourrait venir des faibles valeurs du taux de déformation à l'intérieur des vortex qui impliquent un temps assez long pour que la dynamique des gradients soient à l'équilibre.

Dans les régions de déformation, on observe un alignement avec le point fixe stable ou le point fixe instable de l'équation d'orientation. On observe plus souvent un alignement avec le point fixe stable qu'avec le point fixe instable, en particulier dans la région de fort étirement du filament entre les deux tourbillons. Ce résultat n'était pas attendu puisque l'on a montré que le gradient de traceur devrait s'aligner avec l'orientation point fixe stable. Cela pourrait signifier l'existence d'un mécanisme qui stabilise la direction instable ζ_+ (par exemple, à cause de la non-stationnarité de r et de s) ou qui crée un alignement *temporaire* du gradient avec elle.

2.4.3d Taux de croissance et s

Si on calcule maintenant la quantité $-s$, on peut voir une forme en quadrupole autour des vortex (figure 2.11b). Les régions en rouge correspondent à $-s > 0.15$, les régions en bleu à $-s < -0.15$ et les régions en vert à $|s| < 0.15$. Les fortes valeurs de s se trouvent plutôt à l'intérieur des vortex ou dans les régions de forte rotation des axes de déformation.

On peut aussi examiner le taux de croissance exponentielle des gradients $\frac{D \log |\nabla q|^2}{Dt} = -\sigma \sin \zeta$ (figure 2.11c). On observe que ce taux est très fort à l'extérieur des vortex, ce qui est dû aux fortes valeurs du taux de déformation. De plus, les régions de fort taux de croissance ou décroissance correspondent à des régions où il y a un fort alignement avec les orientations préférentielles (comparer les figures 2.11c et 2.11a). Dans la périphérie immédiate des tourbillons, on peut voir que les régions d'alignement et de taux de croissance sont corrélées : pour un alignement avec ζ_- , on observe un fort taux de croissance alors que pour un alignement avec ζ_+ , on a un fort taux de décroissance ; quand il y a alignement avec α , le taux de croissance est relativement faible.

Considérons la forme générale de $-\sigma \sin \zeta$ (figure 2.11c) : à l'extérieur des tourbillons, on a une forme quadrupolaire avec des régions de forte croissance (régions rouges) et des régions de forte décroissance (régions bleues). On vient aussi d'observer une forme quadrupolaire pour s . Si nous comparons les figures 2.11b et 2.11c, nous remarquons que les régions de croissance des gradients $-\sigma \sin \zeta > 0$ semblent associées à $-s$ positif alors que les régions de décroissance $-\sigma \sin \zeta < 0$ semblent associées à $-s$ négatif.

Nous avons vu précédemment, que dans les régions de rotation effective ($|r| > 1$), le signe du taux de croissance était corrélé avec le signe de $-s$ à cause de l'équation

régime	$ r < 1$	$ r > 1$	$ r > 1$	$ r < 1$
alignement	ζ_-	α	α	ζ_+
$-s$	> 0	> 0	< 0	< 0
$-\sin \zeta$	> 0	> 0	< 0	< 0

Tableau 2.1: De gauche à droite, évolution de différentes quantités le long d'une trajectoire lagrangienne. La première ligne correspond au régime dynamique (déformation ou rotation effective). La deuxième ligne correspond à l'orientation d'alignement. La troisième ligne correspond à la quantité $-s$. La quatrième ligne correspond au taux de croissance des gradients $-\sin \zeta$.

(2.14). Ici, nous observons que c'est aussi le cas dans certaines parties des régions de déformation ($|r| < 1$). Cela pourrait signifier qu'il y a une certaine continuité pour l'alignement entre les différents régimes et cela pourrait entraîner un alignement temporaire du gradient de traceur avec ζ_+ .

2.4.3e Tentative d'explication de l'alignement avec l'orientation instable

Nous allons présenter un argument très qualitatif pour expliquer l'alignement observé avec l'orientation instable ζ_+ . Cet argument est fondé sur l'observation des différentes figures présentées dans l'espace physique qui montrent une certaine continuité dans le taux de croissance des gradients. Nous allons donner l'argument majeur pour expliquer l'alignement avec ζ_+ puis nous décrirons l'évolution de l'alignement pour une particule fluide qui tourne autour du tourbillon.

Examinons le tourbillon de gauche des figures précédentes. On observe qu'en le parcourant cycloniquement (puisque ω est positif), on passe d'une région de forte cascade associée à un alignement avec l'orientation stable ζ_- (en rouge sur la figure 2.11a), à un alignement avec l'orientation préférentielle α des régions de rotation effective (en bleu). Dans ces régions, il y a une corrélation entre le taux de croissance de la norme des gradients $-\sin \zeta$ et $-s$, et ce taux passe d'une valeur positive à une valeur négative (comme $-s$). Enfin, on passe dans une région d'alignement avec l'orientation instable ζ_+ dans une région dominées par la déformation. Vu à travers la valeur du taux de croissance des gradient de traceur $D \log |\nabla q| / Dt = -\sin \zeta$ (en particulier son signe), il semble qu'il y ait *une continuité dans l'orientation du gradient et son alignement avec les directions préférentielles*, comme l'indique le tableau 2.1. On peut développer un argument qui utilise cette continuité.

Examinons l'évolution de l'orientation du gradient de traceur lorsque l'on passe d'une région de rotation effective ($|r| > 1$) à une région de déformation ($|r| < 1$). Pour le tourbillon de gauche des figures précédentes, cela correspond à passer de $r < -1$ et $s > 0$ à $-1 < r < 1$ et s toujours positif mais faible. Examinons un diagramme exprimant $\frac{D\zeta}{Dt}$ en fonction de ζ (figure 2.12). À la fin de la phase de

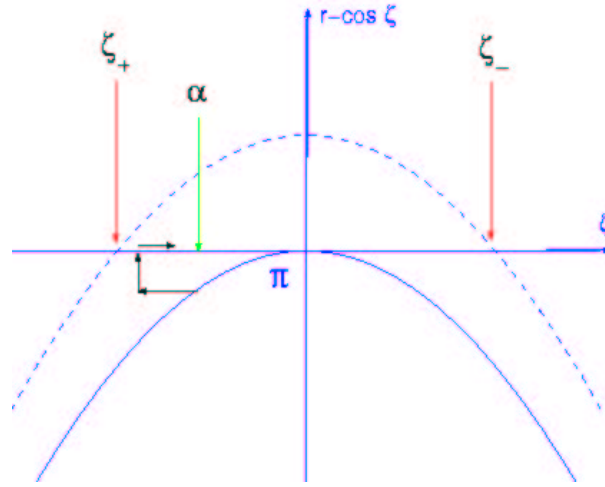


Figure 2.12: Dynamique de ζ quand r varie lentement. Les courbes bleues représentent $\frac{D\zeta}{D\tau} = r - \cos \zeta$ en fonction de ζ : en trait continu, pour $r = -1$; en tirets, pour $r = -0.95$. Il y a un seul point fixe pour $r = -1$ et deux points fixes pour $r = -0.95$. On a matérialisé la valeur de α dans la phase 4. Les flèches noires symbolisent l'évolution de ζ .

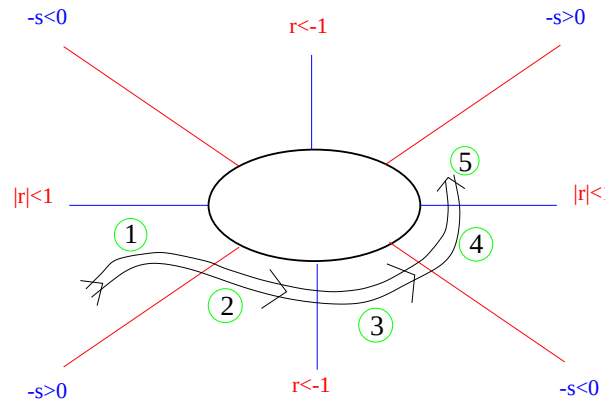


Figure 2.13: Trajectoire d'une particule autour d'un vortex. En vert, les différentes étapes de la trajectoire (leurs conséquences sur l'alignement sont détaillées dans le texte). En rouge, les différentes régions de r , délimitées par les lignes rouges. En rouge, les différentes régions de s , délimitées par les lignes bleues.

rotation effective, le gradient est aligné avec la direction indiquée par α (donc $\zeta = \alpha$) et r s'approche de -1 tout en étant inférieur à -1 . Comme s/r est négatif et plutôt faible, on a $\alpha < \pi$ (cf. équ. (2.13)) et $\pi - \alpha$ faible.

Pour $r = -1$, il y a un seul point fixe pour l'équation d'orientation comme la courbe en trait continu l'indique (une seule intersection avec l'axe) ; ce point fixe correspond à $\zeta_+ = \zeta_- = \pi$ et est légèrement supérieur à α . Cela signifie que $\frac{D\zeta}{D\tau} < 0$ au niveau de α . Donc ζ va s'éloigner de α (flèche noire horizontale qui part de α sur

la figure).

Dans le même temps, r se met à augmenter rapidement et se trouve maintenant entre -1 et 1 (par exemple, $r = 0.95$ sur la figure 2.12), ce qui correspond à un régime dominé par la déformation ($|r| < 1$). Il existe maintenant deux orientations d'équilibre $\zeta_{\pm}$ comme la courbe en tirets le montre par ses deux intersections avec l'axe horizontal sur le dessin de la figure 2.12. Ces deux orientations sont à égale distance de π . De plus ζ_+ est inférieur à π .

On peut supposer que l'orientation du gradient n'a pas eu le temps de s'ajuster au nouveau régime dynamique du gradient lorsque r est passé d'une valeur inférieure à -1 à une valeur supérieure. On voit alors que ζ (flèche noire verticale) se trouve plus proche de ζ_+ que de ζ_- .

On obtient donc un alignement temporaire avec ζ_+ . Puis, l'orientation ζ va s'écarter du point fixe instable ζ_+ (flèche horizontale le long de l'axe sur la figure 2.12) car $D\zeta/Dt > 0$ et $D\zeta_+/Dt < 0$ (car $Dr/Dt > 0$).

On peut inclure ce mécanisme dans l'évolution du gradient le long d'une trajectoire lagrangienne. Considérons une particule se faisant piéger autour du vortex au niveau des régions dominées par la déformation $|r| < 1$ (cf. figure 2.13). On peut penser que le gradient de traceur va s'aligner très rapidement avec l'orientation stable ζ_- dans ces régions (c'est-à-dire $|r| < 1$) à cause du mécanisme d'alignement (phase 1, $|r| < 1$ et $-s < 0$).

Supposons maintenant que le gradient de traceur de cette particule reste en équilibre avec les valeurs locales des quantités dynamiques r et s , c'est-à-dire que ces quantités évoluent lentement comparées à la dynamique du gradient. Le gradient de traceur va passer assez facilement à un alignement avec l'orientation préférentielle α quand $r < -1$ (phase 2, $r < -1$ et $-s > 0$). Ce passage est assez facile car l'orientation préférentielle α est relativement proche de l'orientation ζ_- : les deux orientations préférentielles donnent le même signe positif pour le taux de croissance (d'après les équations (2.11) et (2.14)).

Cet alignement avec α va se poursuivre dans la région $r < -1$ (phase 3, $r < -1$ et $-s < 0$). Or, dans cette région, on a un taux de croissance des gradients négatif à cause du signe de s (cf. éq. (2.14)). Cela entraîne alors que le gradient de traceur de la particule a un taux de croissance négatif juste avant que cette particule revienne dans la région de déformation (phase 4, $|r| < 1$ et $-s < 0$). Le gradient de traceur de la particule devrait donc se trouver plus près de l'orientation instable ζ_+ que de l'orientation ζ_- et ce gradient devrait passer un temps non négligeable près de cette orientation instable comme on l'a expliqué par l'argument de la figure 2.12. Après avoir été temporairement proche de ζ_+ , l'orientation ζ va s'en écarter et il y aura ensuite alignement avec la direction stable ζ_- (phase 5 de la figure 2.13).

Ce scénario qualitatif est fondé essentiellement sur la contiguïté des régions d'alignements différents le long des trajectoires lagrangiennes (c'est-à-dire des couleurs différentes de la figure 2.11a) et sur le fait que l'alignement avec α implique que le taux de croissance des gradients est de signe opposé à s dans les régions de rotation ef-

fective alors que les orientations d'équilibre des régions de déformation correspondent à des taux de croissance de signe opposé.

Bien sûr, pour être validé, il faudrait examiner l'évolution des alignements le long de trajectoires lagrangiennes, ce qui sera fait ultérieurement.

2.5 Discussion

2.5.1 Relation avec les accélérations lagrangiennes

Dans nos résultats, nous avons mis en évidence deux quantités fondamentales pour la dynamique : r et s . La première fait intervenir $\frac{D\phi}{Dt}$ qui est le taux de rotation des axes de déformation, qui n'était pas pris en compte par le critère d'Okubo-Weiss. La seconde fait intervenir $\frac{D\sigma}{Dt}$. Les quantités $\frac{D\phi}{Dt}$ et $\frac{D\sigma}{Dt}$ s'expriment en fonction des tenseurs de gradients de vitesse et d'accélération :

$$2\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\sigma_s(D\sigma_n/Dt) - \sigma_n(D\sigma_s/Dt)}{\sigma^2},$$

$$\frac{D\sigma}{Dt} = \frac{\sigma_n(D\sigma_n/Dt) + \sigma_s(D\sigma_s/Dt)}{\sigma},$$

avec

$$\frac{D\sigma_n}{Dt} = \partial_x \left(\frac{Du}{Dt} \right) - \partial_y \left(\frac{Dv}{Dt} \right),$$

$$\frac{D\sigma_s}{Dt} = \partial_y \left(\frac{Du}{Dt} \right) + \partial_x \left(\frac{Dv}{Dt} \right).$$

On peut réexprimer ces dernières quantités en fonction de la pression :

$$\frac{D\sigma_n}{Dt} = -(\partial_{xx} - \partial_{yy})P,$$

$$\frac{D\sigma_s}{Dt} = -2\partial_{xy}P.$$

Ces quantités font intervenir la partie à trace nulle de la hessienne de pression. Si cette partie était nulle, la rotation des axes de déformation $\frac{D\phi}{Dt}$ ainsi que la quantité s s'annuleraient aussi. Ceci est à contraster avec le cas tridimensionnel où il existe une composante locale pour la rotation des axes de déformation qui dépend des composantes du vecteur vorticité, mais nous y reviendrons au chapitre 4.

Nous voyons donc que l'effet de la dynamique liée aux équations d'Euler et aux accélérations lagrangiennes se traduit par la rotation des axes de rotation et par la variation du taux de déformation. Les quantités r et s prennent bien en compte cette dynamique, au contraire du critère d'Okubo-Weiss.

2.5.2  chelle de temps de la dynamique des gradients

Comme les équations de la norme et de la direction des gradients le montrent, on peut adimensionner de façon pertinente le temps par l'inverse du taux de déformation,

ou plus exactement, on peut définir un temps adimensionnel par :

$$\tau = \int_0^t \sigma(t') dt' .$$

L'échelle de temps caractéristique de la dynamique du gradient est donc reliée au taux de déformation. Or la moyenne r. m. s. du taux de déformation est égale à la moyenne r. m. s. de la vorticité, donc l'échelle de temps de la dynamique est reliée à l'enstrophie. Les résultats théoriques ont montré que l'alignement est caractérisé par une dynamique qui dépend de cette échelle de temps dans les régions dominées par la rotation effective puisque l'alignement du gradient de traceur se fait avec l'orientation α correspondant au minimum du taux de rotation (donc à l'orientation où le gradient passe le plus de temps). On s'attend donc à un alignement des gradients avec les directions préférentielles en fonction des quantités locales r et s . Au contraire, la norme du gradient dépend de toute l'histoire lagrangienne de la particule puisqu'elle se déduit de

$$|\nabla q| = |\nabla q(t=0)| \exp \left(\int_0^t \sigma(t') \sin \zeta(t') dt' \right) ,$$

où l'intégrale se fait le long de la trajectoire lagrangienne.

Le fait que la norme du gradient dépende de toute l'histoire lagrangienne alors que la direction ne dépend que de l'histoire récente est une idée assez répandue en turbulence (cf. par exemple, Balluch et Haynes (1997)) mais jamais réellement prouvée à notre connaissance, si ce n'est par le théorème d'Osseledec (1968) (voir en annexe A.5).

2.5.3 Discussion des hypothèses

Les résultats que nous venons de décrire sont fondés sur l'hypothèse que la vitesse et l'accélération (ou plus exactement les tenseurs de leur gradient) sont les quantités clés de la cascade vers les petites échelles. Cela s'exprime en disant que les quantités r et s sont lentement variables le long des trajectoires lagrangiennes. En fait, cela est dû à aux propriétés grande échelle des tenseurs de gradient de vitesse et d'accélération qui permettent aux particules de ressentir de façon cohérente leur action. Les résultats expérimentaux des simulations numériques confirment que l'on a une assez bonne estimation des orientations privilégiées de l'écoulement, ce qui est un premier pas pour valider, a posteriori, notre approche.

Nous avons posé comme hypothèse que r et s sont lentement variables le long de trajectoires lagrangiennes. Un moyen qualitatif de vérifier cette hypothèse est d'examiner les spectres spatiaux et de voir s'ils sont dominés par les petites échelles : s'ils le sont, cela signifierait qu'une particule qui se déplace dans ce champ va surtout sentir les petites échelles (correspondant à un signal non cohérent) et donc cette particule va subir une déformation aléatoire dans le temps à la Kraichnan (1974) et notre démarche ne serait pas valide. Si au contraire, ils sont dominés par les grandes échelles, il faut prendre en compte r et s .

Examinons les spectres des quantités dimensionnées reliées à notre approximation. La figure 2.14 présente les spectres du taux de déformation (courbe A), de

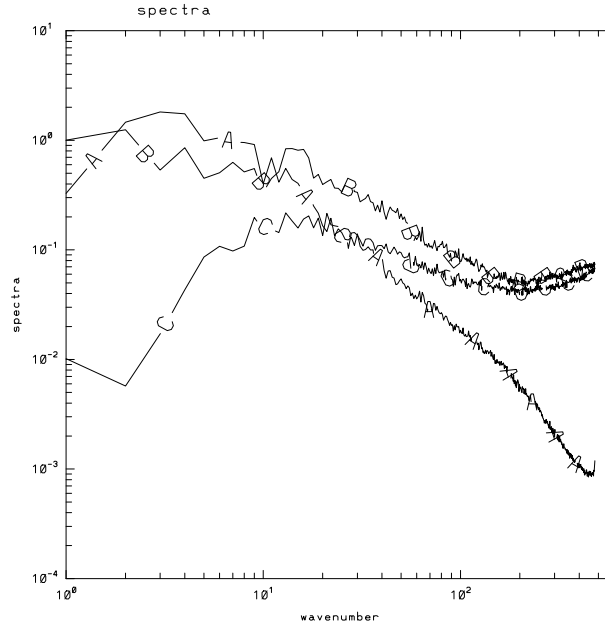


Figure 2.14: Spectres du taux de déformation ($|\widehat{\sigma}_n(k)|^2 + |\widehat{\sigma}_s(k)|^2$) (courbe A), de la rotation effective $\omega + 2\frac{D\phi}{Dt}$ (courbe B) et de la dérivée du taux de déformation $\frac{1}{\sigma}\frac{D\sigma}{Dt}$ (courbe C) dans un champ turbulent en décroissance libre.

la rotation effective $\omega + 2\frac{D\phi}{Dt}$ (courbe B) et de la dérivée du taux de déformation $\frac{1}{\sigma}\frac{D\sigma}{Dt}$ (courbe C) pour un champ de turbulence pleinement développée. Le spectre du taux de déformation présente une pente de -1.3 pour $5 < k < 100$. L'effet de la dissipation à petite échelle accentue la pente (qui est proche de -3 pour $k > 100$). L'effet des petites échelles sera donc très faible pour le taux de déformation. Les spectres de la rotation effective et de la dérivée du taux de déformation ont des caractéristiques similaires entre elles aux échelles intermédiaires et aux petites échelles : pour $10 < k < 100$, les pentes de leurs spectres sont proches de -1 . Aux petites échelles ($k > 100$), on observe par contre des spectres blancs, ce qui signifie qu'il existe un certain bruit associé à ces petites échelles⁷. Il y a excessivement peu de grandes échelles pour la dérivée du taux de déformation $\frac{1}{\sigma}\frac{D\sigma}{Dt}$ et un examen dans l'espace physique (figure 2.11b) semble indiquer que la structure de s est fortement reliée à la structure des tourbillons, donc en particulier à leur taille.

Le fait que le spectre de ces quantités soit encore pentu aux échelles intermédiaires indique qu'elles sont dominées par des structures aux échelles intermédiaires et grandes, ce qui est bien vérifié dans l'espace physique (non présenté).

⁷Ce spectre peu pentu est présent même lorsque le spectre d'enstrophie est très pentu (non présenté).

2.6 Conclusion

Nous venons de voir comment la cascade de traceur vers les petites échelles procède à travers la dynamique du gradient de traceur. Nous avons abordé le problème sous l'angle de la dynamique de l'orientation de ces gradients. L'équation qui régit cette dynamique permet de mettre en évidence les différents mécanismes qui agissent sur la cascade, à savoir :

- la déformation qui a tendance à aligner le gradient avec l'axe compressionnel de déformation,
- la vorticité qui a tendance à mettre en rotation le gradient,
- la rotation des axes de déformation qui a aussi un effet de rotation sur le gradient,
- et la dérivée du taux de déformation qui a un effet sur l'échelle de temps de la dynamique de l'orientation.

Les effets dus à la vorticité et à la déformation étaient connus antérieurement (Okubo 1970, Weiss 1981). Par contre, l'originalité de nos résultats réside en la prise en compte des effets dus à la non-stationnarité du champ de déformation (  travers la rotation des axes de déformation et l'évolution du taux de déformation). Ces effets supplémentaires sont directement reliés aux accélérations lagrangiennes et, en particulier, à leurs propriétés non-locales dans l'espace physique. Le mécanisme essentiel qui intervient dans cette étude est *la compétition entre la rotation effective (vorticité et rotation des axes de déformation) et la déformation. Il se caractérise par une seule quantité adimensionnelle r* . Un mécanisme secondaire est dû à l'évolution de l'échelle de temps de la dynamique associée) la quantité s .

  partir d'une hypothèse de stationnarité sur les quantités qui "forcent" la dynamique de l'orientation du gradient, nous avons pu établir les différents régimes dynamiques ainsi que les propriétés d'alignement des gradients de traceur en fonction de la topologie de l'écoulement. *Dans le régime dynamique où la déformation domine, la direction du gradient de traceur doit tendre vers la solution stationnaire stable de l'équation d'orientation ; de plus, sa norme croît de façon exponentielle. Dans le régime dynamique où la rotation effective domine, le gradient est en rotation avec un taux de rotation non-constant. Il en résulte un alignement statistique avec la direction du plus faible taux de rotation ; la norme du gradient évolue lentement.*

Ces régimes ont bien été mis en évidence dans des simulations numériques de turbulence bidimensionnelle. De plus, on a montré que la quantité r peut donner des informations précieuses sur la structure de la cascade dans l'espace physique. En particulier, il semble pouvoir distinguer les régions de gradients de vorticité "dynamiques" (au bord des vortex cohérents) des régions de gradients de vorticité passifs. Quelques points restent en suspens. En particulier, l'alignement avec la direction instable que l'on observe dans les simulations n'est pas bien compris. Néanmoins, on a pu avancer une hypothèse, à savoir la continuité de l'orientation le long des trajectoires lagrangiennes.

Chapitre 3

Vorticité : traceur actif pour la cascade directe ?

3.1 Introduction

Le concept fondamental utilisé aussi bien en météorologie qu'en océanographie est la vorticité potentielle. En effet, depuis les travaux d'Ertel (1942) et de Rossby (1940), on sait que la vorticité potentielle (que l'on notera par la suite PV) est conservée le long des trajectoires lagrangiennes en l'absence de processus diabatiques ou frictionnels (cf. les revues d'Hoskins et al. (1985) et de Rhines (1986)). La version isentropique et quasi-hydrostatique de l'équation de conservation de la vorticité potentielle est simplement

$$\partial_t PV + \mathbf{u} \cdot \nabla PV = 0 ,$$

avec $PV = -g (f + \mathbf{k} \cdot (\nabla_\theta \times \mathbf{u})) \frac{\partial \theta}{\partial p} .$

Le vecteur $\mathbf{k}$ désigne le vecteur vertical unitaire et ∇_θ est l'opérateur gradient dans l'espace tridimensionnel $x y \theta$ pris à température potentielle θ constante. g est la constante de gravité terrestre, f le facteur de Coriolis et p la pression. Dans l'océan, on utiliserait la densité potentielle ρ à la place de la température potentielle θ . Le terme $f + \mathbf{k} \cdot (\nabla_\theta \times \mathbf{u})$ représente la composante verticale de la vorticité absolue (dans l'approximation de couche mince) et $\partial \theta / \partial p$ représente les effets de dilatation avec $-(1/g)(\partial p / \partial \theta)$ la densité apparente.

Cette propriété de conservation fait de la vorticité potentielle *l'analogue d'un traceur passif* (traceur conservé le long des trajectoires lagrangiennes). Mais, d'un autre côté, la vorticité potentielle est la *marque de quantités dynamiques* (à la fois la température potentielle et la vitesse). Elle peut donc être dynamiquement active puisque sa distribution influence l'écoulement qui la transporte.

On peut voir cet aspect dynamique qui influence la circulation générale à travers les équations de conservation de la vorticité potentielle et de la température potentielle dans l'atmosphère ou de la densité potentielle dans l'océan (Rhines 1986). Pour un

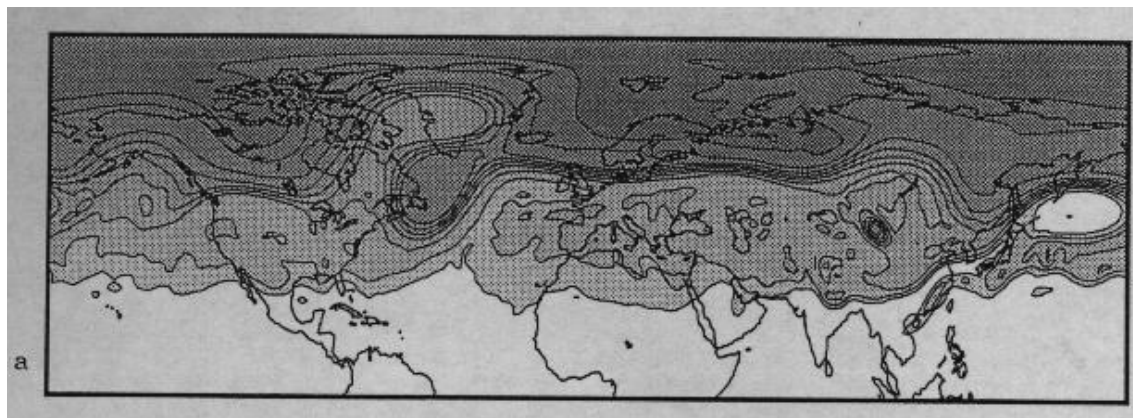


Figure 3.1: vorticité potentielle dans l'atmosphère sur une surface isentrope provenant d'une simulation (Ambaum 1997). On peut voir un blocage au niveau du Groenland, blocage associé avec une distribution uniforme de PV dans le dipôle et des gradients intenses à son bord.

écoulement non-diffusif et stationnaire, on a

$$\mathbf{u} \cdot \nabla PV = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0.$$

Ces équations contraignent l'écoulement stationnaire à suivre l'intersection entre les surfaces à PV constante et les surfaces à ρ constantes (Rhines et Holland 1979, Hoskins et al. 1985). Ces chemins s'appellent les contours géostrophiques et leur forme est fondamentale pour déterminer à la fois la direction et l'intensité de l'écoulement. En effet, supposons par exemple qu'un de ces contours intersecte une frontière continentale dans l'océan. La condition à la frontière impose une vitesse nulle à travers la frontière donc il n'y a pas de courant le long du contour qui intersecte une frontière continentale. Un tel contour est dit "bloqué".

Par ailleurs, une des caractéristiques de la distribution spatiale de la vorticité potentielle (au moins dans l'océan) est la présence de régions relativement uniformes bornées par de très intenses gradients qui vont alors être de véritables barrières au transport puisque l'écoulement ne peut traverser ces fronts (par conservation de la PV). Rhines et Young (1982), en reprenant un argument dû à Batchelor (1955), ont montré que la formation d'isolignes de PV fermées entraîne l'homogénéisation de la PV à l'intérieur de ces isolignes s'il existe un faible flux turbulent et s'il n'y a pas de source de PV. L'hypothèse de faible flux turbulent est nécessaire pour obtenir au premier ordre une relation entre la vorticité potentielle et la fonction de courant, relation qui est déterminée par la forme du flux turbulent. L'homogénéisation de la vorticité potentielle dans ces régions aux contours fermés est associée à l'expulsion des gradients de PV vers les bords extérieurs de ces régions. La figure 3.1 montre une carte de vorticité potentielle provenant d'un modèle de l'atmosphère (Ambaum 1997). Il y a une situation de blocage atmosphérique avec la formation d'un dipôle au niveau du Groenland. On peut remarquer que les deux tourbillons formant le dipôle ont une vorticité uniforme avec des gradients expulsés à l'extérieur comme

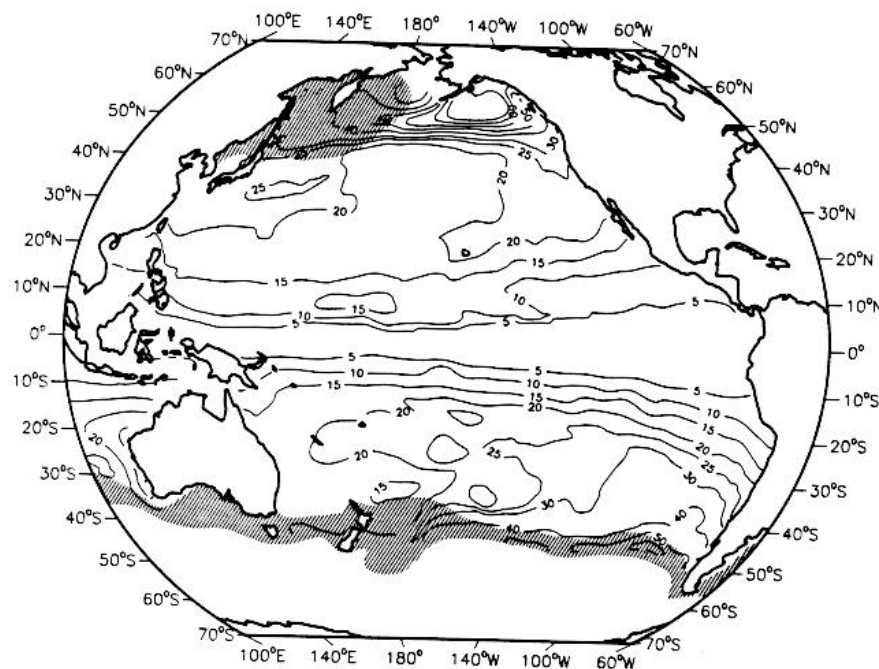


Figure 3.2: vorticité potentielle dans l'océan Pacifique sur une surface isopycnale non-ventilée (tiré de Keffer (1985)). On peut noter que les gyres subpolaires et subtropicales du Pacifique Nord sont homogénéisées avec un fort contraste de PV entre elles.

le prévoit la théorie. Dans l'océan, on peut examiner la distribution de PV pour les gyres subpolaires et subtropicales non influencées par la surface. McDowell et al. (1982) et Keffer (1985) montrent que la vorticité potentielle est uniforme pour certaines isopycnes (figure 3.2), ce que l'on voit aussi dans un modèle numérique (Holland et Rhines 1980). Cependant, Ierley et Young (1983) ont montré que dans certaines situations, la théorie de Rhines et Young (1982) n'est pas valable : il y a une très forte dissipation de la vorticité potentielle au niveau des courants de bord Ouest et cette dissipation peut affecter la distribution de la PV dans l'intérieur de la gyre, les flux turbulents empêchant la relation entre la PV et la fonction de courant.

La vorticité potentielle peut donc contraindre la circulation au niveau des contours bloqués qui intersectent les côtes (ce qui impose une vitesse nulle le long de ces contours) et par le processus d'homogénéisation des contours fermés qui expulse de forts gradients (donc des barrières au transport) au bord de ceux-ci.

La forme des isolignes de vorticité potentielle peut donc contraindre fortement l'écoulement. Cela signifie qu'il peut y avoir un important effet rétroactif de la vorticité potentielle sur le courant qui la transporte. En particulier, vient la question de la différence de comportement entre vorticité potentielle et scalaire passif. Les résultats théoriques sur la cascade turbulente de traceur que nous avons dérivés dans le chapitre précédent devraient s'appliquer de la même manière à la vorticité et à

un scalaire passif. Comment la relation entre la vorticité et la fonction de courant modifie-t-elle les propriétés de cascade directe ? La modifie-t-elle réellement ? C'est à ces questions que nous allons essayer de répondre dans ce chapitre.

Tout d'abord, nous allons examiner les observations à la fois océaniques et atmosphériques afin de comparer la distribution de la vorticité potentielle et des traceurs passifs. Nous savons que les dynamiques atmosphérique et océanique sont gouvernées dans une bonne approximation par les équations quasi-géostrophiques. Charney (1971) a conjecturé que, dans ces écoulements, la vorticité potentielle possédait une cascade vers les petites échelles et l'énergie possédait une cascade vers les grandes échelles, comme en turbulence bidimensionnelle classique. La conjecture de Charney dépend en fait fortement du type de conditions aux limites et de la géométrie sur la verticale du domaine considéré. Il s'avère que la démonstration de Charney pour un domaine semi-infini sur la verticale (correspondant au cas atmosphérique) est fausse car ce cas correspond à un problème de Sturm-Liouville singulier (Tung et Welch 2001). Dans le cas d'un domaine d'extension finie sur la verticale et avec des conditions de parois rigides, l'analogie 2D-QG est valide pour la cascade inverse d'énergie barotrope mais tous les modes baroclines ont une cascade directe d'énergie (Hua et Haidvogel 1986, McWilliams 1990c, Dritschel et al. 1999). Le cas de conditions périodiques verticales (c'est-à-dire conditions identiques sur la verticale et sur l'horizontale) se manifeste par une évolution vers un état final composé de deux colonnes de vorticité barotrope (McWilliams et al. 1994).

Ces propriétés de la turbulence géostrophique ont bien été confirmées par la suite (Hua et Haidvogel 1986, McWilliams 1990c) et la cascade de PV procède par la formation de forts gradients, formation gouvernée par les tenseurs de gradient de vitesse et d'accélération (Hua et al. 1998), tout comme en turbulence bidimensionnelle. On peut donc s'attendre à ce que les observations géophysiques de PV et de scalaires passifs soient similaires à ce que l'on observe dans les modèles de turbulence bidimensionnelle.

Ensuite, nous aborderons les résultats antérieurs obtenus dans des simulations de turbulence où l'on peut faire des comparaisons plus quantitatives des cascades de vorticité et de scalaire passif. Puis, nous reprendrons les arguments théoriques montrant la nature active ou passive de la vorticité. Ces arguments sont fondés sur la relation cinématique entre vorticité et la fonction de courant en turbulence bidimensionnelle. Enfin, nous examinerons quels sont les aspects de la cascade d'enstrophie qui nécessitent un éclaircissement, ce qui introduira nos résultats qui sont présentés à la suite et qui font l'objet d'un article (Lapeyre et al. 2001).

3.2 Observations géophysiques

Nous allons nous intéresser aux régions de l'atmosphère et de l'océan où l'approximation bidimensionnelle est valide, par exemple dans la stratosphère pour l'atmosphère et en dessous de la couche de mélange dans l'océan (la vorticité potentielle sera un vrai invariant en l'absence du forçage de surface dû au vent).

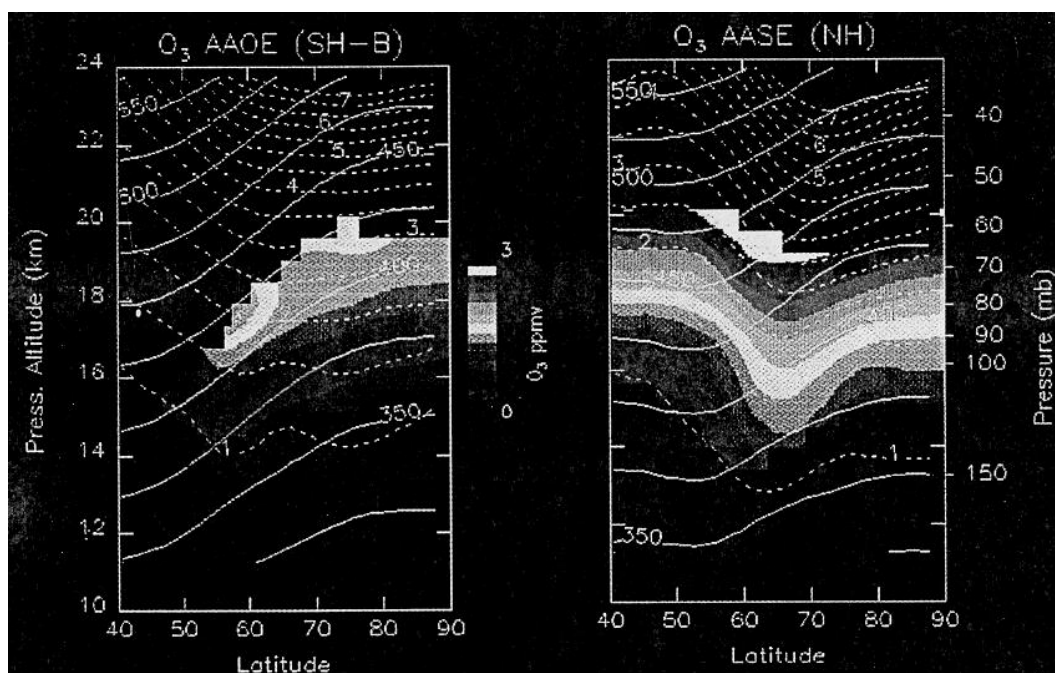


Figure 3.3: reconstruction de l’ozone stratosphérique observé le long de trajectoires d’avion dans chaque hémisphère (hémisphère Sud à gauche, hémisphère nord à droite). En différents tons de gris, ozone; en contours solides, température potentielle; en tirets, vorticité potentielle (tiré de Schoeberl et al. (1992)).

3.2.1 Observations atmosphériques

3.2.1a Distribution grande échelle

On peut examiner les distributions grande échelle de la vorticité potentielle ainsi que d’espèces chimiques dont le rapport de mélange est conservé de façon lagrangienne en dehors des réactions chimiques et des processus dissipatifs. Schoeberl et al. (1992) montrent que les distributions grande échelle de PV et de rapport de mélange d’espèces chimiques (N_2O , O_3 , NO_y) sont fortement corrélées dans les deux hémisphères de la stratosphère à partir de données recueillies le long de trajectoires d’avion. La figure 3.3 montre une carte d’ozone superposée aux contours de température potentielle (en trait plein) et de vorticité potentielle (en tirets), le long de trajectoires d’avion dans chaque hémisphère en hiver. Dans l’hémisphère Sud, l’ozone présente des isolignes légèrement inclinées par rapport aux isolignes de PV; de plus, on observe un filament d’ozone non présent dans le champ de PV à la latitude 60° . La différence entre l’ozone et la vorticité potentielle dans cet hémisphère serait due aux réactions photochimiques complexes qui ont lieu en cette saison et qui mènent à la destruction de l’ozone (Schoeberl et al. 1992). Ceci est confirmé par une distribution de N_2O fortement corrélée avec la vorticité potentielle (non présenté). Par contre, dans l’hémisphère Nord, il est frappant de voir que la distribution de l’ozone suit presque exactement les isolignes de la vorticité potentielle. Danielsen

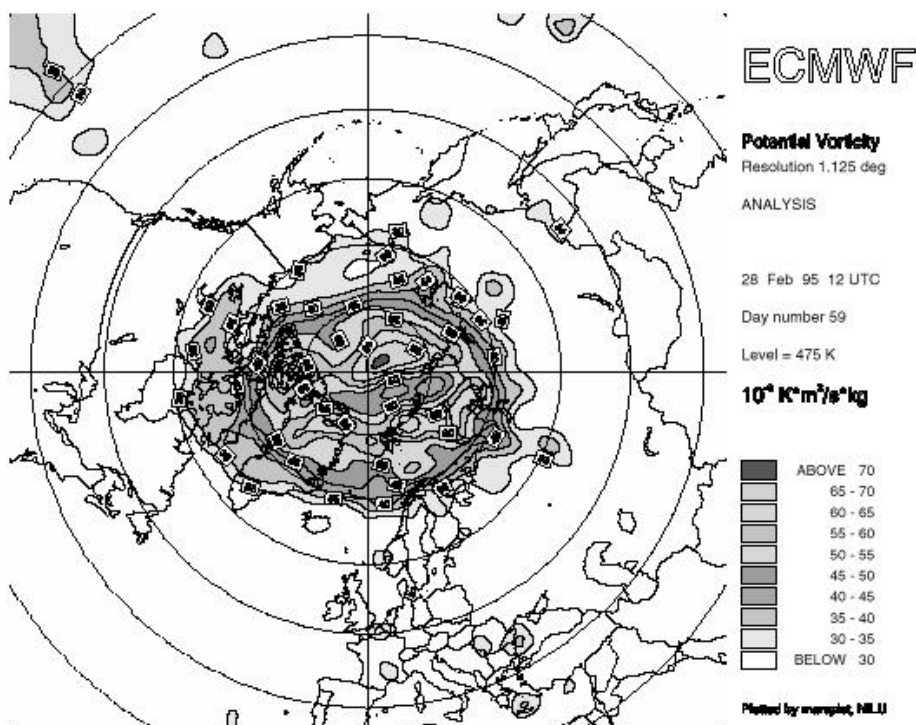


Figure 3.4: Carte de vorticité potentielle sur une surface isentrope dans la stratosphère, dans l'hémisphère Nord en hiver. On peut voir le tourbillon polaire stratosphérique avec de fortes valeurs de PV et un gradient de bord bien marqué.

(1990) observe aussi de très fortes corrélations entre la vorticité potentielle et la radioactivité, l'ozone d'origine stratosphérique, le monoxyde de carbone et la vapeur d'eau d'origine troposphérique.

Bien que l'on puisse s'attendre à des distributions identiques des traceurs en l'absence de termes diabatiques, Haynes et McIntyre (1990) ainsi que Haynes et Ward (1993) ont montré que tel n'était pas le cas en présence de processus diabatiques : la PV se comporte comme le rapport de mélange d'une substance chimique particulière qui n'a pas de source et les surfaces isentropes se comportent exactement comme si elles étaient imperméables à cette substance de PV, *même en présence d'un réchauffement ou refroidissement diabatique qui les rendraient perméables au transport de masse ou de substances chimiques.*

3.2.1b Tourbillon polaire stratosphérique

La caractéristique essentielle de la stratosphère est la présence en hiver d'un tourbillon de grande échelle (les tourbillons polaires stratosphériques arctique et antarctique) qui concentre de fortes valeurs de vorticité potentielle. Il est créé par le refroidissement diabatique qui intensifie les vents circumpolaires. Le tourbillon polaire est une entité relativement homogène en vorticité potentielle et possède des bords assez intenses comme on peut le constater sur la carte de PV provenant de

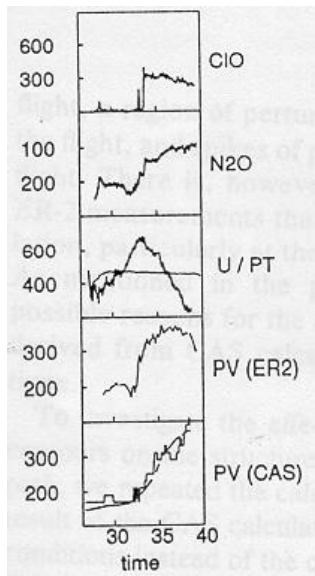


Figure 3.5a :

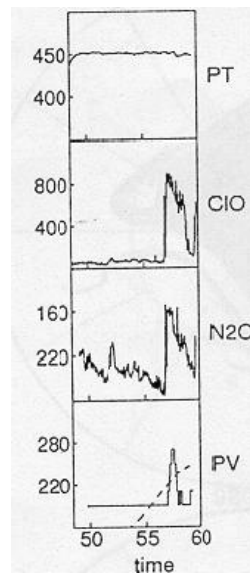


Figure 3.5b :

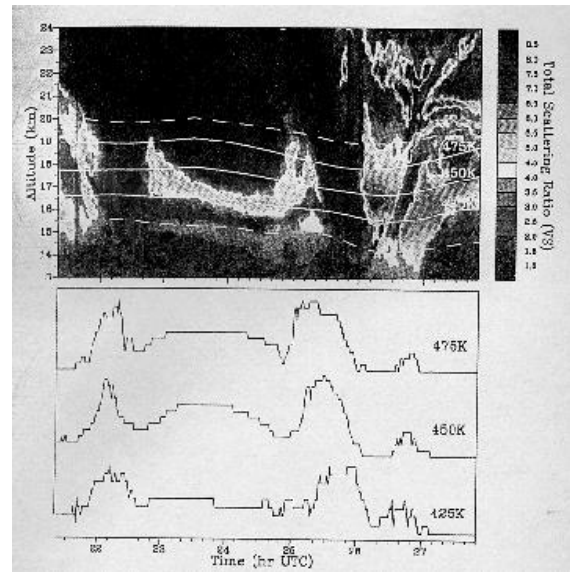


Figure 3.5c :

Figure 3.5. Les figures (a) et (b) montrent différentes quantités mesurées le long de trajectoires d'avion (donc en fonction du temps) : la température potentielle (PT), des rapports de mélange de traceurs chimiques (ClO et N₂O), la vitesse (U) et la vorticité potentielle PV observée (ER2) et reconstituée (CAS), le long de trajectoires d'avion (tiré de Waugh et al. (1994)). La figure (c) montre une section verticale de la stratosphère toujours le long d'une trajectoire d'avion : figure du haut, rapport de diffusion d'aérosol mesuré ; figure du bas, vorticité potentielle déterminée par la méthode d'advection de contours le long de plusieurs isentropes (tiré de Plumb et al. (1994)).

l'ECMWF (figure 3.4).

Les observations de la vorticité potentielle et de traceurs (N₂O, ClO, aérosol) mesurées le long de trajectoires d'avions montrent une transition abrupte (c'est-à-dire sur 20km) au niveau du bord du tourbillon (Plumb et al. 1994, Waugh et al. 1994, Mariotti et al. 1997). La figure 3.5a montre différents traceurs et des quantités dynamiques le long d'une trajectoire d'avion intersectant le bord du tourbillon polaire arctique (Waugh et al. 1994). La trajectoire s'est effectuée le long d'une isentrope, ce qui permet d'examiner la distribution de différents traceurs le long de cette isentrope. On observe une discontinuité du rapport de mélange de ClO au bord du tourbillon (matérialisé qualitativement au niveau du maximum du jet polaire) ainsi que des gradients intenses pour le rapport de mélange de N₂O et pour la vorticité potentielle PV (ER2) calculée à partir des données locales. On peut remarquer que *le front est plus ou moins intense selon les traceurs* (si on compare leur intensité respective par $|\nabla_{\theta} c|/c$ où c est un traceur) mais qu'*il se situe au même endroit pour tous les traceurs*. De façon plus générale, on observe que l'air polaire correspond à un

fort rapport de mélange de ClO, un faible rapport de mélange de N₂O et une forte vorticité potentielle à opposer à un faible rapport de mélange de ClO, un fort rapport de mélange de N₂O et une faible vorticité potentielle dans les latitudes moyennes.

Une des propriétés du tourbillon polaire est d'expulser de l'air polaire dans des filaments de faible épaisseur (Juckes et McIntyre 1987) comme les tourbillons de la turbulence bidimensionnelle que l'on a étudié à la section 1.3.2 (Mariotti et al. 1994). Des trajectoires d'avion ont intersecté de tels filaments et c'est ce que l'on peut examiner sur la figure 3.5b. Le long d'une isentrope, on observe bien un fort contraste pour les différents traceurs entre l'air polaire du filament et l'air ambiant des latitudes moyennes. La vorticité potentielle reconstituée par la méthode d'advection de contours montre aussi la présence d'un filament d'air polaire avec de fortes valeurs de PV au même niveau que les traceurs chimiques (Waugh et al. 1994, Mariotti et al. 1997). On peut rappeler en quoi consiste la méthode d'advection de contours : on advecte des contours correspondant initialement à des contours de PV provenant de modèles de circulation générale (type ECMWF). La vorticité potentielle qui en résulte permet d'obtenir une carte plus fine et plus réaliste (avec des gradients beaucoup plus intenses) que les cartes de PV provenant des modèles de circulation générale.

On peut aussi comparer le rapport de diffusion d'aérosol et la vorticité potentielle reconstituée (figure 3.5c). Pour les trois isentropes, on peut voir que la vorticité reconstituée est en accord avec le rapport de diffusion, c'est-à-dire que l'on observe de fortes valeurs de PV pour de faibles valeurs de rapport de diffusion d'aérosols (Plumb et al. 1994). On observe tout de même un décalage entre les deux champs provoqué par la méthode d'advection de contours qui ne positionne pas correctement les filaments (Mariotti et al. 1997).

Ces observations suggèrent qu'il existe une barrière au transport au bord du tourbillon polaire qui se matérialise aussi bien pour les traceurs passifs qu'actifs. Cela a pu aussi être mis en évidence dans des modèles numériques de la stratosphère (Chen 1994, Norton 1994) où l'on observe une intensification des gradients de traceur ou de vorticité au niveau du bord du tourbillon.

3.2.2 Observations océaniques

3.2.2a Distribution grande échelle

La distribution grande échelle de la vorticité potentielle dans l'océan est dominée en première approximation par un terme lié à la stratification moyenne $\bar{\rho}$ et à la rotation terrestre :

$$PV \approx -\frac{f}{\bar{\rho}} \partial_z \bar{\rho} .$$

Ceci contraste avec l'atmosphère où la distribution de la température potentielle est beaucoup moins stationnaire et où la vorticité relative joue un rôle plus important. On voit donc que la distribution moyenne de la densité va contraindre très fortement la circulation par la conservation de la PV (McDowell et al. 1982).

On peut s'intéresser aux distributions de différents traceurs (tritium, salinité) et de la PV dans l'Atlantique (Sarmiento et al. 1982, Keffer 1985). Quand on examine

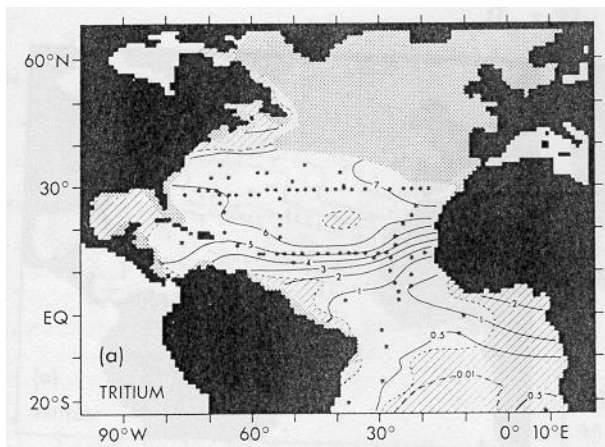


Figure 3.6a :

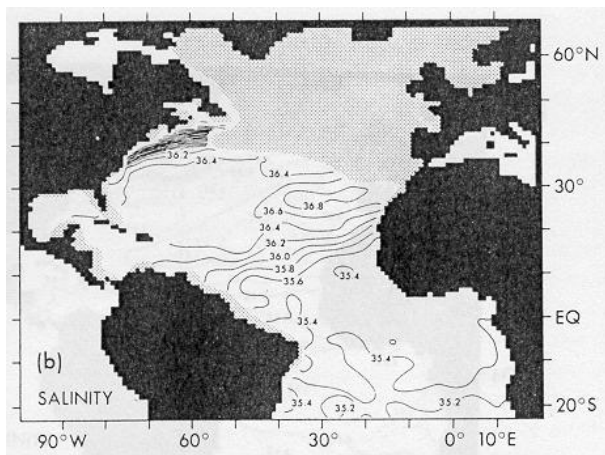


Figure 3.6b :

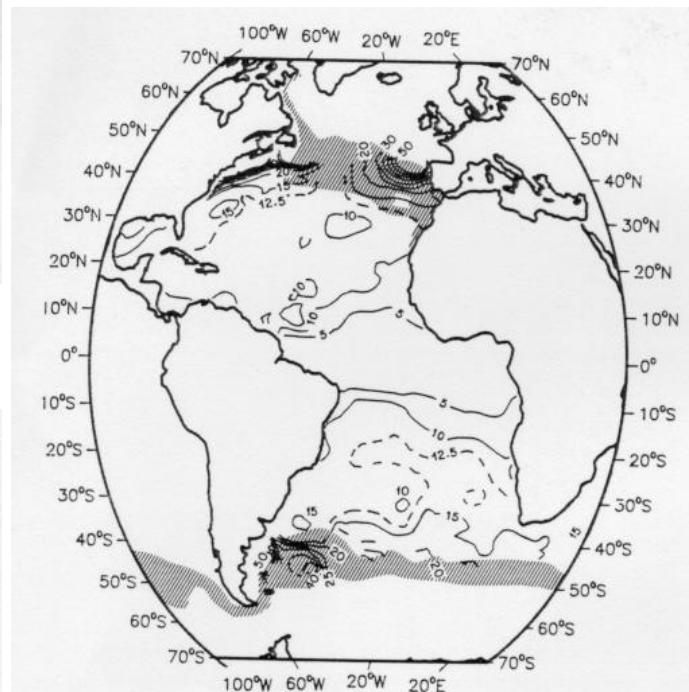


Figure 3.6c :

Figure 3.6 : distribution horizontale (le long d'une isopycne) dans l'Atlantique de différents traceurs : (a) Tritium, (b) salinité (tirés de Sarmiento et al. (1982)), (c) vorticité potentielle (tiré de Keffer (1985)).

ces distributions, il faut prendre garde aux sources de PV et de tritium dans les couches de surface et à la source de salinité due à l'eau méditerranéenne. Dans les couches non influencées par la surface, on observe une homogénéisation des traceurs dans le gyre subtropical et de forts gradients au sud du gyre (comparer les figures 3.6a, b et c). Les distributions à l'échelle du gyre sont analogues mais on observe des différences aux échelles plus petites.

Le fait que l'écoulement soit contraint à grande échelle par les isolignes de PV a été étudié par O'Dwyer et al. (2000) à travers la dispersion de flotteurs lagrangiens dans l'Atlantique. La dispersion de ces flotteurs se fait préférentiellement le long des

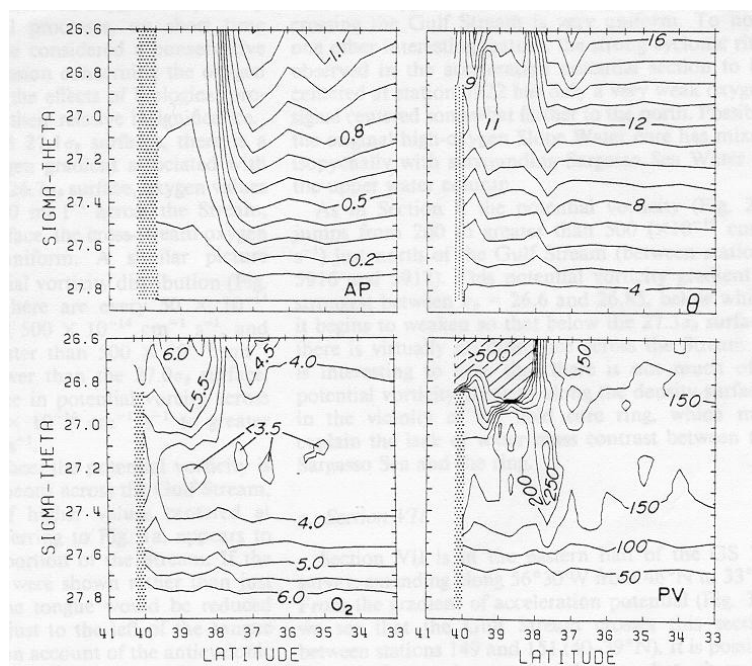


Figure 3.7: coupes verticales du Gulf Stream en coordonnées isopycnales (tirées de Bower et al. (1985)). AP : potentiel d'accélération (gradient isopycnal du potentiel de Montgomery). θ : température potentielle. O_2 : oxygène dissous. PV : vorticité potentielle.

contours de PV, ce qui signifie que les traceurs devraient se répandre le long de ces contours à l'intérieur de l'océan. L'écoulement moyen est généralement plus intense le long des contours de PV qu'à travers ceux-ci, sauf pour de faibles gradients de PV. Ceci indique que *l'écoulement est contraint à suivre les contours de PV mais aussi que la PV s'homogénéise le long de la circulation.*

3.2.2b Le Gulf Stream

Le Gulf Stream, courant intense de bord Ouest dans l'Atlantique Nord, est associé à un front abrupt en propriétés physico-chimiques et dynamiques dans l'océan de surface (Bower et al. 1985). La figure 3.7 montre une coupe verticale en coordonnées isopycnales de différents traceurs (plus le potentiel d'accélération) à travers le Gulf Stream (Bower et al. 1985). Si on examine la position des gradients isopycnaux de ces traceurs (vorticité potentielle, température potentielle et oxygène), on observe que ceux-ci sont situés aux mêmes endroits, aussi bien pour le front qui constitue le Gulf Stream en lui-même (latitude 37°) que pour le front situé sur la pente continentale à la latitude 39.5° (figure 3.7). Ces fronts sont plutôt intenses (à part peut-être pour l'oxygène dissous) et très étroits (de l'ordre de 20km).

Le Gulf Stream constitue une véritable barrière au transport entre les eaux de ses flancs Nord et Sud : les flotteurs isopycnaux RAFOS ne traversent pas le front en vorticité potentielle si celui-ci est intense, c'est-à-dire dans les couches peu profondes,

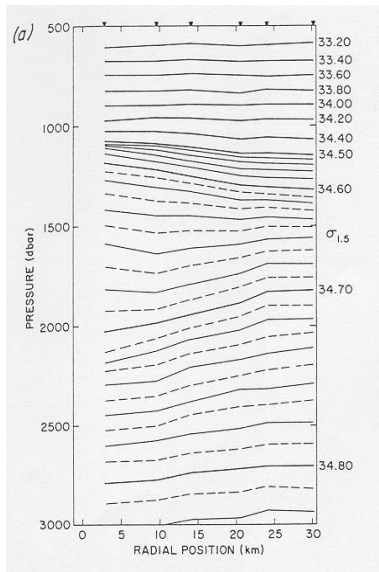


Figure 3.8a :

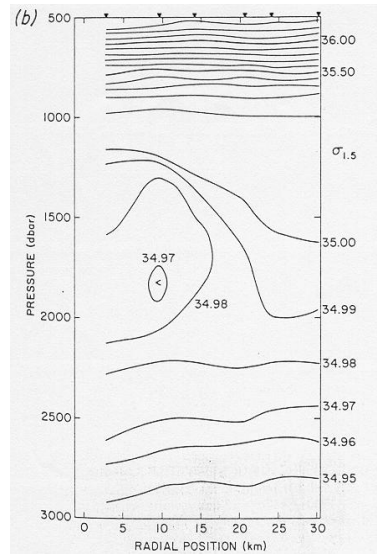


Figure 3.8b :

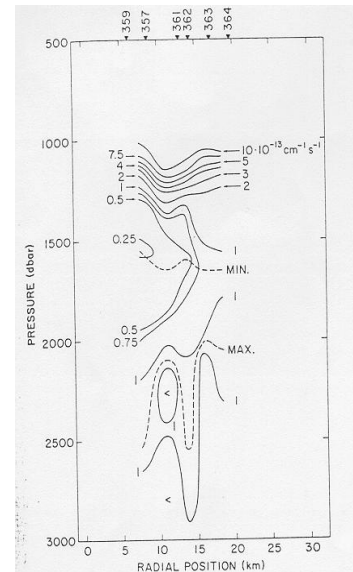


Figure 3.8c :

Figure 3.8 : coupes verticales d'une lentille d'eau subthermocline en coordonnée pression : (a) densité potentielle, (b) salinité, (c) vorticité potentielle, avec une moyenne azimutale (tiré de Elliott et Sanford (1986)).

alors qu'ils traversent le front dans les couches plus profondes où il y a un faible gradient de PV (Bower et Lozier 1994). Cela a aussi été confirmé dans un modèle quasi-géostrophique à deux gyres (Lozier et Riser 1990). *Le fort gradient de vorticité potentielle (comme les fronts de traceurs) matérialise donc une barrière au transport associé au jet.*

3.2.2c Tourbillons océaniques

On peut s'intéresser à la distribution de PV et de traceur pour les tourbillons océaniques. Pour plusieurs meddies observés dans l'Atlantique (Pingree et Le Cann 1993, Prater et Sanford 1994), on observe que les fronts isopycnaux de vorticité potentielle et de différents traceurs (température potentielle, salinité, nitrates et silicates) sont situés au même endroit, ce qui va dans le même sens que les observations du Gulf Stream.

On peut examiner la structure d'une lentille d'eau subthermocline, observée durant l'expérience de dynamique locale (LDE) de POLYMODE (Elliott et Sanford 1986). La figure 3.8a montre que les isopycnals sont relativement peu inclinées par rapport à la coordonnée pression. Par contre, la salinité (figure 3.8b) et la vorticité potentielle (figure 3.8c) présentent des gradients isobares beaucoup plus intenses, ce qui implique qu'elles ont aussi des gradients isopycnaux intenses. On peut voir que le cœur du tourbillon, relativement uniforme en salinité et PV, est délimité par des fronts isobares (et isopycnaux) en vorticité potentielle et salinité. La largeur de ces

fronts est de quelques kilomètres. On voit donc que pour les structures mésoéchelles dans l'océan, on a des distributions de traceurs et de PV analogues avec des fronts intenses situés aux mêmes endroits.

3.3 Comparaison scalaire passif/vorticité en turbulence

Après avoir examiné les observations atmosphériques et océaniques, on peut s'intéresser aux simulations de turbulence bidimensionnelle afin de comparer les cascades turbulentes de vorticité et de scalaire passif. Ces études permettent de faire des diagnostics quantitatifs des cascades à travers l'étude dans l'espace des nombres d'onde.

Babiano et al. (1987), Ohkitani (1991) ainsi qu'Oetzel et Vallis (1997) ont étudié les équilibres stationnaires de la vorticité et d'un scalaire passif. Le forçage sur les deux champs s'effectue à la même longueur d'onde mais avec des sources décorréées. Ces auteurs laissent leurs simulations s'équilibrer pour obtenir un spectre stationnaire de vorticité et de scalaire passif.

Ohkitani (1991) et Oetzel et Vallis (1997) observent des spectres identiques de vorticité et de scalaire passif aux petites échelles. Babiano et al. (1987) ne peuvent observer un tel comportement à cause d'une trop faible résolution spatiale (128×128) limitant fortement le domaine inertiel (communication personnelle). Néanmoins, un filtrage des tourbillons permet d'observer des spectres de traceurs identiques aux petites échelles (Babiano et al. 1987). Le spectre obtenu dans ces différentes études est proche de k^{-1} , ce qui correspond aux spectres classiques des cascades directes d'ensrophie et de scalaire passif vers les petites échelles (Batchelor 1959, Kraichnan 1967, Batchelor 1969). Par contre, on observe une accumulation d'ensrophie aux grandes échelles sans accumulation de scalaire passif, accumulation que l'on peut associer à la cascade inverse d'énergie absente pour le scalaire passif.

Un diagnostic intéressant de la cascade est donné par les flux spectraux de traceurs vers les petites échelles. La figure 3.9a montre ces flux moyennés temporellement dans la simulation d'Ohkitani (1991). On observe que *le flux de variance de scalaire passif vers les petites échelles est égal aux flux d'ensrophie pour les grands nombres d'onde*. Par contre, on observe *des flux différents en dessous de l'échelle d'injection avec un flux d'ensrophie vers les grandes échelles*. Si on examine les variances des flux (figure 3.9b), on note que le flux d'ensrophie possède des fluctuations beaucoup plus importantes que le flux de variance de scalaire passif. Cela correspond à un flux instantané d'ensrophie vers les grandes échelles à l'échelle des tourbillons comme Babiano et al. (1987) l'observent dans leur simulation.

Le fait que les flux de traceurs soient identiques à petite échelle est consistant avec le chevauchement des spectres à ces échelles. Par ailleurs, les différences de spectres et de flux à l'échelle des tourbillons proviennent du rôle des tourbillons qui ont tendance à se protéger de la cascade d'ensrophie, c'est-à-dire à réduire l'intensité moyenne de la cascade directe : il y a une cascade d'ensrophie accrue quand les tourbillons sont filtrés du champ turbulent (Babiano et al. 1987, McWilliams 1990a). Il semble donc que les tourbillons accumulent de l'ensrophie grâce à cette "cascade

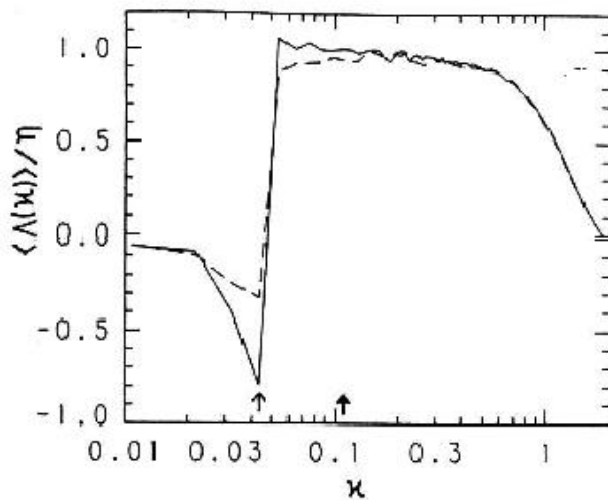


Figure 3.9a :

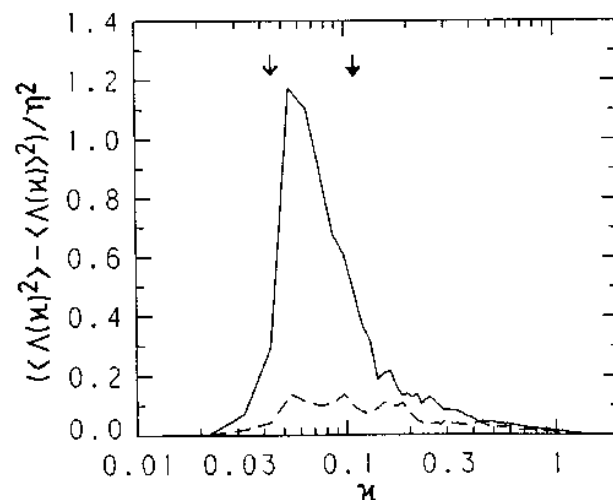


Figure 3.9b :

Figure 3.9 : (a) flux normalisé d'enstrophie (trait continu) et de scalaire passif (tirets) en fonction du nombre d'onde. (b) variance du flux normalisé d'enstrophie (trait continu) et de scalaire passif (tirets) en fonction du nombre d'onde (tiré d'Ohkitani (1991)).

inverse d'enstrophie" qui accompagne la cascade inverse d'énergie, phénomène que aussi observé par Basdevant et al. (1981).

Enfin, Babiano et al. (1987) et Ohkitani (1991) observent que les isolignes de vorticité (figure 3.10a) et de scalaire passif (figure 3.10b) ont des formes très proches, en particulier pour l'isoligne de vorticité nulle (c'est-à-dire l'isoligne qui concentre le moins d'enstrophie). Cette isoligne de vorticité nulle ne possède pas d'enstrophie suffisante pour résister à une quelconque déformation provoquée par les tourbillons voisins. Bien que les structures présentes dans les champs de vorticité et de scalaire passif aient une intensité différente, elles possèdent une forme analogue comme dans les observations océaniques et atmosphériques.

L'image qui ressort de ces simulations est que *la vorticité et le scalaire passif peuvent avoir des cascades différentes à cause de la présence des tourbillons qui n'ont pas d'exacts analogues pour le scalaire passif. Par contre, les structures de vorticité qui ne font pas partie de ces tourbillons semblent réagir de façon passive du point de vue de la cascade aussi bien dans l'espace spectral (flux et spectre) et que dans l'espace physique (ressemblance des isolignes).*

On peut s'intéresser à un autre type de turbulence, avec une structure de grande échelle stable (c'est-à-dire solution des équations d'Euler), par exemple sur le plan β , qui correspond à un gradient moyen de PV. L'exemple que l'on peut envisager est un écoulement dans un canal sur le plan β avec comme structures de base un jet qui méandre et deux gyres de recirculation. Pierrehumbert (1991) a étudié la cascade

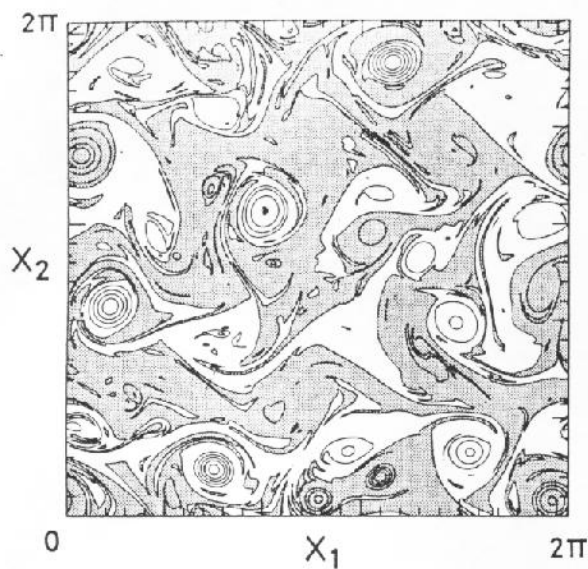


Figure 3.10a :

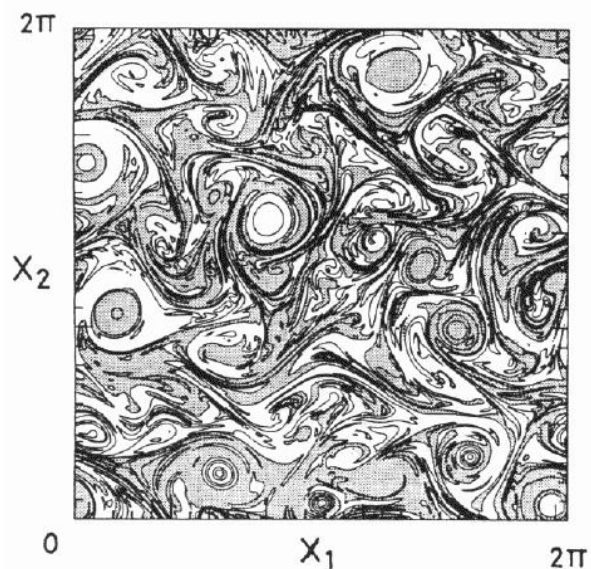


Figure 3.10b :

Figure 3.10 : isolignes de vorticité (figure a) et de scalaire passif (figure b) dans une simulation de turbulence 2D forcée (tiré d'Ohkitani (1991)).

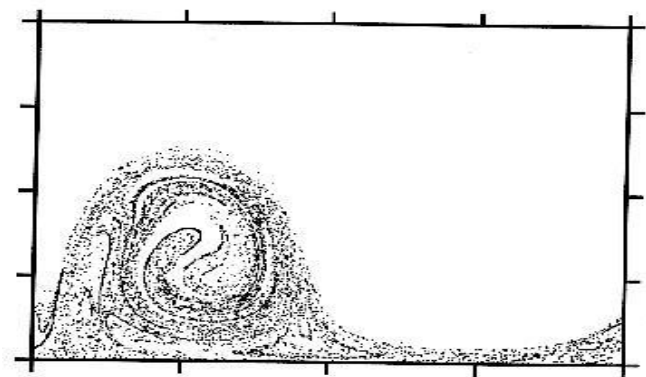


Figure 3.11a :

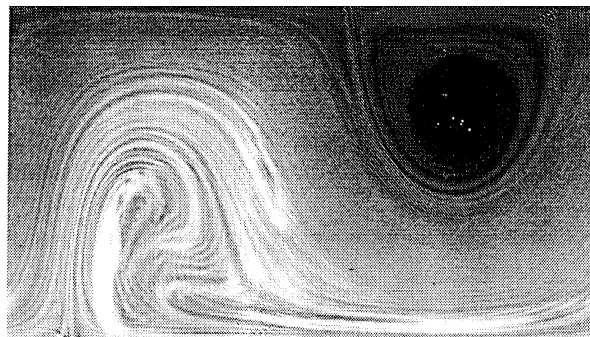


Figure 3.11b :

Figure 3.11 : (a) section de Poincaré pour un nuage de traceur passif dans un écoulement dont la base est une onde progressive dans le repère de l'onde perturbée périodiquement. (b) vorticité potentielle dans une simulation numérique de turbulence dont la condition initiale est une onde progressive perturbée (on se place dans le repère de l'onde non-perturbée). Tiré de Pierrehumbert (1991).

d'un scalaire passif et de la vorticité potentielle dans un tel écoulement (une onde progressive étudiée dans le repère de l'onde ou "travelling wave") avec une perturbation initiale de vorticité à plus petite échelle. Il montre que la structure grande échelle de l'écoulement contrôle le transfert de scalaire passif et de la perturbation de vorticité vers les petites échelles ; ces deux traceurs ont donc un mélange analogue comme on peut l'observer sur les figures 3.11a et 3.11b. Ces deux traceurs se répandent dans tout l'écoulement de façon non-locale dans l'espace physique et éliminent ensuite leurs inhomogénéités aux échelles de plus en plus petites. Un spectre en k^{-1} émerge, ce qui est typique des cascades directes dans des écoulement grande échelle (Pierrehumbert 1991).

Dans cet écoulement, il faut distinguer le comportement de la vorticité petite échelle de celui de la vorticité grande échelle. En effet, la vorticité petite échelle (ou de perturbation) subit une cascade directe alors que la vorticité grande échelle résiste à la cascade d'enstrophie. La vorticité de perturbation ne peut résister à la cascade et former des tourbillons car elle subit une trop forte déformation produite par l'écoulement grande échelle. De plus, elle est "fossile" car elle rend très rapidement toute son énergie à l'écoulement grande échelle : elle représente seulement 1% de l'enstrophie totale mais elle concentre la dissipation d'enstrophie (Pierrehumbert 1991).

Held et al. (1995) ont étudié cet écoulement dans le cas d'un autre traceur actif conservé de façon lagrangienne : la température en dynamique quasi-géostrophique de surface. La fonction de courant est reliée à la température dans l'espace des nombres d'onde par la relation

$$\widehat{\theta}(\mathbf{k}) = -|\mathbf{k}| \widehat{\psi}(\mathbf{k}) .$$

L'équation de la dynamique est simplement

$$\partial_t \theta + J(\psi, \theta) = 0 .$$

Dans ce modèle, le traceur est beaucoup plus actif que la vorticité de la turbulence bidimensionnelle car les filaments de traceur sont beaucoup plus sujets à l'instabilité par enroulement que dans un modèle bidimensionnel classique. Cette instabilité a lieu même aux petites échelles. Cela vient du fait que c'est la température qui est conservée le long des trajectoires lagrangiennes, ce qui implique que si l'échelle spatiale L du filament diminue alors la vorticité $\omega \approx \theta/L$ augmente. Donc la déformation extérieure ne peut stabiliser ce filament comme dans le cas bidimensionnel. Bien que les filaments soient moins passifs qu'en deux dimensions, la disposition des régions de mélange est encore contrôlée par la géométrie des lignes de courant grande échelle avec un motif analogue à celui de la vorticité en deux dimensions (Held et al. 1995).

Ces simulations nous montrent que *la nature active du traceur ne semble pas affecter outre mesure les processus de cascade vers les petites échelles tant que la structure qui cascade est à une échelle spatiale bien plus faible que les structures qui contrôlent cette cascade et qu'elle est déformée principalement par ces structures grande échelle.*

3.4 Arguments théoriques sur la nature active de la vorticité

3.4.1 Inversibilité

Comme nous l'avons dit en introduction, la vorticité potentielle est reliée aux propriétés dynamiques de l'écoulement puisqu'elle s'exprime en fonction du champ de vitesse et du gradient de température (ou densité) potentielle. Cela en fait une quantité diagnostique très intéressante pour l'analyse de cartes météorologiques. En effet, si l'on se fixe un principe d'inversibilité (ou une équation de balance) : $\mathbf{u} = \mathbf{f}(PV)$. Alors on peut extraire la dynamique de l'écoulement (c'est-à-dire la vitesse) depuis une carte de PV (Hoskins et al. 1985). Ce modèle de balance simplifie la dynamique afin de déterminer les informations correspondant à la partie de l'écoulement contrainte à la bidimensionnalité par la stratification (voir par exemple McIntyre et Norton (2000) pour des balances plus raffinées). Cette inversion ne permet pas de déterminer les mouvements dus aux ondes d'inertie-gravité.

Le principe d'inversibilité peut se comprendre aisément à travers l'examen de la vorticité dans un écoulement bidimensionnel $\omega = \Delta\psi$ où ω est la vorticité et ψ la fonction de courant. Pour obtenir la fonction de courant à partir de la vorticité, il suffit inverser le laplacien à l'aide d'une fonction de Green adaptée ainsi que de conditions aux limites du domaine. On obtient dans ce cas la partie non-divergente de la vitesse. La partie divergente de la vitesse donnerait plutôt les caractéristiques verticales de la vitesse (par exemple, liées aux ondes d'inertie-gravité).

Ce principe d'inversibilité possède des propriétés intéressantes concernant la nature active de la vorticité. Nous allons reprendre l'argument de McIntyre (présent en particulier dans l'article de Hoskins et al. (1985)) qui essaie d'expliquer la passivité des filaments de vorticité.

La connaissance locale dans l'espace physique de la vorticité n'implique pas la connaissance locale de la fonction de courant ou de la vitesse à cause de l'opérateur d'inversion $\psi = \Delta^{-1}\omega$. Il y a un effet d'échelles de telle sorte que les motifs petite échelle dans le champ ω ont un effet relativement faible sur les champs ψ et $\mathbf{v}$ alors que les motifs grande échelle ont un effet relativement fort. En particulier, ψ et $\mathbf{v}$ sont à différents degrés insensibles à la structure fine de ω . L'opérateur inverse est un opérateur de lissage, qui prend en compte la structure grande échelle de la vorticité par un effet non-local dans l'espace spectral, dont une partie du lissage survit même si elle est suivie par une simple différentiation. Cela signifierait que la vorticité petite échelle est découplée de la vitesse et donc advectée de façon passive.

Cependant, cet argument qualitatif n'est pas exact stricto sensu. Il ne prend pas en compte le fait que le filament de vorticité est détruit par la déformation : il faut donc examiner non pas le champ de vitesse mais il faut pouvoir comparer les champs de vorticité et de déformation (Dritschel et al. 1991). Or la vorticité du filament va jouer un rôle important dans ce processus de destruction et peut résister à la déformation due à la grande échelle et induire un effet important sur le champ de vitesse.

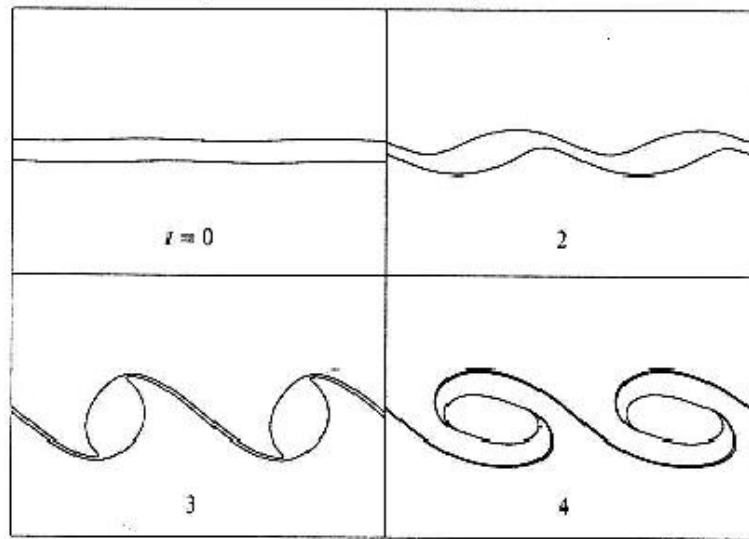


Figure 3.12: Instabilité d'un filament de vortacité perturbé initialement, calculée par la méthode de dynamique de contours (tiré de Waugh et Dritschel (1991)).

3.4.2 Instabilité des filaments de vortacité

La relation cinématique entre vortacité et fonction de courant peut avoir des conséquences dynamiques importantes sur l'évolution de la vortacité. Considérons une bande longiligne isolée qui possède une certaine vortacité. Cette bande (ou filament) est instable par le mécanisme classique de Rayleigh (1880), problème réétudié en particulier par Waugh et Dritschel (1991). Le mécanisme de l'instabilité est due à la propagation d'ondes sur chaque bord du filament dans le sens opposé à l'écoulement avec amplification des ondes lors du verrouillage de phase. L'instabilité a lieu pourvu que la longueur d'onde de ces perturbations soit à peu près cinq fois plus grande que la largeur du filament et elle se traduit par l'enroulement de la bande de vortacité en petits tourbillons comme on peut le voir sur la figure 3.12.

Dritschel (1989b) a étudié ce phénomène en présence d'un cisaillement externe ou plus généralement d'une déformation externe (Dritschel et al. 1991). Ces études montrent qu'un taux de déformation externe égal au quart de la vortacité du filament est capable de supprimer le mécanisme d'instabilité et donc de rendre le filament passif.

Dans un champ turbulent, les filaments de faible vortacité vont se comporter de manière passive car ils subiront l'influence de la déformation provoquée par les tourbillons voisins, comme il a été montré par Kevlahan et Farge (1997). L'effet de stabilisation à longue portée des tourbillons est dû à l'effet à longue portée de leur déformation contre un effet à courte portée de leur vortacité.

Le fait que la vortacité se comporte de façon passive lorsqu'elle est sous l'influence d'un champ de déformation externe avait été présenté par différents auteurs (Kraichnan 1975, Herring 1975, Hoskins et al. 1985, Pierrehumbert 1991). Ces auteurs en fait argumentaient en terme d'échelle, c'est-à-dire qu'ils considéraient que les filaments

de vorticité étaient passifs à cause de la déformation grande échelle des tourbillons. Or ce que nous indique les résultats de Dritschel et al. (1991) est que ce n'est pas un problème d'échelle mais de force relative des effets de déformation externe par rapport aux effets de rotation induite par la vorticité du filament.

3.4.3 Effet d'élasticité en présence de forts gradients de PV

Généralement, les tourbillons sont associés à un fort gradient de vorticité potentielle à leur bord comme on a vu précédemment. Il a été conjecturé que ce gradient peut leur permettre en fait de résister à la déformation extérieure (McIntyre 1989).

Lorsque le tourbillon est soumis à une forte perturbation, des ondes analogues aux ondes de Rossby classiques se propagent le long de ce bord à cause du déplacement des contours de PV. La propagation de ces ondes est due à l'effet rétroactif de la distribution de PV sur la vitesse de manière analogue au mécanisme classique de propagation des ondes de Rossby. Ces ondes ne déferlent pas forcément et pourraient permettre au tourbillon de se maintenir (Hoskins et al. 1985). Jukes et McIntyre (1987) utilisent le terme "élasticité" pour qualifier ce phénomène qui s'observe par exemple pour le tourbillon polaire stratosphérique qui semble résister à l'intrusion de l'air des latitudes moyennes (Jukes et McIntyre 1987). McIntyre (1989) pense que le fort gradient de PV crée une véritable "barrière dynamique" puisqu'il résiste à la déformation due aux perturbations extérieures. Le terme "dynamique" fait référence au fait que le gradient de PV a un effet de rétroaction sur le champ de vitesse qui permettrait au tourbillon de résister aux perturbations extérieures. Cependant, on peut objecter que ce fort gradient n'est simplement que la manifestation d'une barrière au mélange (Pierrehumbert 1991) et n'est pas associé à un effet dynamique sur l'évolution du tourbillon.

Une autre manifestation de ce phénomène de "barrière dynamique" liée à un fort gradient est la persistance de la non-axisymétrie des tourbillons avec un fort gradient de bord (Dritschel 1998).

Il faut cependant noter que ces raisonnements sur les gradients de vorticité potentielle ne prennent pas en compte les instabilités associées aux structures étudiées. Par exemple, une bande rectiligne de vorticité uniforme est solution des équations d'Euler. Elle possède un gradient infini sur ses bords et elle est pourtant instable par l'instabilité de Rayleigh (1880) qui la fait s'enrouler. On voit donc que *les gradients de vorticité potentielle ne sont pas exactement une barrière dynamique mais plutôt une manifestation d'une barrière au transport.*

3.4.4 Relation entre la vorticité et la déformation

3.4.4a Relation de conjugaison entre la déformation et la vorticité

La nature active de la vorticité peut se montrer à travers les relations *cinématiques* entre la vorticité et la déformation. Nous nous intéresserons ici à deux résultats très similaires (Ohkitani 1994, Weiss 1991) qui montrent ce phénomène.

Ohkitani (1994) a établi une relation de conjugaison entre le taux de déformation et la vorticité. Cette relation s'écrit grâce à un opérateur T linéaire et non-local

spatialement :

$$T[O] = S \quad \text{et} \quad T[S] = -O ,$$

$$\text{avec} \quad S = \frac{1}{2}((\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^*) \quad \text{et} \quad O = \frac{1}{2}((\nabla \mathbf{u}) - (\nabla \mathbf{u})^*) .$$

Ici S et O sont respectivement les parties symétriques et antisymétriques du tenseur de gradient de vitesse, autrement dit la matrice de déformation et la matrice de rotation due à la vorticité.

L'opérateur T peut s'écrire sous la forme

$$T[A_{ij}] = -\partial_{ik}(\Delta^{-1}A_{kj}) + \partial_{jk}(\Delta^{-1}A_{ik}) ,$$

ou bien en termes d'intégrales singulières (ici en deux dimensions) :

$$T[A_{ij}](\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} VP \int \frac{r_k A_{kj}(\mathbf{y}) r_i - r_j A_{ik}(\mathbf{y}) r_k}{r^4} dy \quad \text{avec} \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y} , \quad (3.1)$$

où l'intégrale de valeur principale signifie $VP \int = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq \epsilon}$. Cette expression provient de la loi de Biot et Savart reliant la vitesse à la vorticité (Constantin 1994).

Une autre façon de voir cette relation entre la déformation et la vorticité a été établie par Weiss (1991). Celui-ci montre qu'il existe une relation entre les composantes spectrales de la déformation et de la vorticit ¹ :

$$\hat{\sigma}_s(k) + i \hat{\sigma}_n(k) = i \frac{k}{k^*} \hat{\omega}(k) ,$$

avec $k = k_x + ik_y$ le nombre d'onde dans l'espace complexe et k^* son complexe conjugué. $\hat{\sigma}_s$, $\hat{\sigma}_n$ et $\hat{\omega}$ sont les composantes de Fourier, respectivement, du cisaillement, de l'étirement et de la vorticité. Cette équation indique une relation de phase entre les composantes de Fourier de la vorticité et de la déformation.

3.4.4b Exemple dans le cas d'un tourbillon axisymétrique

Comment se traduit cette conjugaison dans les distributions spatiales de la déformation et de la vorticité ?

Considérons tout d'abord un écoulement axisymétrique avec une fonction de courant $\psi(r)$. On peut facilement calculer la vorticité ω et le taux de déformation σ en fonction de ψ :

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2\psi}{dr^2} , \quad \sigma = \left| \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{d^2\psi}{dr^2} \right| .$$

On peut aussi calculer le taux de rotation des axes de déformation $D\phi/Dt$:

$$\frac{D\phi}{Dt} = -\frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} .$$

¹On peut noter que ces résultats se déduisent simplement de la condition d'incompressibilité de la vitesse et des relations reliant la fonction de courant à la vorticité et à la déformation en deux dimensions.

Maintenant, exprimons $d\psi/dr$ en fonction de ω :

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{1}{r} \int_0^r \omega(r') r' dr' .$$

L'intégrale $\int_0^r \omega(r') r' dr'$ représente la vorticité contenue dans un disque de rayon r à un facteur 2π près.

Le taux de déformation s'exprime alors simplement en fonction de la vorticité :

$$\sigma = \left| \frac{2}{r^2} \int_0^r \omega(r') r' dr' - \omega \right| .$$

Supposons tout d'abord que la vorticité soit localisée, c'est-à-dire qu'elle décroisse très vite vers 0. Alors l'intégrale $\int_0^r \omega(r') r' dr'$ va tendre très rapidement vers une constante (égale à la vorticité totale du tourbillon à un facteur 2π près). Le taux de déformation va se comporter comme

$$\sigma(r) \approx \frac{2}{r^2} \left| \int_0^R \omega(r') r' dr' \right|$$

pour $r > R$ où R représente la distance à partir de laquelle la vorticité n'apporte qu'une contribution négligeable à l'intégrale.

Donc, à l'extérieur d'un tourbillon axisymétrique et localisé, le taux de déformation décroît en r^{-2} et ce taux de déformation est d'autant plus fort que la vorticité totale du tourbillon est importante.

De plus, le taux de rotation des axes de déformation $D\phi/Dt$ va décroître de la même manière puisque

$$\frac{D\phi}{Dt} \approx -\frac{1}{r^2} \int_0^R \omega(r') r' dr' \quad \text{pour } r > R .$$

On voit alors que la vorticité localisée induit une rotation des axes de déformation à l'extérieur du tourbillon dont l'amplitude est proportionnelle à la vorticité totale du tourbillon.

On peut examiner maintenant l'intérieur d'un tourbillon axisymétrique. On peut supposer que la vorticité est uniforme à l'intérieur d'un tourbillon comme cela est souvent observé dans les observations ou les simulations numériques. Pour une vorticité constante $\omega(r) = \omega_0$, on obtient

$$\sigma = \left| \frac{2\omega_0}{r^2} \int_0^r r' dr' - \omega_0 \right| = 0 .$$

Dans il n'y a pas de déformation à l'intérieur de tourbillon. La rotation des axes de déformation est alors $\frac{D\phi}{Dt} = -\omega_0/2$, c'est-à-dire dans le sens opposé à la rotation due à la vorticité, ce qui implique qu'il n'y a pas de rotation dans le référentiel des axes de déformation.

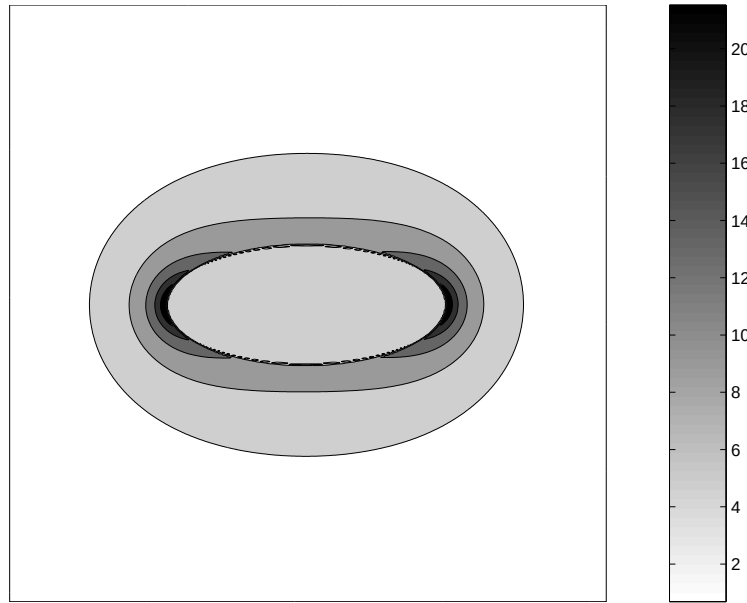


Figure 3.13: Taux de déformation pour l'ellipse de Kirchhoff avec un rapport d'aspect 2.36 et une vorticité intérieure $\omega = 20$.

3.4.4c Distributions spatiales de la vorticité et de la déformation

L'image que l'on peut retirer à partir de ces exemples simples est que la vorticité induit un fort effet non-local dans l'espace physique à travers une lente décroissance du taux de déformation. La décroissance est en r^{-2} pour les tourbillons axisymétriques, mais ce résultat semble aussi vrai pour l'ellipse de Kirchhoff (non présenté) et devrait être généralisable grâce à l'intégrale singulière de l'équation 3.1. De plus, une vorticité uniforme à l'intérieur d'un tourbillon axisymétrique est associée à un taux de déformation nul. Pour un tourbillon plus général, on devrait obtenir un taux de déformation constant à l'intérieur de celui-ci (ce résultat est vrai pour l'ellipse de Kirchhoff à cause de l'ellipticité des lignes de courant (non présenté)). On voit donc que, *pour des structures suffisamment localisées spatialement, la conjugaison a pour effet de découpler spatialement le taux de déformation et la vorticité, tout en leur permettant d'avoir des amplitudes analogues. Par contre, la vorticité induit aussi une rotation des axes de déformation d'amplitude comparable à la vorticité du tourbillon aussi bien à l'intérieur du tourbillon qu'à l'extérieur.*

Le découplage et la relation non-locale entre la vorticité et la déformation peuvent s'observer dans le cas de l'ellipse de Kirchhoff (Lamb 1932). La figure 3.13 montre que le taux de déformation maximal se trouve le long du grand axe juste à l'extérieur de l'ellipse. Cet exemple illustre pourquoi un tourbillon subit généralement une cascade réduite par rapport au scalaire passif puisque le taux de déformation est supérieur à l'extérieur du tourbillon qu'à l'intérieur de celui-ci. De plus, il montre l'effet de non-localité dans l'espace physique, effet qui dépend de la structure géométrique des lignes de courant.

3.4.4d Implication pour la cascade d'énstrophie

La relation de conjugaison s'applique entre la déformation et la vorticité. Or ce qui importe dans la cascade directe d'énstrophie est *la production de gradients de vorticité* associée à la production de petites échelles. L'équation de production de gradient de vorticité est

$$\frac{D|\nabla\omega|^2}{Dt} = -2 \nabla\omega \cdot (S \nabla\omega) .$$

La matrice de déformation S a un effet direct sur la production de gradient. Peut-il y avoir un effet rétroactif des gradients de vorticité sur la déformation ?

Nous venons de voir qu'il y a une relation entre vorticité et déformation. Ce qui nous intéresse est une relation entre le *gradient de vorticité* et la déformation. Si une telle relation existe, cela implique que le gradient de vorticité est aussi relié à la vorticité (puisque la déformation est reliée à la vorticité). On peut donc s'attendre à la nécessité d'une relation entre la vorticité et son gradient pour que le gradient puisse exercer un effet rétroactif sur la déformation.

Prenons l'exemple où la vorticité se décompose sur une distribution très réduite de nombres d'onde. Le gradient de vorticité peut alors s'écrire $\nabla\omega \approx \mathbf{k}_0\omega$ donc on peut espérer que la relation de conjugaison soit efficace pour réduire la cascade (c'est-à-dire la production de gradients) dans ce cas. Un autre exemple correspond aux tourbillons axisymétriques pour lesquels il y a une relation fonctionnelle entre la vorticité et la fonction de courant (c'est-à-dire tel que le jacobien $J(\psi, \omega)$ s'annule). Les gradients de vorticité peuvent aussi s'exprimer à partir de la fonction de courant et on observe qu'ils sont alignés à 45° des axes de déformation, ce qui signifie qu'il n'y a pas croissance des gradients.

On peut essayer de comprendre quand la relation de conjugaison va être effective à partir de la structure spatiale de la vorticité. Le champ de déformation qui règne dans un champ turbulent est produit en majeure partie par les tourbillons ou autres structures d'échelles moyennes et grandes. Les filaments de vorticité qui sont présents dans le champ turbulent n'ont aucune influence sur ces tourbillons car ils ne possèdent pas une énstrophie suffisante pour réagir contre ces tourbillons. Leur vorticité est donc découplée du champ de déformation, ainsi que leur gradient de vorticité. Ces filaments vont donc se comporter de façon passive par rapport à cette déformation qu'ils ne contrôlent pas. Par contre, les tourbillons ont une influence directe sur le champ de déformation du fait qu'ils contiennent une forte énstrophie et qu'ils sont aux mêmes échelles que le champ de déformation. Pour ces structures cohérentes, on peut penser que la relation de conjugaison aura un effet de réduction de la cascade. Il faut cependant admettre que cet argument fondé sur la géométrie des structures est très qualitatif.

3.5 Article : Lapeyre et al. (2000)

3.5.1 Motivation

Nous avons examiné les observations de la vorticité et des traceurs passifs ainsi que les arguments théoriques sur la nature active de la vorticité. Les observations montrent qu'il y a souvent de fortes similitudes entre les distributions spatiales de vorticité potentielle et de traceur passif, en particulier dans les régions de barrière au transport. Dans ces régions où la cascade directe est effective (par exemple, sur le bord des tourbillons, ou pour les régions de formation de filaments de petite échelle), les fronts de PV et de traceurs sont situés aux mêmes endroits mais ils peuvent avoir des forces (mesurées par $|\nabla c|/c$) très différentes. Dans les régions de faible cascade (par exemple au centre des gyres océaniques), les détails de la distribution spatiale de ces traceurs peuvent être différents.

Une différence entre traceurs passifs et vorticité vient de l'existence de structures à forte concentration de vorticité potentielle qui n'ont pas d'analogie pour le traceur passif, comme le montrent les résultats numériques de turbulence. Ces structures à forte concentration de vorticité sont assez peu sensibles à la cascade directe d'ensrophie vers les petites échelles. Par contre, les structures qui contiennent peu d'ensrophie (les filaments que l'on observe fréquemment aussi bien dans les données que dans les simulations de turbulence) se comportent comme des scalaires passifs du point de vue de la forme de leurs isolignes. Ces résultats empiriques nécessitent d'être vérifiés quantitativement pour comprendre comment les cascades directes procèdent effectivement.

Une deuxième différence, qui devrait être reliée à la première, est l'existence d'une relation étroite entre la déformation et la vorticité. Cette relation découple spatialement le taux de déformation de la vorticité, permettant au tourbillon de ne pas subir sa propre déformation.

Au vu de ces similitudes et de ces différences, il semble nécessaire de comparer les propriétés de cascade de la vorticité et d'un scalaire passif. On peut, en particulier, se poser la question de savoir si la relation de conjugaison est effective dans un champ turbulent où des tourbillons interagissent entre eux et où l'on observe des filaments qui semblent passifs. Quel est l'effet des structures géométriques sur cette conjugaison ? Un moyen de répondre à cette question est d'examiner les cascades de scalaire passif et de vorticité pour différents types de structures présentes initialement. Comme nous avons montré que la cascade correspond à la production de gradients de vorticité et que ces gradients doivent obéir à certaines propriétés d'alignement avec des directions déterminées par la topologie de l'écoulement, nous pouvons comparer l'évolution de ces gradients et en particulier leurs propriétés d'alignement. Nous allons examiner les cascades aussi bien dans leur phase transitoire que dans leur phase pleinement développée. La raison de l'examen de la phase transitoire est qu'elle permet d'observer une turbulence quasi non-visqueuse (pour des conditions initiales grande échelle) et de voir comment la dynamique de l'alignement se met en place.

Dynamics of the orientation of gradients of passive and active scalars in two-dimensional turbulence (G. Lapeyre, B. L. Hua et P. Klein). Soumis    Physics of Fluids.

abstract

The active nature of vorticity is investigated in order to understand its difference with a passive scalar. The direct cascade down to small scales is examined through both classical and new diagnostics (based on tracer gradient properties) in numerical simulations of freely decaying 2-D turbulence. During the transient evolution of turbulence, the passive scalar possesses a stronger cascade due to different alignment properties with specific orientations of the flow topology which have been theoretically predicted. In strain-dominated regions, the passive scalar gradient better aligns with the specific orientation while it is the opposite in effective-rotation-dominated regions. A study of the kinematic alignment properties shows that this is due to structures with closed streamlines in the latter regions. However, when turbulence is fully developed, both active and passive tracer gradients have identical orientations (i.e. there is a *perfect alignment* between the two gradients, all the more so when they are stronger). The effect of diffusion on the cascade is also studied.

3.5.2 Position of the problem

For the two-dimensional Euler equations, vorticity obeys the same equation as a passive scalar, in that it is conserved on Lagrangian trajectories. However vorticity is linked in a *kinematic* sense to the velocity which advects it, since vorticity is the Laplacian of the streamfunction. The few studies concerned with this problem in 2-D turbulence (Babiano et al. 1987, Ohkitani 1991) have pointed out differences and similarities between the two tracers. One striking similitude is that passive scalar and vorticity present similar shape of filamentary structures (Babiano et al. 1987, Ohkitani 1991).

Several papers (Okubo 1970, Weiss 1991, Protas et al. 1999, Hua et Klein 1998) have investigated the vorticity gradient dynamics and recent studies (Lapeyre et al. 1999, Klein et al. 2000) have highlighted the importance of the dynamics of orientation of passive scalar gradient, taking into account the effect of the velocity and acceleration gradient tensors (as the latter has been shown to be essential for the dynamics (Hua et Klein 1998, Hua et al. 1998)). Our aim is to use the concepts developed in these studies to revisit the problem of the nature, passive or active, of vorticity. Our analysis is based on the examination of the direct cascade of both tracers down to small scales. The manifestation of this cascade is the production of small scales, that is the production of *strong tracer gradients*. Analyzing these gradients for the two tracers should improve our knowledge of vorticity dynamics.

The present paper is an attempt to assess quantitatively the differences and similarities between the vorticity and passive scalar cascades using numerical simulations of 2-D turbulence in free decay. The study uses several diagnostics related to the tracer cascades through the evolution of the turbulent field, both classical ones (spatial and spectral characterizations of the cascades) but also original ones based on vorti-

city and passive scalar gradients, in particular their orientation properties. Moreover, the effect of diffusion on the cascade is also examined.

The first section of this paper is dedicated to a review of the different arguments (theoretical and observational) about what is known about vorticity and passive scalar cascades. Then, in section 2, we describe the numerical simulations used in this paper and the properties of their initial conditions. The third section is devoted to usual diagnostics of the tracer cascades. In section 4, we examine the properties of the orientations of both tracers. This section reveals novel aspects of the cascades. Finally, we draw more general conclusions on the tracer cascades, summarizing the different aspects examined in this paper.

3.5.2a *Vorticity as an active tracer*

There are several arguments for considering that vorticity should be dynamically active, i. e. should differ from a passive scalar. The first one is due to the fact that vorticity is kinematically related to the streamfunction and thus the enstrophy flux for a particular wavenumber in Fourier space has no local contribution. This behavior will occur if vorticity is a function of streamfunction ($\omega = f(\psi)$) : vorticity remains stationary, which is likely to occur for vortices. On the other hand, the passive scalar variance flux has a contribution stemming from the interaction between the local wavenumbers of respectively passive scalar and streamfunction.

Another, more restrictive, aspect of that kinematic relationship is the relationship in spectral space between vorticity and strain (Weiss 1991) :

$$\hat{\sigma}_s(k) + i \hat{\sigma}_n(k) = i \frac{k}{k^*} \hat{\omega}(k) ,$$

where $k = k_x + ik_y$ is the wavenumber in complex space and k^* its complex conjugate. $\hat{\sigma}_s$, $\hat{\sigma}_n$ and $\hat{\omega}$ are the Fourier components of respectively shear strain, normal strain and vorticity (see section 3.5.2c for exact definitions).

This phase relationship between vorticity and strain was also noted by Ohkitani (1994) as he found that these quantities are related in physical space by a conjugation relationship (with a non-local and linear operator) in two and three dimensions. This conjugation relationship seems to prevent vorticity from cascading in three dimensions (Ohkitani 1998).

One manifestation of these kinematic properties is that vorticity filaments are known to be unstable (the so-called Rayleigh (1880) instability) and roll up in vortices. Thus vorticity structures have a feedback effect on the velocity field that advects them and can develop nontrivial behaviors which differ from the passive scalar behavior.

Babiano et al. (1987) and Ohkitani (1991) have examined the differences between vorticity and passive scalar in numerical simulations of forced turbulence in stationary state. They have shown that the scalar variance flux is greater than the enstrophy flux at the scales of vortices and this result should also hold for decaying turbulence. This difference was attributed to the role of vortices that tend to protect against the enstrophy cascade as confirmed by Babiano et al. (1987) and McWilliams

(1990a) : the enstrophy cascade is faster when the vortices are filtered than when the vortices are present. Thus the straining field produced by vortices is more efficient to transfer passive scalar variance than enstrophy to small scales.

3.5.2b *Vorticity as a passive tracer*

One could object to these arguments that if the initial conditions of vorticity and passive scalar are identical, they remain identical through time evolution. However the weakness of this argument is that it is a very particular solution.

The active nature of vorticity filaments can be questioned by the results of Dritschel et al. (1991) who showed that vorticity filaments do not develop the classical roll-up instability if they are exposed to external strain as small as 0.06 of the filament vorticity. The vortices of 2-D turbulence can have a stabilization effect on the vorticity filaments as confirmed by Kevlahan et Farge (1997).

Concerning the conjugation relationship pointed out by Weiss (1991) and Ohkitani (1994), its importance in two dimensions could be much more reduced than in three dimensions. In two dimensions, the cascade to small scales implies the production of vorticity *gradients*. If these gradients are uncorrelated with vorticity, it is not obvious that the conjugation relationship between strain and vorticity is able to impede the vorticity cascade, that is the production of vorticity gradients by straining processes.

Babiano et al. (1987) noted in their numerical simulations the similar shapes of the small scale structures of the vorticity and the passive scalar outside the coherent vortices. They showed also that vorticity and passive scalar have much more similar spectra for structures containing small amount of vorticity than for the entire flow. Thus it is tempting to state that the small scale structures of vorticity outside the vortices should be passive and possess a similar cascade to the passive scalar one.

3.5.2c *Tracer dynamics*

We need to know the properties of the tracer cascade in order to compare vorticity and passive scalar cascades. This cascade is related to the production of small scales, that is strong *tracer gradients*. Lapeyre et al. (1999) and Klein et al. (2000) have recently addressed the dynamics of tracer gradient formation. Let us summarize their basic results as they will be used in the present paper.

Consider a tracer q which is advected along Lagrangian trajectories. Its gradient verifies the equation

$$\frac{D\nabla q}{Dt} = -[\nabla \mathbf{u}]^* \nabla q ,$$

where $[\nabla \mathbf{u}]$ is the velocity gradient tensor. This tensor can be decomposed into three parts : vorticity ω , shear strain σ_s and normal strain σ_n . It is more convenient to split the strain field into its norm and orientation and to decompose the passive scalar

gradient ∇q in the same way :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \partial_x u - \partial_y v & \nabla q &= \rho (\cos \theta, \sin \theta) \\ \sigma_s &= \partial_x v + \partial_y u & (\sigma_s, \sigma_n) &= \sigma (\cos 2\phi, \sin 2\phi) \\ \omega &= \partial_x v - \partial_y u & \text{with } \rho \geq 0 \text{ and } \sigma \geq 0. \end{aligned}$$

The key result pointed out by Lapeyre et al. (1999) is that the equation of the relative orientation of the tracer gradient (which makes an angle θ with the x -axis) with respect to the compressional strain axis (which makes an angle $\frac{\pi}{4} - \phi$ with the x -axis) characterizes the full tracer gradient dynamics :

$$\begin{aligned} \zeta &= 2(\theta + \phi) , \\ \frac{D\zeta}{Dt} &= \omega + 2\frac{D\phi}{Dt} - \sigma \cos \zeta = \sigma(r - \cos \zeta) . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Lapeyre et al. (1999) and Klein et al. (2000) showed that there are two dynamical regimes for the orientation ζ , depending on the parameter $r = (\omega + 2\frac{D\phi}{Dt})/\sigma$. This parameter defines the competition between effective rotation effects (the sum of vorticity ω and of the rotation of the strain axes $2\frac{D\phi}{Dt}$) and straining effects. The first effect tends to rotate the gradient while the second effect tends to align it with the strain axes.

In regions of the flow where straining effects dominate ($|r| < 1$), the orientation should tend to a stable fixed point of eq. (3.2), i. e.

$$\zeta = \zeta_- \equiv -\arccos r ,$$

as shown in Lapeyre et al. (1999). Moreover, the tracer gradient norm ρ should grow exponentially in time. This regime corresponds to an intense cascade of tracer.

In the regime where effective rotation effects dominate ($|r| > 1$), the tracer gradient should rotate but the rotation rate $\frac{D\zeta}{Dt}$ depends on time. Thus the orientation of minimal rotation rate corresponds to the orientation along which the gradient spends most of its time. This orientation depends on r but also on the Lagrangian evolution of the rate of strain $s = \frac{1}{\sigma^2} \frac{D\sigma}{Dt}$. Thus, the orientation ζ should be statistically close to the orientation of minimal rotation rate, i. e.

$$\zeta = \alpha \equiv \arctan(s/r) + (1 - \text{sign}(r))\frac{\pi}{2} ,$$

as shown in Klein et al. (2000). Moreover the gradient norm ρ should evolve slowly, corresponding to a weak cascade.

These results were obtained by examining the equilibrium solutions of the orientation equation. They were validated in numerical simulations of two-dimensional turbulence (Lapeyre et al. 1999, Klein et al. 2000) which confirm the important roles played by both the velocity gradient tensor (through σ and ω) and the acceleration gradient tensor (through $\frac{D\phi}{Dt}$ and $\frac{D\sigma}{Dt}$) as previously noted by Basdevant et Philipovitch (1994) and Hua et Klein (1998). The orientation and gradient norm approach quantitatively improves the representation of the tracer gradient dynamics with respect to previous studies (Okubo 1970, Weiss 1991).

Thus, the tracer gradient orientation ζ should align with specific orientations that depend on the flow topology. Moreover, this result is based only on the conservation of the tracer on Lagrangian trajectories, which is true for both vorticity and passive scalar. Thus there is no *a priori* reason for a difference of their alignment properties.

3.5.2d Diffusion effects on tracer gradients

The effect of diffusion on the cascade properties is little documented. It is generally assumed that its role is to damp the norm of the tracer gradient. To our knowledge, only two papers examine its effect on the orientation of the gradient. Protas et al. (1999) show in their numerical simulations of 2-D forced turbulence that when increasing the Reynolds number (by using hyper-viscosity instead of Newtonian viscosity), the vorticity gradients better align with the compressional strain axis. On the other hand, Constantin et al. (1995) develop qualitative results on the effect of diffusion, neglecting the effect of the cascade dynamics. If we start from the equation of advection-diffusion,

$$\frac{Dq}{Dt} = \nu \Delta q ,$$

we compute the equation for the norm ρ and the orientation θ of the tracer gradient $\nabla q = \rho(\cos \theta, \sin \theta)$:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\frac{\rho}{2}\sigma \sin \zeta + \frac{\nu}{\rho} \nabla q \cdot \nabla(\Delta q) = -\frac{\rho}{2}\sigma \sin \zeta + \nu \Delta \rho - \nu \rho |\nabla \theta|^2 , \quad (3.3)$$

$$\frac{D 2\theta}{Dt} = \omega - \sigma \cos \zeta + \frac{\nu}{\rho^2} (\nabla q \times \nabla \Delta q) \cdot \mathbf{k} = \omega - \sigma \cos \zeta + 2\nu \Delta \theta + \frac{4\nu}{\rho} \nabla \theta \cdot \nabla \rho , \quad (3.4)$$

with $\mathbf{k}$ the unit vector normal to the plane of motion.

These equations involve the classical diffusion terms ($\nu \Delta \rho$ and $\nu \Delta \theta$) whose effects are to suppress spatial inhomogeneities. However, there are other terms with different effects on the gradient properties.

Let us examine their effects assuming that the other terms (classical diffusion, vorticity and strain) are negligible. On the one hand, from eq. (3.3), for large spatial variations of θ , there is an exponential decay of the gradient norm ρ . Thus regions of large spatial variations of θ should be regions of small gradients (Constantin et al. 1995). On the other hand, the larger the gradient norm ρ is, the smaller the diffusion effect on the orientation should be, because the second diffusive term in eq. (3.4) should be weak. Moreover, Constantin et al. (1995) show that this term was responsible of a spatial alignment of the tracer gradients with the strongest ones.

3.5.3 Initial conditions and their cascade properties

3.5.3a Initial conditions

In order to explore the differences of passive and active tracer cascades, we have used numerical simulations of freely decaying two-dimensional turbulence. The vorticity is then a true Lagrangian invariant like the passive scalar, which is not the

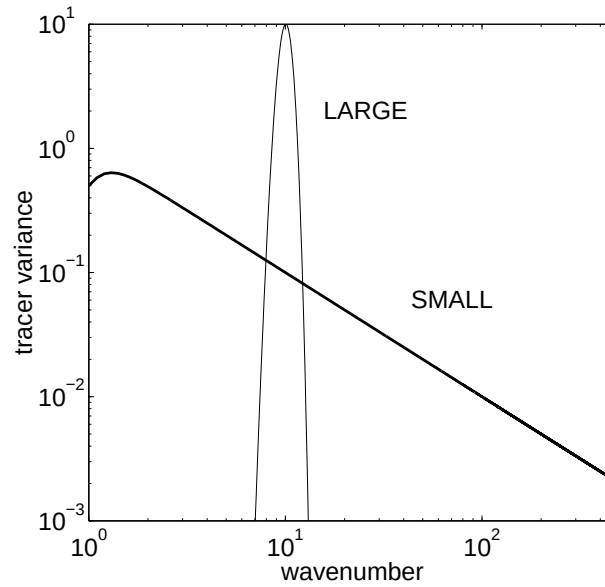


Figure 3.14: Initial tracer spectra for simulations LARGE (solid curve) and SMALL (bold curve).

case in forced simulations. The code used here is a pseudo-spectral code detailed in Hua et Haidvogel (1986) at a resolution of 1024×1024 . The numerical diffusion is a Laplacian for both vorticity and passive scalar with the same coefficient of diffusion ($\nu = 1.5 \times 10^{-5}$). The total kinetic energy is put to 1. This yields a Reynolds number of the order $Re = UL/\nu \approx 4.2 \times 10^5$ (with $L = 2\pi$).

The initial conditions correspond to the same spectra for vorticity and passive scalar but with random phases of their Fourier components. We have performed different simulations with different initial spectral slopes, and only two types of behavior, namely the dominance of either large or small scales, seem to matter as previously noted by Santangelo et al. (1989).

The first set of simulations corresponds to large or intermediate scales. The simulation studied here will be initially

$$k \hat{\omega}_k \hat{\omega}_k^* = k \hat{c}_k \hat{c}_k^* = k \exp(-(k - 10)^2) , \quad (3.5)$$

where $\hat{x}_k$ corresponds to the Fourier component of x at wavenumber k and $\hat{x}_k^*$ corresponds to the complex conjugate of $\hat{x}_k$. ω is the vorticity and c the passive scalar.

This simulation corresponds to a peak at $k = 10$ in tracer spectra as displayed on Fig. 3.14. We call this simulation LARGE. It corresponds initially to structures with closed streamlines (see Fig. 3.15a) and it allows quasi-inviscid dynamics in the beginning of the simulation (because of the absence of small scales).

The second set corresponds to small scale initial structures. For instance, we take

$$k \hat{\omega}_k \hat{\omega}_k^* = k \hat{c}_k \hat{c}_k^* = k^5 / (1 + k^6) .$$

	C	R	S	N
LARGE	-0.60	0.70	0.09	0.47
SMALL	0.00	0.24	0.03	0.16

Tableau 3.1: Quantities related to kinematic properties of initial conditions of the two simulations. C is the correlation between $\mathbf{u}$ and $\nabla\omega$. R is the alignment coefficient of the vorticity gradient with orientation α in effective-rotation-dominated regions. S is the alignment coefficient with orientation ζ_- in strain-dominated regions and N if the alignment coefficient with α also in strain-dominated regions.

We call this simulation SMALL. Its spectrum displayed on Fig. 3.14 has a k^{-1} slope at small scales, typical of 2-D turbulence. In physical space, only very small scale structures are initially present (see Fig. 3.16a) and diffusion is expected to act through the entire range of evolution.

3.5.3b Kinematic properties of the initial conditions

An analysis of the kinematic properties of the initial conditions of the vorticity field can be done to know *a priori* the initial configuration of the enstrophy cascade. There is no such initial cascade properties for the passive scalar as it is decorrelated with the velocity field by the phases randomization.

The first quantity that can be examined is the degree of nonlinearities of our initial conditions. We know that vorticity is conserved on a Lagrangian trajectory, that is

$$\partial_t \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0$$

There can be a substantial depletion of nonlinearities whenever the vorticity advecting term $\mathbf{u} \cdot \nabla \omega = J(\psi, \omega)$ is weak. A non-dimensional measure of this weakness could be a pseudo-correlation coefficient :

$$C = 2 \frac{\langle |\mathbf{u} \cdot \nabla \omega| \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}^2 \rangle \langle |\nabla \omega|^2 \rangle}} - 1 .$$

Because of the random initial conditions, the spatial average $\langle \mathbf{u} \cdot \nabla \omega \rangle$ vanishes motivating the need for absolute value. $C = 1$ corresponds to a perfect correlation between the two vectors while $C = -1$ corresponds to a perfect anti-correlation (i. e. a reduction of nonlinearities). If the two vector fields are decorrelated then $C = 0$.

The quantity C is displayed in table 3.1 for the two initial spectra. The initial condition LARGE has depleted nonlinearities ($C = -0.6$), while the initial condition SMALL does not possess such a depletion and vorticity seems decorrelated with streamfunction. The same quantity for passive scalar (replacing $\nabla \omega$ by ∇c in C) yields 0 for all initial conditions.

The kinematic properties of the vorticity cascade can be examined using a method similar to Shtilman et al. (1993) who investigate the existence of a kinematic origin for the alignment of the vorticity vector with the strain axes in three-dimensional turbulent flows. In the same way, we can examine the kinematic properties of alignment with the dynamical directions derived in Lapeyre et al. (1999) and Klein et al. (2000) and explained in section 3.5.2c. The question which is addressed is how the conjugation between vorticity and strain affects the alignment properties with the specific orientations given by the orientation dynamics. Actually, this conjugation relationship is all the more able to halt the cascade as it links quantities (strain, vorticity) directly involved in the production of vorticity gradients.

A measure of the alignment properties is given by three quantities that express the alignment for strong gradients, in regions dominated by strain ($|r| = \left| \frac{\omega + 2 \frac{D\phi}{Dt}}{\sigma} \right| < 1$) and regions dominated by effective rotation ($|r| > 1$). These quantities are

$$\begin{aligned} R &= \frac{\langle |\nabla\omega|^2 \cos(\zeta_\omega - \alpha) \rangle}{\langle |\nabla\omega|^2 \rangle} && \text{in effective rotation regions,} \\ S &= \frac{\langle |\nabla\omega|^2 \cos(\zeta_\omega - \zeta_-) \rangle}{\langle |\nabla\omega|^2 \rangle} && \text{in strain regions,} \\ N &= \frac{\langle |\nabla\omega|^2 \cos(\zeta_\omega - \alpha) \rangle}{\langle |\nabla\omega|^2 \rangle} && \text{in strain regions.} \end{aligned}$$

Here we define $\zeta_\omega = 2(\theta_\omega + \phi)$ where $\nabla\omega = |\nabla\omega| (\cos\theta_\omega, \sin\theta_\omega)$ and ζ_c is defined in the same way for the passive scalar field. The average operator $\langle \rangle$ corresponds to a spatial average in regions of $|r| < 1$ for S and N and regions of $|r| > 1$ for R . A value 1 corresponds to perfect alignment with the orientation ζ_- or α . If the orientation is equipartitioned, we obtain 0 (but the reverse is not true). We have not examined the alignment with strain eigenvectors as in Protas et al. (1999) because it is twice weaker than with our specific orientations (Lapeyre et al. 1999, Klein et al. 2000).

For the passive scalar field, we find that these quantities yield 0. The probability density functions (p.d.f.) of $\zeta_c - \zeta_-$ and $\zeta_c - \alpha$ are almost equipartitioned, confirming that there is no alignment of passive scalar gradient with these specific orientations (not shown).

From table 3.1, we note that initial conditions of simulation LARGE present a tendency to align with α ($R \approx 0.70$) in effective rotation regions (i. e. when $|r| > 1$) whereas such a tendency is much more reduced for simulation SMALL ($R \approx 0.24$). This has been confirmed by the alignment p. d. fs which exhibit a stronger peak for simulation LARGE than for simulation SMALL (not shown). Thus the effect of the conjugation relationship between strain and vorticity depends on the types of structures present in the flow. If there are closed streamlines (as in simulation LARGE), the conjugation relationship aligns kinematically vorticity gradients with the specific orientation of effective-rotation-dominated regions. We have checked that this result depends only on the geometry of the structures and not on their scales (i. e. taking a spectrum peak at $k = 100$ in eq. 3.5 leads to similar values of R).

Actually, this alignment is associated with a weak cascade, i. e. a weak production of tracer gradients (Klein et al. 2000). As a consequence, this kinematic alignment

linked to closed streamlines (i. e. vorticity patches) favors a weak cascade as previously observed by Babiano et al. (1987) and McWilliams (1990a). On the contrary, if there are no such structures present in the field, the conjugation relationship between strain and vorticity has no effect on the alignment.

In regions where strain dominates ($|r| < 1$), we obtain small values of S for both initial conditions; thus there is no kinematic alignment with ζ_- (also confirmed by the almost equipartitioned shape of the alignment p. d. f. (not shown)). However, the kinematic alignment with α seems to hold in regions dominated by strain but with a weaker amplitude than in effective rotation regions, as $N = 0.47$ for simulation LARGE and $N = 0.16$ for simulation SMALL.

These kinematic results demonstrate that the conjugation relationship between vorticity and strain can only occur if the vorticity field possesses specific geometrical properties, such as the presence of closed streamlines (i. e. vorticity patches). Because of these structures, there is a kinematic alignment with the orientation α , which is associated with a weak cascade.

3.5.3c Inviscid and diffusive cascade timescales

We can define two timescales associated with the tracer cascades. The first timescale is related to the process of the non-diffusive cascade by stretching and folding of the scalar isolines. This timescale is

$$\tau_{adv} = \frac{1}{\sqrt{\langle \sigma^2 \rangle}} ,$$

where σ is the rate of strain and $\langle \rangle$ is the spatial average. This is the usual enstrophy timescale as $\langle \sigma^2 \rangle = \langle \omega^2 \rangle$ for 2-D turbulence.

A second timescale intervenes if one takes into account the role of diffusion. Diffusion acts against strain on the spatial scale $L_{diff} = \left(\nu / \sqrt{\langle \sigma^2 \rangle} \right)^{1/2}$. Consider a line element of width L_0 . By stretching, its width decays in time as $L(t) = L_0 \exp(-t \sqrt{\langle \sigma^2 \rangle})$. Thus diffusion will be important at a time τ_{diff} when L reaches the diffusive length-scale L_{diff} :

$$\tau_{diff} = \frac{1}{2\sqrt{\langle \sigma^2 \rangle}} \log \frac{L_0^2 \sqrt{\langle \sigma^2 \rangle}}{\nu} .$$

Here L_0 can be set by the typical wavelength of the vorticity gradient, for instance

$$L_0^{-2} = \frac{\langle |\nabla \Delta \omega| \rangle}{\langle |\nabla \omega| \rangle} .$$

These timescales, as well as the ratio τ_{diff}/τ_{adv} , can be computed for the initial conditions (table 3.2). Simulation LARGE has a typical inviscid cascade time scale much shorter than the diffusive cascade timescale $\tau_{diff} = 4.65\tau_{adv}$ while these two timescales are comparable for simulation SMALL. This means that diffusion is likely to be negligible in the tracer cascade processes for simulation LARGE for a time $t < \tau_{diff}$. For simulation SMALL, diffusion will be important *ab initio*.

	τ_{adv}	τ_{diff}	τ_{diff}/τ_{adv}
LARGE	0.100	0.441	4.65
SMALL	0.110	0.097	0.88

Tableau 3.2: Different timescales related to the tracer cascade for the two simulations : τ_{adv} is the timescale of the non-diffusive cascade (based on enstrophy). τ_{diff} is the timescale of *diffusive* cascade as defined in section 3.5.3c.

3.5.4 Physical and spectral characterization of the cascades

3.5.4a Evolution in physical space

It is interesting to examine the time evolution of the vorticity and passive scalar fields to assess their differences. The evolution of the vorticity field is well described in the literature (McWilliams 1984, Brachet et al. 1988, Santangelo et al. 1989).

Let us consider first simulation LARGE. Initially, the vorticity field and the passive scalar field are decorrelated in space but present the same types of structures (Figs. 3.15a and 3.15b). In the very early stage of the evolution ($t \approx 3\tau_{adv}$), the vortices do distort the passive scalar field but remain quasi-stationary themselves. Later on, the vortices begin to interact with each other, a process which creates filaments of vorticity while shearing the weakest vortices (Fig. 3.15c). During the same time, the passive scalar reaches the diffusive lengthscale and becomes homogenized very rapidly both outside and inside vortices (Fig. 3.15d). When the turbulence becomes fully developed, the vorticity field displays the presence of coherent vortices and vorticity filaments (Fig. 3.15e). The passive scalar field displays the same kind of geometry (Fig. 3.15f) : homogenized regions inside the vortices and filaments outside. As vortices are present from the start, the vorticity field is more homogenized inside the vortices than the scalar field which often forms spirals. This simulation shows that the process of production of small scales is faster for the scalar field than for the vorticity. The initial presence of the vortices seems to inhibit the cascade of vorticity to small scales.

The evolution of simulation SMALL is different. Initially, there are very small scale structures (Figs. 3.16a and 3.16b). These structures interact by straining and diffusive processes and vortices emerge slowly (Fig. 3.16c). The tracer field evolve in the same way (Fig. 3.16d). When turbulence is fully developed, larger vortices develop (Fig. 3.16e) and shear the passive scalar field (Fig. 3.16f) as was also found in simulation LARGE.

3.5.4b Spectral evolution

As the total tracer variance constantly decreases because of dissipation, the tracer spectra are non-dimensionalized such that a value of 1 is obtained for $k = 20$. This procedure allows to examine the time evolution of the slope of the spectra at large scales and at small scales.

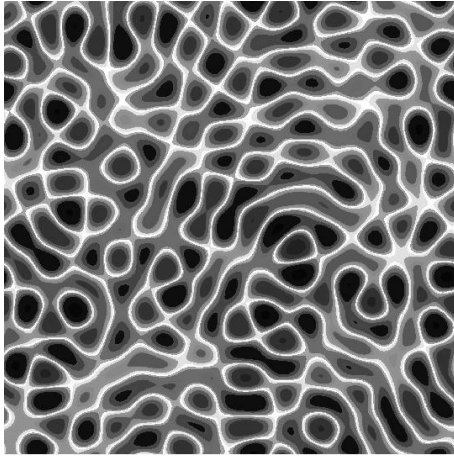


Figure 3.15a :

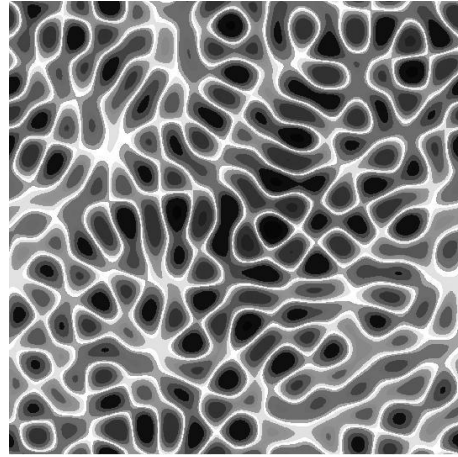


Figure 3.15b :

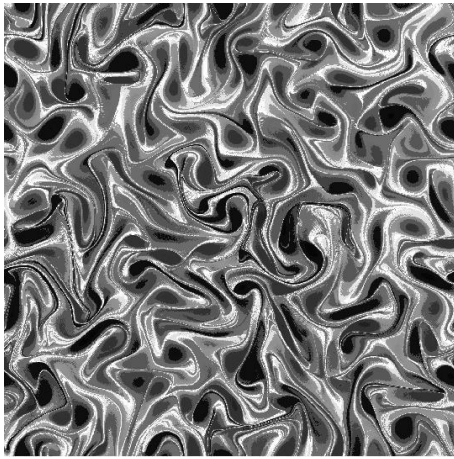


Figure 3.15c :

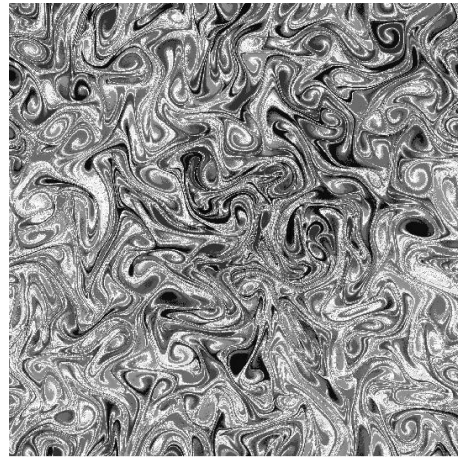


Figure 3.15d :

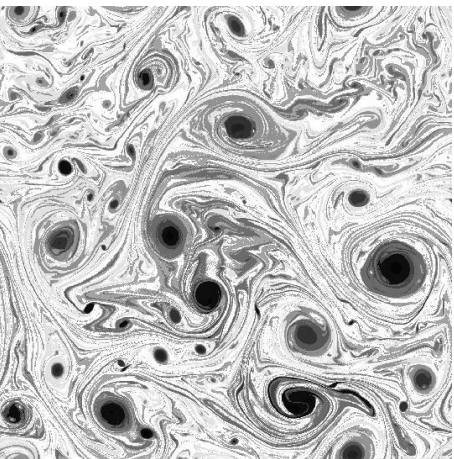


Figure 3.15e :

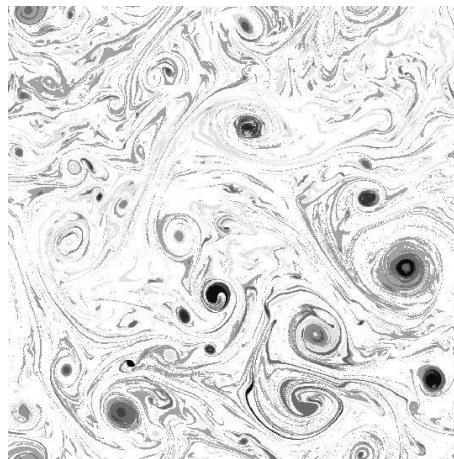


Figure 3.15f :

Figure 15 : (a, c, e) vorticity field at time $t = 0, 1.02, 10.02$ for simulation LARGE. (b, d, e) passive scalar field at the same times.

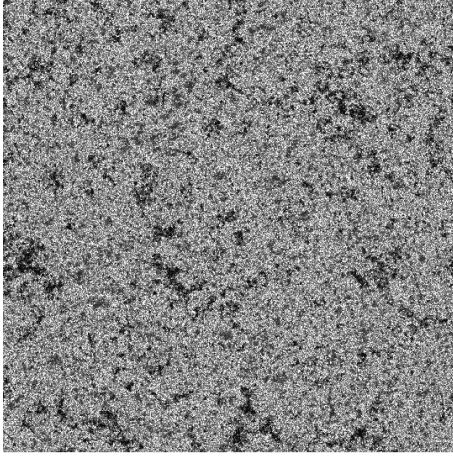


Figure 3.16a :

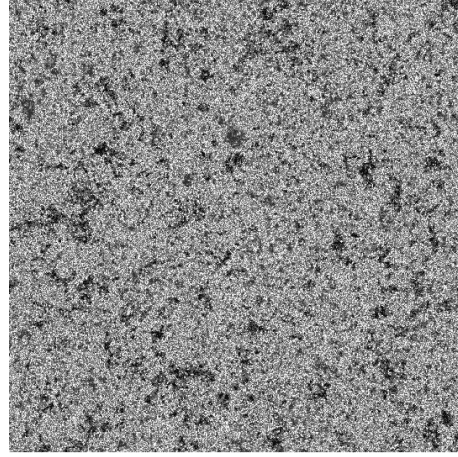


Figure 3.16b :

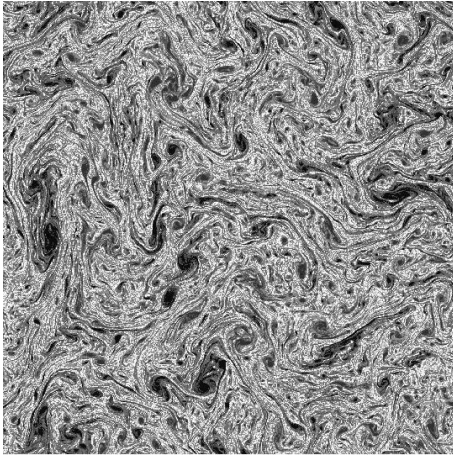


Figure 3.16c :

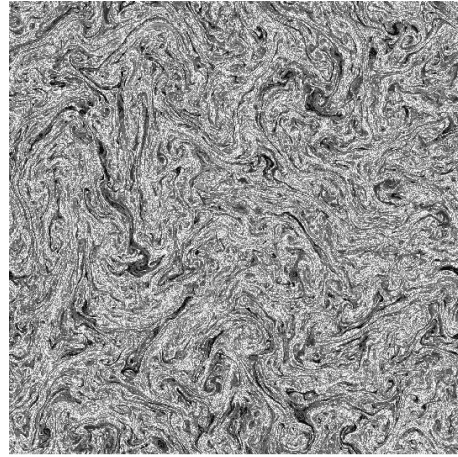


Figure 3.16d :

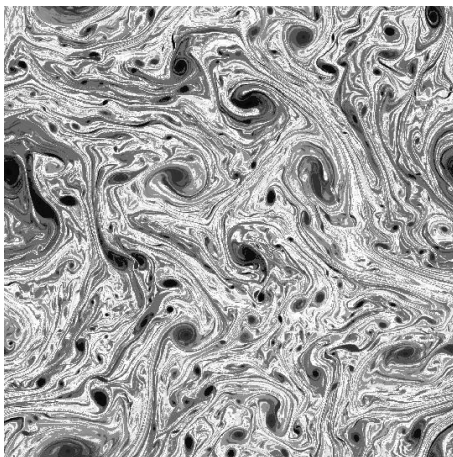


Figure 3.16e :

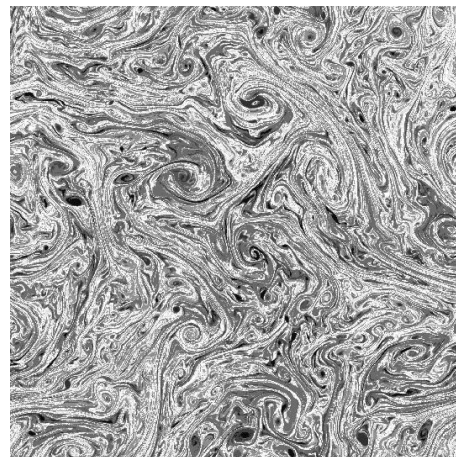


Figure 3.16f :

Figure 16 : (a, c, e) vorticity field at time $t = 0, 1.14, 4.89$ for simulation SMALL.
 (b, d, f) passive scalar field at the same times.

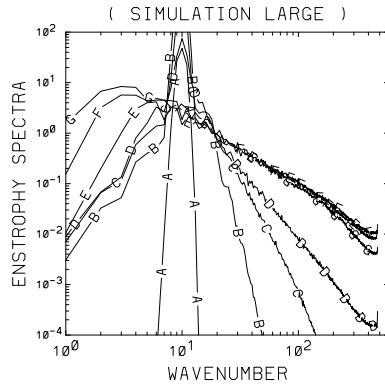


Figure 3.17a :

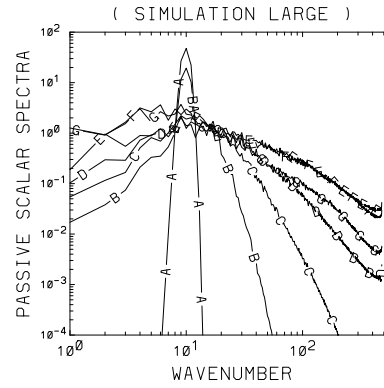


Figure 3.17b :

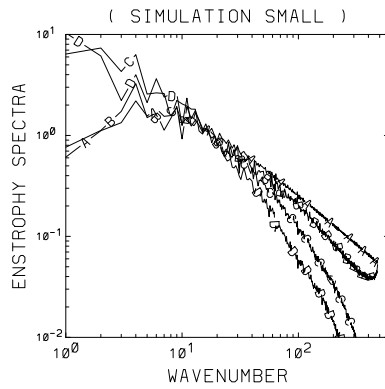


Figure 3.17c :

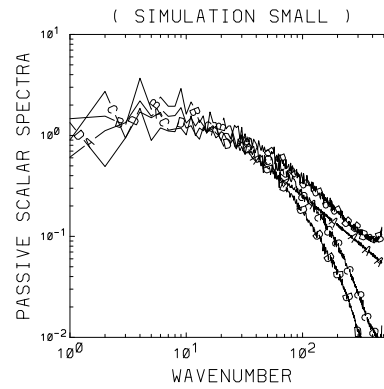


Figure 3.17d :

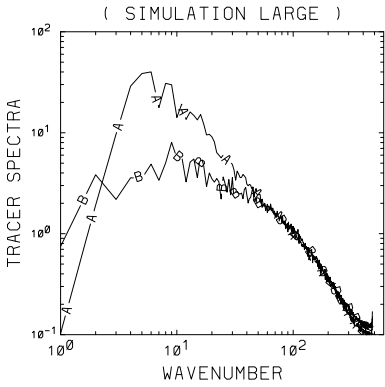


Figure 3.17e :

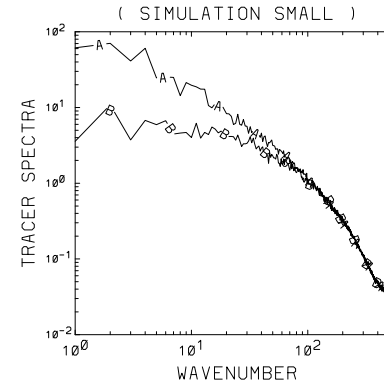


Figure 3.17f :

Figure 17 : (a, c) Enstrophy spectra. (b, d) passive scalar spectra for simulation LARGE (a, b) at $t = 0, 0.06, 0.18, 0.46, 1.86, 4.74, 8.1$ (A-G), for simulation SMALL (c, d) at $t = 0, 0.45, 5.79, 10.5$ (A-D). (e-f) : curve A, vorticity spectrum ; curve B, passive scalar spectrum. (e) simulation LARGE at $t = 1.86$. (f) simulation SMALL at $t = 4.89$.

Simulation LARGE has initially a spectrum peaked at $k = 10$ for both vorticity and passive scalar. As time evolves, the enstrophy spectrum spreads more and more to small scales as well as to large scales (Fig. 3.17a). When the enstrophy spectrum becomes fully developed, it exhibits a spectral slope steeper than -1 (around -1.4) at the intermediate scales $7 < k < 100$ (curves E and F). Moreover, we observe the accumulation of enstrophy at large scales, because of the inverse energy cascade. The passive scalar spectrum has a faster development (Fig. 3.17b). The passive scalar slope is shallower (around -0.9) at intermediate scales when turbulence is fully developed (see also Fig. 3.17e). But we observe a steepening of the slope at later time (curve G), due to the dissipation that permanently removes enstrophy and scalar variance at small scales.

Initially, for simulation SMALL, the tracer spectra have a power law k^{-1} at small and intermediate scales (Figs. 3.17c and 3.17d). This power law is modified by dissipation at small scales and the spectra become steeper and steeper. At large scales, we observe the accumulation of enstrophy while the passive scalar spectrum seems stationary.

A comparison of both tracers in fully developed turbulence, before dissipation begins to erode completely the spectra, shows that vorticity and passive scalar have identical spectra at small scales (Figs. 3.17e and 3.17f). At intermediate scales, passive scalar spectra are shallower than vorticity spectra. At large scales, we observe (at later times) the accumulation of enstrophy which is absent for passive scalar. The overlap of the two tracer spectra at small scales could imply an identical nature of the cascade for both tracers, even if there were differences during the transient development of the spectra. The major difference appears at large and intermediate scales where enstrophy seems to move towards large scales : because of the inverse energy cascade and the accumulation of vorticity into vortices, an amount of enstrophy is cascading to large scales, which produces a steeper spectrum for vorticity than for passive scalar, since such a behavior is absent for the latter.

3.5.4c Cascade efficiency

A widely used diagnostic of the cascade is given by the efficiency parameters (or two-dimensional skewness (Brachet et al. 1988)) Σ_ω and Σ_c . This quantity is related to the inviscid equation for the tracer gradient, for instance vorticity gradient :

$$\frac{D|\nabla\omega|^2}{Dt} = -|\nabla\omega|^2 \sigma \sin \zeta_\omega .$$

The efficiency parameter allows to quantify whether the cascade has reached its maximal gradient growth rate :

$$\Sigma_\omega = \frac{-\langle |\nabla\omega|^2 \sigma \sin \zeta_\omega \rangle}{\langle |\nabla\omega|^2 \rangle \langle \sigma^2 \rangle^{1/2}} .$$

We define Σ_c in the same way, but replacing $|\nabla\omega|$ by $|\nabla c|$ and ζ_ω by ζ_c . Note that $\sin \zeta_\omega = -1$ corresponds to the alignment of the vorticity gradient with the compressional strain axis, that is the eigenvector of the strain rate tensor responsible of tracer gradient growth.

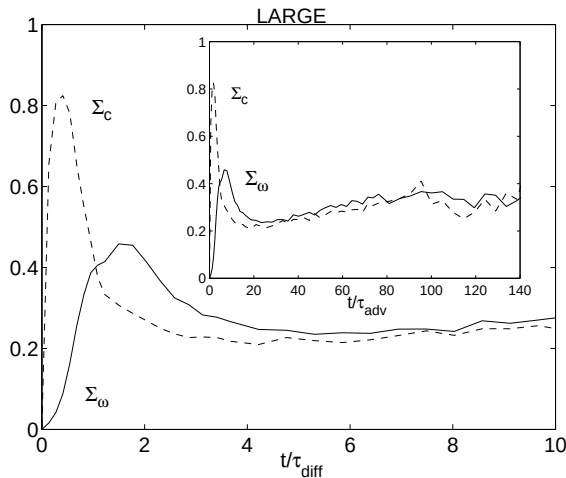


Figure 3.18a :

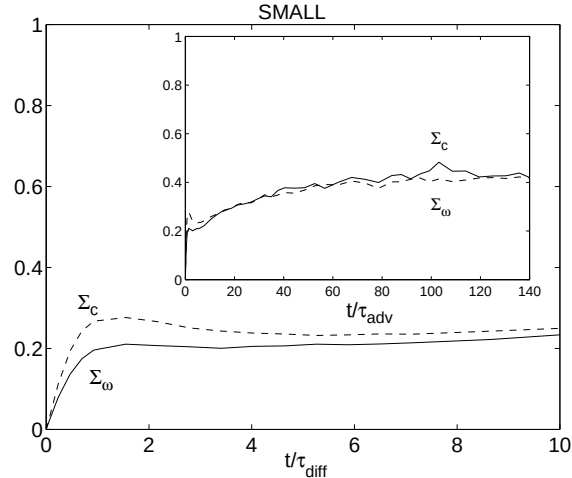


Figure 3.18b :

Figure 18 : Time evolution of the cascade efficiencies Σ_ω and Σ_c for simulations LARGE (a) and SMALL (b) ; the abscissa is t/τ_{diff} in the main figure, t/τ_{adv} in the insert. Solid curve : vorticity efficiency Σ_ω . Dashed curve : passive scalar efficiency Σ_c .

These efficiency parameters are displayed on Figs. 3.18a and 3.18b for the two simulations. Because of the random phase initialization, $\Sigma = 0$ initially. As soon as turbulence develops, Σ becomes and remains positive which corresponds to the production of tracer gradients (note that its definition does *not* imply positiveness).

For both simulations, we observe that the passive scalar efficiency increases more strongly than the vorticity efficiency. An explanation could be the conjugation relationship between vorticity and strain. This seems confirmed by the larger ratio Σ_c/Σ_ω for simulation LARGE than for SMALL (1.80 against 1.31) since simulation LARGE has initially stronger kinematic properties. Moreover when turbulence is fully developed, the quantities Σ_c and Σ_ω reach a mean plateau around 0.4 .

Initially, the efficiency parameter is much smaller in simulation SMALL than in simulation LARGE. A possible explanation is the important initial effect of diffusion in simulation SMALL, which could decrease the alignment with the strain axes. This is confirmed by the local maximum of the efficiency parameter occurring at time $t \approx \tau_{diff}$ for both simulations. This result could be consistent with the result of Protas et al. (1999) which indicates a better alignment with the compressional strain axis when the Reynolds number increases.

3.5.5 Alignment properties of tracer gradients

Another aspect of the tracer cascade concerns the alignment of tracer isolines with the flow topology and the alignment of the two tracers with each other. Actually, it has been shown that the flow topology forces any tracer gradient to align with

specific orientations in a non-diffusive situation (Lapeyre et al. 1999, Klein et al. 2000). Some qualitative results (Babiano et al. 1987, Ohkitani 1991) observe similar tracer isolines (that is a tendency for an alignment between the two tracer gradients). Our numerical simulations can be used to confirm quantitatively this fact and also to investigate the role of diffusion on the orientation dynamics.

3.5.5a Diffusion effect on alignment

First, let us examine the effect of diffusion on the orientation of tracer gradient in order to explain the time evolution of our diagnostics. The equation for the vorticity gradient orientation taking into account Newtonian diffusion is

$$\frac{D 2\theta_\omega}{Dt} = \omega - \sigma \cos \zeta_\omega + \mathcal{D}_\omega, \quad (3.6)$$

with $\mathcal{D}_\omega$ the diffusive term :

$$\mathcal{D}_\omega = \frac{\nu}{|\nabla\omega|^2} (\nabla\omega \times \nabla(\Delta\omega)) \cdot \mathbf{k}.$$

We can compute the ratio between diffusion effects and dynamical effects in eq. (3.6) with a tracer gradient weighting :

$$D_\omega^n = \sqrt{\frac{\langle |\nabla\omega|^n \mathcal{D}_\omega^2 \rangle}{\langle |\nabla\omega|^n (\omega^2 + \sigma^2) \rangle}}$$

is defined for vorticity. We can define the same quantity D_c^n for passive scalar by replacing $\mathcal{D}_\omega$ by $\mathcal{D}_c$ and $\nabla\omega$ by ∇c . The exponent n is varied to assess the weight due to the strongest gradient values.

Figures 3.19a and 3.19b display these quantities for the two simulations. First we can see that the effect of the diffusion decreases when we consider larger gradients as D_ω^n and D_c^n decreases when n increases, confirming the prediction of Constantin et al. (1995) stated in section 3.5.2d. For the largest gradients, the ratio between diffusion effects and dynamical effects is less than 5%. This confirms that we can neglect diffusion as was done in our previous theoretical studies (Lapeyre et al. 1999, Klein et al. 2000).

Now let us examine simulation LARGE (Fig. 3.19a). Initially, the diffusion is negligible (D_ω^n and D_c^n of the order of 10^{-5}). Around $t \approx \tau_{diff}$, a sudden rise occurs, followed by a slower increase and then by a slow decay. The growth of D_ω^n and D_c^n can be interpreted as the production of small scales which enhances the diffusion terms. The decay could be explained by the mechanism of Constantin et al. (1995) : as diffusion tends to smooth the spatial field of the orientation (by affecting both tracer gradient norm and orientation), its effect becomes smaller (there are less and less spatial inhomogeneities). Diffusion affects the passive scalar gradient orientation before the vorticity gradient orientation but the difference is reduced for the strongest gradients. This can be explained by the more rapid cascade, that is production of small scale inhomogeneities, for passive scalar than vorticity as we have seen in previous section.

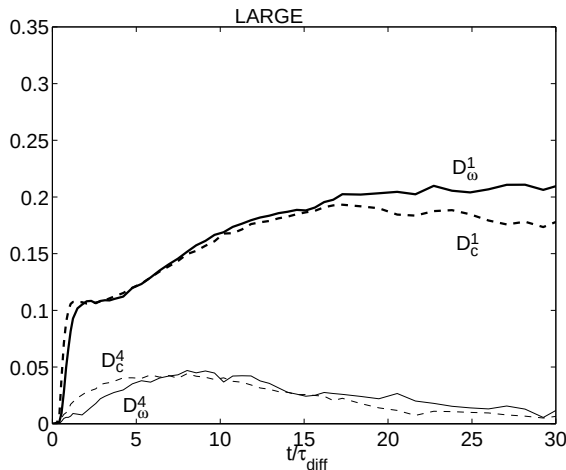


Figure 3.19a :

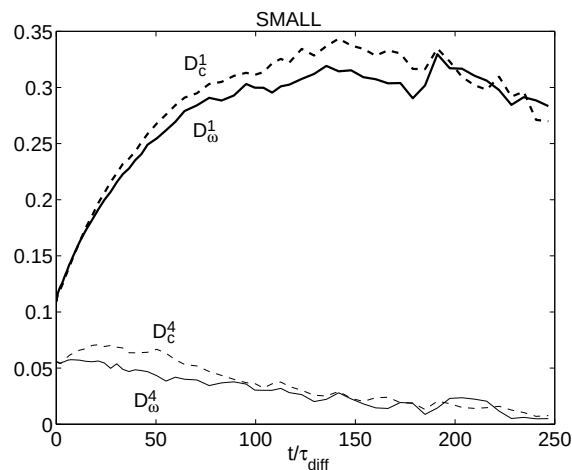


Figure 3.19b :

Figure 19 : Evolution of the ratio between the contributions of diffusion and advective dynamics to the alignment equation (5) as a function of t/τ_{diff} for simulations LARGE (a) and SMALL (b). In insert, zoom of initial evolution. Solid curves : D_ω^1 (bold), D_ω^4 (light). Dashed curve : D_c^1 (bold), D_c^4 (light).

The results of simulation SMALL (Fig. 3.19b) are similar to simulation LARGE but diffusion is larger in this simulation because initially there are much more spatial inhomogeneities.

We have also examined the effect of diffusion on strain-dominated and effective-rotation-dominated regions. Diffusion has less influence in effective rotation regions than in strain-dominated regions with a difference of 10% (not shown). In strain-dominated regions, a strong cascade, that is a production of small scales (and small scale inhomogeneities), is expected. Thus, diffusion is more likely to occur in these regions.

3.5.5b Dynamical alignment with flow topology

As shown by Lapeyre et al. (1999) and Klein et al. (2000), there are two different regions for the dynamics of tracer gradient, namely when strain dominates ($|r| \equiv \left| \frac{\omega + 2D\phi/Dt}{\sigma} \right| \leq 1$) and when effective rotation dominates ($|r| > 1$). For the former regime, the orientation variable ζ should tend to ζ_- while for the latter regime, the orientation should rotate with time but remains statistically close to α .

We can examine if these alignments occur and how vorticity and passive scalar gradients differ. For this purpose, we define spatial averages of the cosine between ζ and the specific orientation (ζ_- in strain regions, α in effective rotation regions). We weight these spatial averages by the same exponent on both tracer gradient norms to compare regions that should be similar for the two gradients. These diagnostics

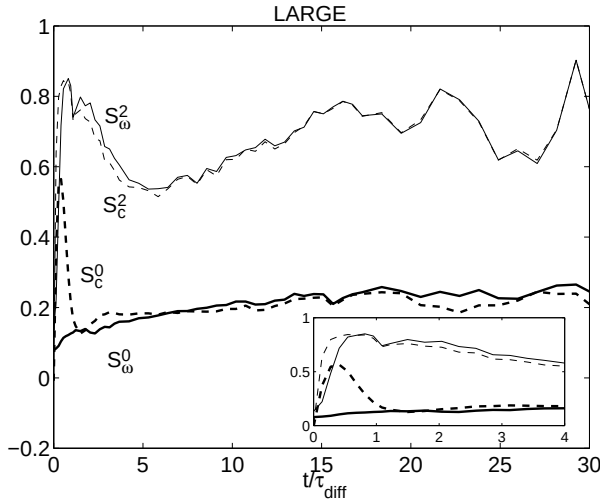


Figure 3.20a :

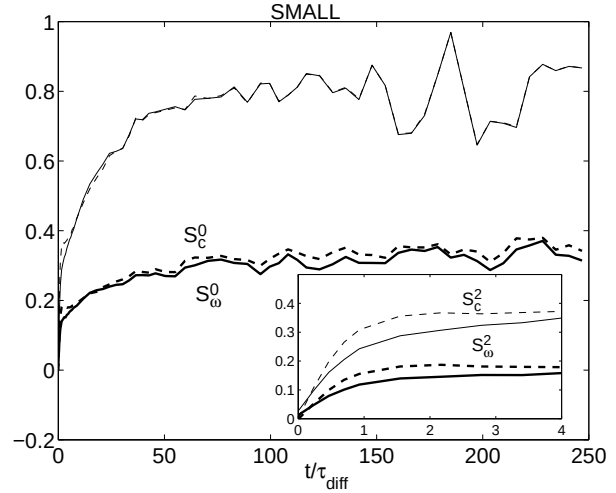


Figure 3.20b :

Figure 20 : Evolution of the dynamical alignment in strain-dominated regions as a function of t/τ_{diff} for simulations LARGE (a) and SMALL (b). In insert, zoom of initial evolution. Solid curves : S_ω^0 (bold), S_ω^2 (light). Dashed curve : S_c^0 (bold), S_c^2 (light).

are

$$S_\omega^n = \frac{\langle |\nabla\omega|^n |\nabla c|^n \cos(\zeta_\omega - \zeta_-) \rangle}{\langle |\nabla\omega|^n |\nabla c|^n \rangle} \quad \text{in strain regions ,}$$

$$R_\omega^n = \frac{\langle |\nabla\omega|^n |\nabla c|^n \cos(\zeta_\omega - \alpha) \rangle}{\langle |\nabla\omega|^n |\nabla c|^n \rangle} \quad \text{in effective rotation regions .}$$

Spatial averaging $\langle \rangle$ is performed in strain-dominated regions ($|r| < 1$) for S_ω^n , and in effective-rotation-dominated regions for R_ω^n . The diagnostics have been normalized : if $\zeta - \zeta_-$ (respectively $\zeta - \alpha$) is equi-partitioned, then $S_\omega^n = 0$ (resp. $R_\omega^n = 0$). On the other hand, a value of 1 corresponds to perfect alignment. We define S_c^n and R_c^n in the same way for the passive scalar (i.e. we replace ζ_ω by ζ_c in each formula). S stands for strain-dominated regions and R stands for effective-rotation-dominated regions.

Strain-dominated regions

Let us consider first the strain-dominated regions. In these regions, the tracer gradient is expected to align with the orientation ζ_- , the stable fixed point of equation 3.2.

For simulation LARGE (Fig. 3.20a), there is no initial alignment of both tracer gradients with this orientation (as shown in sec. 3.5.3b) : $S_\omega^n = S_c^n \approx 0$. As time

evolves, both tracer gradients tend to align strongly with the specific direction ζ_- . Actually, the alignment increases with n , which means that the larger the tracer gradients are, the better they align with ζ_- .

At time $t \approx \tau_{diff}$, we observe a decrease in alignment. This decrease is related to diffusion which becomes important at that time, as seen in section 3.5.5a. However, S_ω^n and S_c^n increase once again (at time $t \approx 6\tau_{diff}$ for $n = 2$) to reach a mean plateau, different from perfect alignment. We can note that there are substantial oscillations around this mean plateau. This is due to the weighting by the tracer gradient norm which takes into account only a small part of the total field.

Now we can compare the evolution of the alignment of the vorticity gradient (solid curve on the figure) and the passive scalar gradient (dashed curve) with ζ_- . For early time ($t < \tau_{diff}$), the passive scalar gradient aligns better with the specific orientation ζ_- than the vorticity gradient does. This means that the direct cascade is more efficient for passive scalar than for vorticity. At time $t \approx \tau_{diff}$, we observe that S_ω^n and S_c^n overlap for $n = 2$. This is also true for $n \geq 3$ (not shown) and it indicates that tracer gradients align with each other (this will be examined further). Because diffusion is stronger for the passive scalar gradient orientation, S_c^2 decreases more strongly than S_ω^2 . Finally, the two curves overlap again at $t \approx 7\tau_{diff}$.

For simulation SMALL (Fig. 3.20b), we observe a similar behavior, except that the initial alignment increase is much more reduced as diffusion acts *ab initio*. The saturation of alignment occurs also at $t \approx \tau_{diff}$ as for simulation LARGE and we can be confident that the saturation is due to diffusion.

Effective-rotation-dominated regions

We can consider the dynamical alignment properties in effective-rotation-dominated regions. The tracer gradient is expected to rotate at a non-constant rotation rate and should lie statistically close to the specific orientation α as pointed out in Klein et al. (2000).

Figure 3.21a displays R_ω^n and R_c^n for $n = 0, 2$ for simulation LARGE. Initially vorticity gradients display a tendency to align with the orientation given by α ($R_\omega^0 = 0.49$ and $R_\omega^2 = 0.70$) whereas there is no such an alignment for passive scalar ($R_c^n \approx 0$). R_c^n strongly increases until it reaches the same value as R_ω^n at $t \approx 0.5\tau_{diff}$. For $n = 2$, the two curves overlap at time τ_{diff} and then R_c^n has a larger decrease than R_ω^n . Contrary to what is found for strain-dominated regions, the alignment is always better (if not equal) for the vorticity gradients than for the passive scalar gradients. After this transient phase, R_c^n and R_ω^n overlap again (at $t \approx 13\tau_{diff}$ for $n = 2$) to reach a mean plateau with substantial oscillations as was found precedently in strain-dominated regions. When comparing Figs. 3.20a and 3.21a, the final overlap of S_c^n and S_ω^n occurs more rapidly in strain-dominated regions than the final overlap of R_c^n and R_ω^n in effective-rotation-dominated regions. This can be explained by the different dynamics of the two regions : in strain regions, the orientation should tend to the specific orientation ζ_- whereas in effective rotation regions, the orientation should only be rotating and only statistically close with

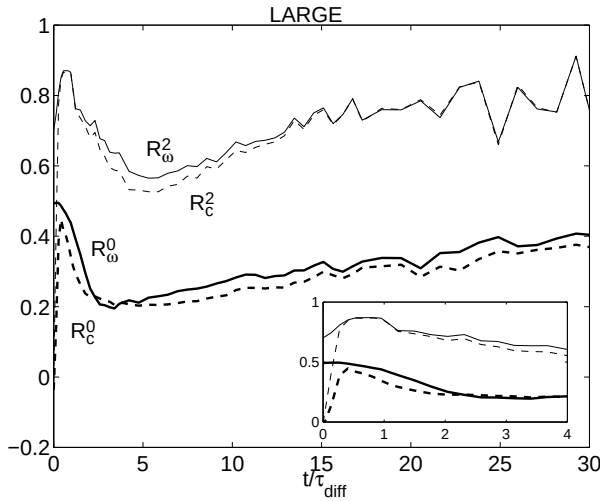


Figure 3.21a :

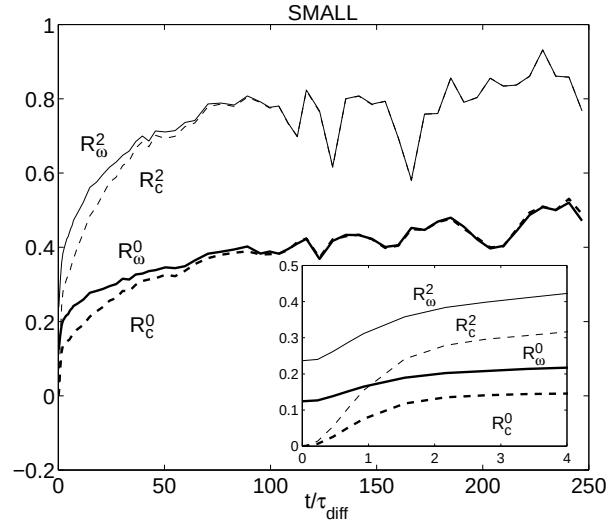


Figure 3.21b :

Figure 21 : Evolution of the dynamical alignment in effective-rotation-dominated regions as a function of t/τ_{diff} for simulations LARGE (a) and SMALL (b). In insert, zoom of initial evolution. Solid curves : R_ω^0 (bold), R_ω^2 (light). Dashed curve : R_c^0 (bold), R_c^2 (light).

another specific orientation α . This implies a faster process of alignment with the specific orientation in strain-dominated regions than in effective-rotation-dominated regions.

For simulation SMALL (Fig. 3.21b), the initial phase of alignment increase is absent for both R_ω^n and R_c^n because diffusion is present initially. It can be compared with simulation LARGE after diffusion has become efficient (i. e. after $t > 5\tau_{diff}$ on Fig. 3.21a).

We can conclude that the alignment of the vorticity gradient with the specific orientation α has both a kinematic origin (presence of spatial large-scale structures with closed streamlines) and a dynamical origin (dynamics of the vorticity gradient orientation). In the transient phase of turbulence, the kinematics improve the alignment of vorticity gradient with the specific orientation more so than the alignment of passive scalar gradient. Despite this kinematic effect, passive scalar gradients and vorticity gradients have similar alignment properties with α when turbulence is fully developed.

3.5.5c Alignment between passive and active scalar gradients

Motivated by the overlap of S_c^n and S_ω^n on the one hand and R_c^n and R_ω^n on the other hand, as well as the observations (Babiano et al. 1987, Ohkitani 1991) of similar tracer isolines, we can define a quantity A_n to examine the alignment between

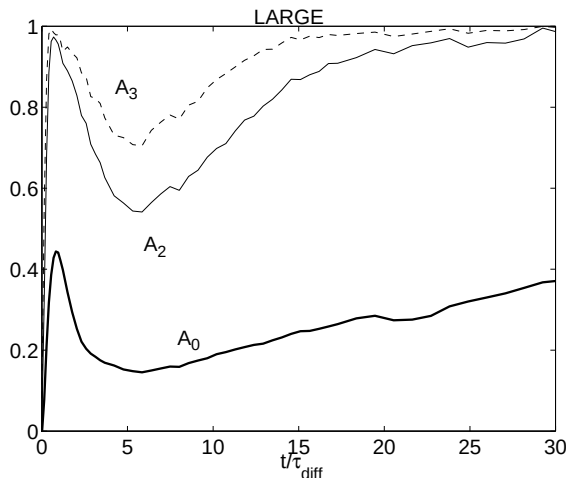


Figure 3.22a :

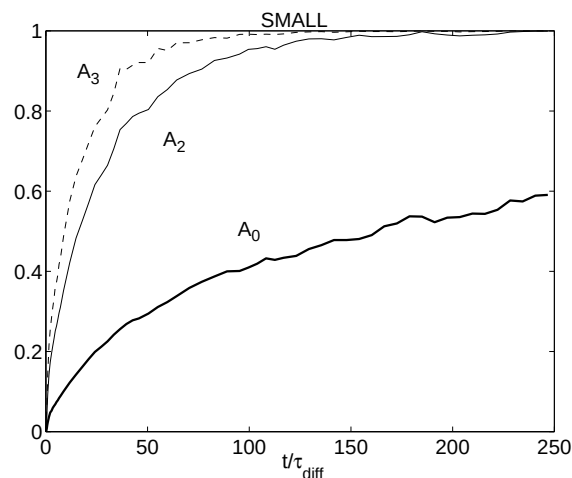


Figure 3.22b :

Figure 22 : Evolution of the orientation between the two gradients A_n as a function of t/τ_{diff} for simulation LARGE (a) and SMALL (b). Bold curve : $n = 0$. Solid curve : $n = 2$. Dashed curve : $n = 3$.

vorticity gradients and passive scalar gradients :

$$A_n = \frac{\langle |\nabla \omega|^n |\nabla c|^n \cos(\zeta_\omega - \zeta_c) \rangle}{\langle |\nabla \omega|^n |\nabla c|^n \rangle}.$$

As for S_ω^n and R_ω^n , there is a symmetrical weight on both tracer gradients which allows to compare regions where both gradients are expected to have a similar cascade. Moreover, gradient weighting increases with n .

As it could be expected from the results on dynamical alignment, simulation LARGE displays three stages of evolution (Fig. 3.22a). Initially, the two gradients are decorrelated because of the random phase initialization, so $A_n = 0$. There is a rapid increase of A_n , reaching a value close to 1 for $n \geq 2$ at $t \approx \tau_{diff}$. The alignment improves when increasing n . This confirms that the direct cascade proceeds in the same way by aligning the two gradients, especially the strongest ones. After $t \approx \tau_{diff}$, diffusion becomes important and A_n decreases strongly. This lasts until $t \approx 5\tau_{diff}$. After this time, we observe an increase of A_n which tends to 1 (i. e. *perfect alignment* of the two gradients) for $n \geq 2$. For $n = 0$, the simulation was not carried long enough to examine the convergence. Nevertheless, these results indicate that *the largest gradients of vorticity and passive scalar tend to align with each other*. We can suspect that this is due to both advective dynamics and diffusion : on the one hand, the dynamics of the tracer gradient orientation tends to align tracer gradient with specific orientations that depend on the flow topology. On the other hand, diffusion tends to reduce the gradients which are not aligned with these specific orientations. Another aspect of diffusion is to align tracer gradients with the strongest ones (Constantin et al. 1995) thus amplifying the alignment with the specific orientations (as this latter

mechanism is amplified for the strongest gradients). Thus, these effects contribute to a continuously growing alignment between the two tracer gradients. However, we have to put a *caveat* on this argument. Why don't we observe also a perfect alignment with the specific orientations ζ_- and α ? A tentative of answer is that ζ_- and α are only approximate estimates of the real orientation due to the flow topology. Actually, they are equilibrium estimates of these orientations.

For simulation SMALL (Fig. 3.22b), we observe only a slow increase of A_n like the final phase of simulation LARGE. This is due to diffusion which acts through the entire evolution. But we can see that there is also a perfect alignment for the strongest gradients in this case as in the preceding case.

3.5.6 Summary and conclusion

We have examined and compared the cascades of a passive scalar and vorticity in numerical simulations of freely decaying 2-D turbulence. The two tracer fields have been initialized with identical spectra but with different phases, for two limiting (large and small scale) cases. Dissipative effects are treated identically for both active and passive tracers. The cascade dynamics is studied through the production of tracer gradients, and more specifically the tendency for alignment of those gradients with specific directions determined by the flow topology (Lapeyre et al. 1999, Klein et al. 2000).

The kinematic properties of the initial conditions reveal that the conjugation relationship between vorticity and strain slows down the cascade dynamics whenever structures with closed streamlines are present. This effect only operates for simulation LARGE, where a substantial alignment of vorticity gradients with the flow topology is observed in regions dominated by effective rotation (i.e. the sum of vorticity and strain axes rotation rate). On the other hand, for simulation SMALL, diffusion effects are likely to be important *ab initio*, as indicated by an estimate of the inviscid and diffusive cascade time scales.

During the first transient phase of evolution, there is a stronger cascade for passive scalar than for vorticity. The passive scalar develops small scales very rapidly, being sheared by vortices (which remain quasi-stationary for simulation LARGE). This has been observed in both physical space and Fourier space. In strain-dominated regions, the passive scalar gradient better aligns than the vorticity gradient with the specific orientation ζ_- determined by the flow topology. On the other hand, in effective-rotation-dominated regions, the vorticity gradient better aligns with the specific orientation α . A stronger cascade is observed in simulation LARGE than in simulation SMALL during this phase because of the lesser influence of diffusion effects. We have checked that the duration of this transient phase scales with the diffusive cascade time scale for both simulations.

Thereafter, in the fully developed turbulence phase, both tracer gradients tend to align with each other and this effect is most pronounced for the strongest gradients. This result implies that both tracer cascades are similar when the turbulence is fully developed. This is corroborated both by the overlap of their spectra at small scales, and by identical alignments of their gradients with the specific orientations of the flow

topology mentioned above. These observations could result from the combined effects of advective dynamics (straining process) and diffusion effects which preferentially align tracer gradients with the strongest ones (Constantin et al. 1995). It should be noted that the above results on the production of tracer gradients mostly concern small spatial scales, while passive and active tracers behave quite differently at intermediate and large scales of motion. Indeed, there is an accumulation of vorticity at large scales which is absent for the passive tracer case.

The effect of diffusion has been checked to play a preponderant role in the dynamics at time $t \sim \tau_{diff}$ estimated in the present paper. As predicted by Constantin et al. (1995), diffusion has been found to have two effects. The first one is to act as a classical diffusion term by suppressing spatial inhomogeneities. This reduces both the alignment of tracer gradients with the specific orientations predicted for inviscid flow topology and the alignment of passive and active tracer gradients with each other. The second effect is to preferentially align the tracer gradients with the orientation of the strongest ones, while its quantitative influence on the latter is negligible.

A large part of this study has concerned the characterization of alignment properties, and we have distinguished the alignment of passive and active tracers with flow topology from their relative orientation. It should be emphasized that the latter is the most pronounced quantitatively and this holds for both short times (when $t \sim \tau_{adv} \ll \tau_{diff}$) and for long times ($t \gg \tau_{diff}$). So a common nature of the dynamics of passive and active scalars can be expected. The specific orientations determined by Lapeyre et al. (1999) and Klein et al. (2000) are only equilibrium estimates of the orientations of the flow topology. The differences and similarities of alignment between vorticity gradients and passive scalar gradients can be explained by the structures present in the field. In physical space, the efficiency of the direct enstrophy cascade depends on the geometrical structures of the flow field : the direct cascade produces strong gradients which have a filamentary structure (with many strong vorticity gradients) while the inverse cascade produces closed streamlines (with relatively few vorticity gradients). The conjugation relationship between strain and vorticity creates differences between the tracer gradient dynamics and halts the direct cascade whenever structures with closed streamlines are present. On the other hand, at the spatial scales for which the enstrophy cascade is the most effective, the conjugation relationship is not efficient and both tracer gradients have identical dynamics. This explain why the differences between both tracer gradients vanishes for the strongest gradients.

Acknowledgments

Computing resources were provided by Institut du D  veloppement et des Ressources en Informatique Scientifique (FRANCE). We thank Armando Babiano for his insightful suggestions on the effects of diffusion and Claude Basdevant for suggesting simulation LARGE.

Chapitre 4

Revue de la dynamique de la vorticité en turbulence tridimensionnelle

4.1 Introduction

Nous avons précedemment examiné la cascade à la fois d'un scalaire passif et de la vorticité dans des écoulements bidimensionnels. Nous avons fondé notre approche sur l'étude de la dynamique des gradients de traceur en examinant l'effet de la déformation et de la rotation effective (rotation due à la vorticité et à la rotation des axes de déformation). En turbulence tridimensionnelle, des théories similaires à la nôtre existent afin de comprendre la dynamique du vecteur vorticité. Il nous a semblé intéressant de faire une revue des résultats connus en trois dimensions afin de contraster les similitudes et les différences avec le cas bidimensionnel.

4.1.1 Analogie deux dimensions-trois dimensions

La différence essentielle entre la turbulence tridimensionnelle et la turbulence bidimensionnelle est due à l'équation de vorticité $\boldsymbol{\omega}$:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} \equiv \partial_t \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = [\nabla \mathbf{u}] \boldsymbol{\omega} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} ,$$

avec $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} ,$

et $\mathbf{u}$ le vecteur vitesse.

La première remarque que nous pouvons faire est que l'équation de la vorticité est une équation pour un vecteur entièrement *tridimensionnel* alors que l'on a simplement un vecteur unidirectionnel en deux dimensions (orienté selon l'axe orthogonal à l'écoulement). Un terme de *vortex stretching* ($[\nabla \mathbf{u}] \boldsymbol{\omega}$) s'applique au vecteur vorticité en trois dimensions; ce terme est absent de l'équation bidimensionnelle de la vorticité car le champ de vitesse bidimensionnel est incapable d'agir sur un vecteur orienté le long de la troisième direction. Pour obtenir un terme de *vortex stretching* en deux dimensions, il faut considérer le gradient de vorticité et non la vorticité.

Cette différence fondamentale fait que l'on n'obtient pas du tout le même genre de cascades en deux et trois dimensions. *En trois dimensions, l'énergie subit une cascade vers les petites échelles* (Kolmogorov 1941) *alors qu'en deux dimensions, l'énergie subit une cascade vers les grandes échelles et l'enstrophie vers les petites échelles* (Kraichnan 1967, Batchelor 1969).

Par contre, *il existe une analogie formelle entre les gradients¹ de traceur 2D ($\nabla^\perp \omega$ et $\nabla^\perp c$) et la vorticité 3D ω ou un vecteur élément matériel $\delta \mathbf{l}$* (Constantin et al. 1994, Ohkitani 1995). Cela s'explique par la similarité des équations d'évolution :

dynamique 3D : $\frac{D}{Dt} \omega = [\nabla \mathbf{u}] \omega = [S] \omega ,$ ou $\frac{D}{Dt} \delta \mathbf{l} = [\nabla \mathbf{u}] \delta \mathbf{l} ,$ $\frac{D^2}{Dt^2} \omega = -[P''] \omega .$	dynamique 2D : $\frac{D}{Dt} \omega = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{D}{Dt} c = 0 ,$ $\frac{D}{Dt} \nabla^\perp \omega = [\nabla \mathbf{u}] \nabla^\perp \omega ,$ ou $\frac{D}{Dt} \nabla^\perp c = [\nabla \mathbf{u}] \nabla^\perp c ,$ $\frac{D^2}{Dt^2} \nabla^\perp \omega = -[P''] \nabla^\perp \omega ,$
---	---

où S est la matrice de déformation (la partie symétrique du tenseur de gradient de vitesse) et P'' est la hessienne de pression. La dernière équation s'obtient en faisant intervenir les équations d'Euler (Ohkitani et Kishiba 1995).

On voit que la vorticité tridimensionnelle et les gradients de traceur bidimensionnels vérifient des équations formellement identiques aux deux premiers ordres dans les dérivées lagrangiennes. *Cela permet d'espérer une similarité entre les propriétés des gradients bidimensionnels de traceur (vorticité et scalaire passif) et les propriétés de la vorticité et de vecteurs éléments matériels tridimensionnels. Il faut cependant noter qu'il n'y a pas entièrement analogie*, essentiellement pour deux raisons. Prem irement, il y a trois axes de déformation en trois dimensions contre seulement deux en deux dimensions, ce qui va rendre plus complexe la dynamique du vecteur vorticité. Deuxièmement, dans l'équation du vecteur vorticité, le terme de *vortex stretching* se réduit à la matrice de déformation S car la vorticité n'agit pas sur elle-même. *Il y a donc une analogie partielle entre la vorticité tridimensionnelle et les gradients de traceur bidimensionnels.* Par contre, un vecteur élément matériel tridimensionnel n'a pas une telle dégénérescence du terme de *vortex stretching* et subit l'effet dû à la vorticité.

4.1.2 Singularité des équations d'Euler

La littérature abondante sur la vorticité en trois dimensions tient à ce que sa dynamique est reliée à la question essentielle de la turbulence tridimensionnelle : *la présence d'une singularité pouvant arriver au bout d'un temps fini, même avec des conditions initiales régulières.*

¹En fait ce ne sont pas les gradients de traceur mais leur orthogonaux : $\nabla^\perp q \equiv \mathbf{k} \times \nabla q = (\partial_y q, -\partial_x q)$ avec $\mathbf{k}$ vecteur unité vertical.

En effet, on sait que les équations d'Euler ne sont pas singulières en deux dimensions, résultat qui a pu être établi mathématiquement (Ladyzhenskaya 1969). Par contre, il n'y a pas de résultat comparable en trois dimensions, seule l'existence d'une solution faible ayant été prouvée (Leray 1934). Cette solution ne possède pas une régularité suffisante pour supprimer une singularité apparaissant au bout d'un temps fini et elle n'est pas nécessairement unique. Les simulations numériques n'ont pas permis de trancher ce problème (cf. Majda (1991), Ohkitani et Kishiba (1995) et les références incluses) : il semble que pour certaines conditions initiales, il peut y avoir une singularité en temps fini (Pumir et Siggia 1990, Kerr 1993, Boratav et Pelz 1994). Par contre, pour d'autres conditions initiales, les simulations ne montrent pas de singularité (Brachet et al. 1983, Brachet et al. 1992). Différents modèles théoriques fondés sur des conditions initiales particulières ont été proposés afin de montrer l'existence d'une singularité (Pelz 1997, Moffat 2000) mais ce débat est toujours ouvert.

Pourquoi une singularité peut-elle apparaître ? L'équation pour la norme de la vortacité peut se mettre sous la forme

$$\frac{D|\boldsymbol{\omega}|}{Dt} = \delta |\boldsymbol{\omega}| ,$$

avec $\delta = (S\boldsymbol{\chi}) \cdot \boldsymbol{\chi}$ et $\boldsymbol{\chi} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} .$

Or, à cause de l'incompressibilité, on peut écrire la vitesse $\mathbf{u}$ en fonction de la vortacité $\boldsymbol{\omega}$ par la relation

$$\mathbf{u} = \Delta^{-1}(\nabla \times \boldsymbol{\omega}) .$$

Donc, on peut aussi exprimer la matrice de déformation S en fonction de la vortacité (par un opérateur linéaire non-local). Cela signifie que δ est potentiellement une fonction linéaire de la vortacité $|\boldsymbol{\omega}|$ et $D|\boldsymbol{\omega}|/Dt$ est potentiellement une fonction quadratique de $|\boldsymbol{\omega}|$ (Constantin et al. 1995). Or la solution de

$$\frac{D|\boldsymbol{\omega}|}{Dt} \sim |\boldsymbol{\omega}|^2$$

développe une singularité en temps fini puisque

$$|\boldsymbol{\omega}(t)| = \frac{1}{(|\boldsymbol{\omega}(t=0)|^{-1} - t)} .$$

On voit donc que *l'apparition d'une singularité dépend essentiellement du terme de production de vortacité qui va jouer le rôle d'auto-amplificateur pour la vortacité. Ce terme est contrôlé par deux éléments : le premier est l'alignement de la vortacité avec un des axes de déformation ; s'il n'y a pas d'alignement, il n'y aura pas de croissance de la vortacité donc pas de singularité. Le second élément est le lien entre la vortacité et la déformation.* Plus la relation entre ces deux termes est forte, plus l'apparition d'une singularité est probable ; si ces deux termes sont découplés, il n'y aura pas d'effet d'auto-amplification de la vortacité.

Physiquement, l'apparition de singularité est reliée au terme de "vortex stretching" qui va enrouler en spirale les tubes de vorticité et les entrelacer entre eux. Cet effet a des conséquences particulièrement complexes sur la topologie des lignes de vorticité (Moffat 1985, Moffat 1986) et c'est pour cela que le problème d'apparition d'une singularité est difficile à appréhender.

On voit donc que la dynamique de la vorticité est essentielle pour comprendre l'apparition de singularité. On peut noter au passage que plusieurs diagnostics utilisant cette dynamique ont été proposés pour caractériser l'apparition de singularité dans les simulations numériques (Beale et al. 1984, Ponce 1985, Constantin et Felferman 1993, Constantin 1994).

4.1.3 Plan du chapitre

Nous allons donc nous concentrer sur la dynamique de la vorticité et d'éléments matériels tridimensionnels afin de comparer cette dynamique à la dynamique des gradients de traceur bidimensionnels. Le but est de mettre en évidence les similitudes et les différences entre les deux dynamiques.

Comme nous venons de le voir, les deux ingrédients essentiels sont les propriétés d'alignement du vecteur vorticité avec certaines orientations spécifiques (axes de déformation, etc.) ainsi que la relation entre la déformation et la vorticité qui peut exercer une rétroaction et une auto-amplification de la vorticité (et l'apparition d'une singularité). Or nous avons étudié des problèmes analogues dans le cas du gradient de traceur dans des écoulements bidimensionnels. Nous sommes donc capables de contraster les deux types de dynamique.

Le plan que nous allons suivre est le suivant : tout d'abord, nous allons nous intéresser aux différentes observations qui ont été faites sur la dynamique de la vorticité. Puis, nous examinerons les équations de la dynamique d'un vecteur matériel ou de la vorticité afin d'expliquer ces observations, sans entrer dans la rétroaction entre la vorticité et la déformation qu'elle subit. Enfin, nous examinerons cette rétroaction afin de comprendre en quel sens la vorticité possède une nature active en turbulence tridimensionnelle comme nous l'avons fait pour le cas bidimensionnel. Pour d'autres aspects de la turbulence tridimensionnelle (par exemple l'intermittence), le lecteur peut se référer au livre de Frisch (1995) et à la revue de Sreenivasan et Antonia (1997).

4.1.4 Notations

Pour plus de facilité, on emploiera les définitions suivantes : le vecteur vorticité sera noté $\boldsymbol{\omega}$, un vecteur matériel $\boldsymbol{\delta l}$.

On va examiner en détail le tenseur de gradient de vitesse $\nabla \mathbf{u}$ car il intervient directement dans l'évolution de la vorticité. Ce tenseur se décompose en deux parties, S et W :

$$\nabla \mathbf{u} = S + W ,$$

avec $S = \frac{1}{2}((\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^*)$ et $W = \frac{1}{2}((\nabla \mathbf{u}) - (\nabla \mathbf{u})^*)$.

La partie symétrique de $\nabla \mathbf{u}$ (notée S) s'appelle la matrice de déformation et la partie antisymétrique (notée W) est reliée au vecteur vorticité :

$$W_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_k ,$$

avec ϵ_{ijk} le tenseur entièrement antisymétrique.

Le tenseur de déformation S est symétrique donc diagonalisable et ses vecteurs propres sont orthogonaux entre eux. Les valeurs propres de la matrice S seront notées $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Les vecteurs propres associés $\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{e}_\beta$ et $\mathbf{e}_\gamma$ seront appelés les axes de déformation. À cause de l'incompressibilité ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), on a la relation

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 .$$

Donc $\alpha \geq 0$ et $\gamma \leq 0$. Le signe de β n'est pas imposé par la cinématique mais dépend entièrement de la dynamique.

On a aussi besoin d'introduire la hessienne de pression P'' car elle est reliée à la dynamique du deuxième ordre de la vorticité (cf. les équations données à la section 4.1.1). Cette matrice est symétrique donc diagonalisable et ses vecteurs propres sont orthogonaux entre eux. Ses valeurs propres seront notées $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ et les vecteurs propres correspondants seront notés $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ et $\mathbf{f}_3$.

4.2 Observations de la vorticité et des vecteurs matériels

4.2.1 Formation de tubes de vorticité intenses

Une des propriétés de la turbulence tridimensionnelle est *la production nette de vorticité* (Tsinober 1998a) qui s'accompagne de l'apparition dans l'espace physique *de structures avec une vorticité très intense en forme de tubes à faible courbure* (Siggia 1981, Kerr 1985, Douady et al. 1991, Jiménez et Wray 1998). La figure 4.1a montre de telles structures dans une simulation turbulente. Un examen détaillé de l'une de ces structures (figure 4.1b) montre que les lignes de vorticité ont généralement une faible courbure mais peuvent aussi avoir des changements abrupts de direction. Ces structures nous font penser aux filaments quasi-rectilignes concentrant de forts gradients de traceur en deux dimensions.

La plupart du champ turbulent est occupée par de la vorticité relativement faible avec des tubes intenses occupant seulement une petite fraction de l'espace (Jiménez et al. 1993). Tandis qu'il y a peu de structures apparentes dans la composante de faible vorticité de l'écoulement, la vorticité intense a tendance à s'organiser en tubes. Les tubes semblent se disposer sur les bords des tourbillons de grande échelle en vitesse, c'est-à-dire les échelles contenant de l'énergie qui sont elles-mêmes relativement sans vorticité. Les tubes semblent être plus une conséquence de la turbulence qu'un élément dynamique important car ils sont assez peu actifs aussi bien pour l'énergie que pour l'enstrophie qu'ils contiennent (Jiménez et al. 1993). Par ailleurs, ces tubes peuvent survivre pendant un temps relativement long même en présence de déformation, pourvu que leur nombre de Reynolds associé soit suffisamment grand (Moffat et al. 1994).

(a)

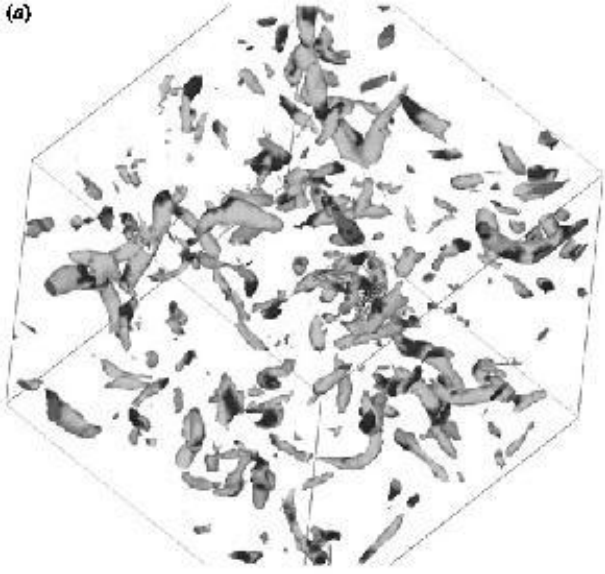


Figure 4.1a :

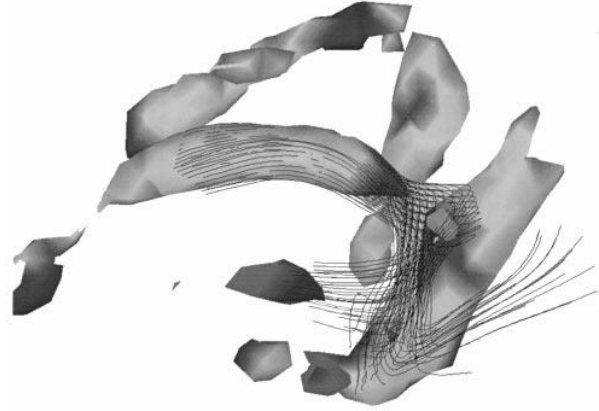


Figure 4.1b :

Figure 4.1 : (a) visualisation tridimensionnelle des structures à forte enstrophie. (b) vue rapprochée d'une des structures avec lignes de vorticité. Tiré de Nomura et Post (1998).

4.2.2 Alignement avec les axes de déformation

4.2.2a Vorticité

La dynamique de la vorticité est gouvernée par l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{D\omega}{Dt} = [S]\omega .$$

  partir de cette équation, Batchelor (1952) a conjecturé que la vorticité devrait croître exponentiellement et que le taux de croissance devrait être égal au taux maximal de déformation (α). De plus, la vorticité devrait s'aligner avec e_α puisque ce vecteur propre correspond au taux maximal de déformation. L'hypothèse de Batchelor est que la rotation effective (rotation des axes de déformation et vorticité) est négligeable devant la déformation.

Kerr (1985) ainsi que Ashurst et al. (1987) ont été les premiers à montrer que *la vorticité s'aligne plutôt avec l'axe de déformation intermédiaire e_β* . Cet alignement a été confirmé dans des études ultérieures, de simulations en turbulence homogène non-stratifiée (Pumir et Siggia 1990, She et al. 1990, Ruetch et Maxey 1991, Vincent et Meneguzzi 1991, Nomura et Post 1998), stratifiée (Chen et al. 1990, Nomura et Elghobashi 1992) ainsi que dans des expériences de laboratoire (Tsinober et al. 1992, Tao et al. 2000). *Cet alignement est surtout observé dans les régions de forte déformation*, c'est-à-dire quand $S^2 \gg W^2$ (Nomura et Post 1998) et ne semble pas parfait puisque le cosinus moyen est autour de 0.7 (cf. figure 4.2).

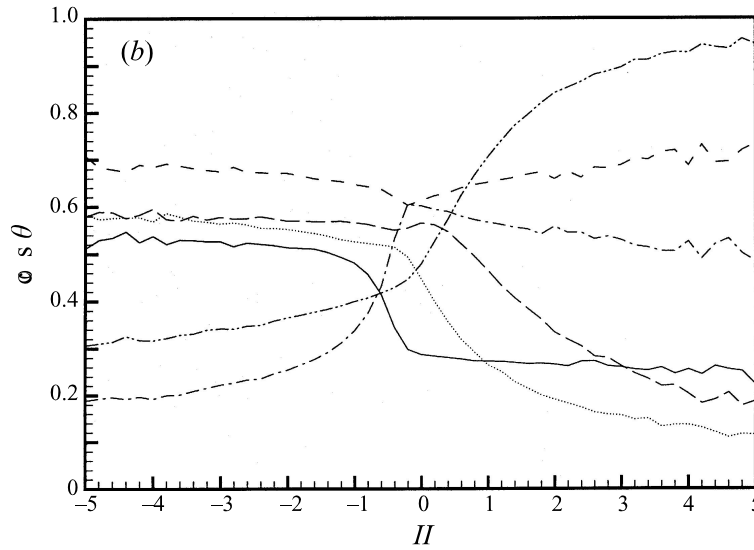


Figure 4.2: Cosinus moyen de l'alignement de la vorticité avec les vecteurs propres du tenseur de déformation et de la hessienne de pression, en fonction de $II = \omega^2/2 - S^2$. En traits —, $\langle \omega \cdot e_\alpha \rangle$; en traits — —, $\langle \omega \cdot e_\beta \rangle$; en traits - · -, $\langle \omega \cdot e_\gamma \rangle$; en traits · · ·, $\langle \omega \cdot f_1 \rangle$; en traits — — —, $\langle \omega \cdot f_2 \rangle$; en traits - · - · -, $\langle \omega \cdot f_3 \rangle$. Tiré de Nomura et Post (1998).

Par ailleurs, on observe dans ces simulations que la moyenne spatiale de β est positive. Cela favorise la production naturelle de vorticité par la turbulence puisque deux valeurs propres du tenseur de déformation (α et β) positives permettent une meilleure croissance de la vorticité.

Des études récentes ont examiné l'alignement avec les vecteurs propres de la hessienne de pression. En effet, on peut s'interroger sur l'existence de cet alignement puisque la hessienne de pression intervient dans l'équation de la dérivée seconde lagrangienne de la vorticité :

$$\frac{D^2 \omega}{Dt^2} = -[P''] \omega .$$

Ohkitani et Kishiba (1995) ont observé qu'au point d'énstrophie maximale, la vorticité a tendance à s'aligner simultanément avec e_β et f_3 . Par ailleurs, Nomura et Post (1998) ont observé que *dans les régions où la vorticité domine la déformation* ($|W|^2 \gg |S|^2$), *la vorticité s'aligne relativement bien avec f_3* (cf. figure 4.2). Ce résultat est aussi observé en turbulence stratifiée (Nomura et Diamessis 2000).

Il semble donc que, *dans les régions dominées par la déformation, la vorticité s'aligne avec e_β alors que dans les régions de rotation (due à la vorticité), la vorticité s'aligne avec f_3* . Ces deux régimes d'alignement montrent une similitude avec la dynamique bidimensionnelle où un régime de déformation et un régime de rotation existent puisque nous avons montré qu'il y a un alignement avec l'un des vecteurs

propres du tenseur de gradient de vitesse dans la base de déformation dans les régions de déformation (Lapeyre et al. 1999) et un alignement avec une direction plus ou moins proche du vecteur propre de la hessienne de pression associée à la plus petite valeur propre (Klein et al. 2000). Nous allons voir dans ce qui suit que les équations de la dynamique conduisent qualitativement à ces deux types de régimes.

4.2.2b élément matériel

Comme pour la vorticité, on peut s'attendre à un alignement d'un élément matériel $\delta \mathbf{l}$ avec l'un des axes de déformation, en particulier $\mathbf{e}_\alpha$ (Batchelor 1952). Plusieurs études ont examiné cet alignement. Dans une phase transitoire, on observe que le vecteur matériel s'oriente d'abord vers $\mathbf{e}_\beta$ (Huang 1996, Ohkitani 1998) puis préfère s'orienter avec $\mathbf{e}_\alpha$ (Kerr 1985, Girimaji et Pope 1990, Huang 1996, Ohkitani 1998). De plus, Girimaji et Pope (1990) observent que l'angle θ que font deux vecteurs matériels initialement perpendiculaires diminue de façon exponentielle :

$$\frac{d}{dt} \langle \log \sin |\theta| \rangle \approx -0.105 .$$

Cela signifie que les vecteurs matériels convergent vers les mêmes directions. On peut donc suspecter que ces vecteurs tendent vers des orientations déterminées par la topologie de l'écoulement comme en deux dimensions.

4.3 Dynamique de la vorticité et d'éléments matériels

Les simulations turbulentes montrent la production de structures intenses d'enstrophie et l'alignement de la vorticité et d'élément matériel avec des directions spécifiques (axes de déformation ou vecteurs propres de la hessienne de pression). Examinons les causes possibles de ces phénomènes.

4.3.1 Effets de la dynamique de Navier-Stokes

Tout d'abord, on peut se demander si les propriétés d'alignement de la vorticité sont dues à la dynamique de Navier-Stokes ou bien à un effet purement cinématique entre la vorticité et la vitesse.

Shtilman et al. (1993) se sont posés cette question car la vorticité et les vecteurs propres de déformation sont reliés : on peut exprimer ces vecteurs en fonction du champ de vitesse. Cette relation (qui correspond à la conjugaison déformation-vorticité dont nous allons parler dans la section 4.4.4a) indique qu'il est possible que l'alignement ait une origine cinématique.

Dans ce but, ils ont comparé les propriétés d'alignement entre la vorticité et les axes de déformation pour un champ de vorticité provenant d'une simulation numérique des équations de Navier-Stokes et pour un champ de vorticité provenant d'un modèle aléatoire purement gaussien mais ayant le même spectre d'énergie que la simulation numérique.

Ils observent que le taux moyen de production d'enstrophie est nul pour le champ aléatoire alors qu'il est positif pour la simulation, ce qui correspond à des lois de

probabilité du taux de production symétrique pour le modèle aléatoire et asymétrique pour la simulation turbulente. La dynamique de Navier-Stokes développe donc une croissance nette de l'enstrophie totale. Par ailleurs, la simulation turbulente met en évidence un alignement de la vorticité avec les axes de déformation qui n'apparaît pas dans le modèle aléatoire. *L'orientation de la vorticité par rapport aux axes de déformation est donc un phénomène propre à la dynamique des équations de Navier-Stokes.*

4.3.2 Dynamique dans la base de déformation

Afin de bien comprendre la dynamique de la vorticité et d'un vecteur matériel, on peut suivre l'approche de Dresselhaus et Tabor (Dresselhaus et Tabor 1991, Tabor 1992) qui se sont intéressés à la dynamique de ces vecteurs dans la base de déformation. L'approche suivie correspond en fait à séparer la dynamique de l'orientation des vecteurs et la dynamique de leur norme, tout comme on l'a fait en deux dimensions.

Partons de l'équation d'un élément matériel $\delta \mathbf{l}$ (ou de la vorticité) :

$$\frac{D \delta \mathbf{l}}{Dt} = [\nabla \mathbf{u}] \delta \mathbf{l} = S \delta \mathbf{l} + W \delta \mathbf{l} .$$

Le terme de rotation $W \delta \mathbf{l}$ (notation introduite en introduction) correspond simplement à $\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{l}$.

Le facteur dynamique qui nous intéresse est l'orientation $\delta \mathbf{l}/|\delta \mathbf{l}|$ de ce vecteur matériel. Cette orientation vérifie l'équation

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\delta \mathbf{l}}{|\delta \mathbf{l}|} \right) = S \frac{\delta \mathbf{l}}{|\delta \mathbf{l}|} - \frac{\delta \mathbf{l} \cdot (S \delta \mathbf{l})}{|\delta \mathbf{l}|^2} \delta \mathbf{l} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{l} .$$

Mais, c'est cette orientation *dans la base de déformation* qui donne les informations les plus intéressantes pour l'évolution du vecteur. Afin de passer dans la base de déformation, on introduit une matrice de rotation R qui diagonalise la matrice S :

$$R^{-1} S R = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} .$$

On peut alors introduire l'orientation du vecteur $\delta \mathbf{l}$ dans la base de déformation, que nous noterons $\boldsymbol{\Lambda} \equiv R \frac{\delta \mathbf{l}}{|\delta \mathbf{l}|}$. Cette orientation est gouvernée par une équation qui fait intervenir l'effet de la déformation et l'effet conjugué de la vorticité et de la rotation des axes de déformation $\mathbf{e}_i$ (  travers la dérivée lagrangienne de R). Cette rotation des axes de déformation peut s'écrire en fonction d'un seul vecteur noté $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ qui vérifie la propriété suivante :

$$\frac{D \mathbf{e}_i}{Dt} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}_i , \quad \text{avec } i = \alpha, \beta, \gamma .$$

On obtient alors l'équation pour $\boldsymbol{\Lambda}$:

$$\frac{D \boldsymbol{\Lambda}}{Dt} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda} - \frac{\delta \mathbf{l} \cdot (S \delta \mathbf{l})}{|\delta \mathbf{l}|^2} \boldsymbol{\Lambda} + \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} - \hat{\boldsymbol{\omega}} \right) \times \boldsymbol{\Lambda} . \quad (4.1)$$

Examinons les différents termes qui sont présents dans cette équation. Les deux premiers termes correspondent à l'effet de la déformation qui aligne le vecteur avec $\mathbf{e}_\alpha$ (Dresselhaus et Tabor 1991), tout comme l'effet de la déformation était en deux dimensions d'aligner le gradient de traceur avec l'axe compressionnel de déformation. Pour démontrer cet effet, on peut écrire l'équation en supposant nul le troisième terme :

$$\frac{D\Lambda_i}{Dt} = \eta_i \Lambda_i \quad \text{et} \quad \eta_i = i - \frac{\boldsymbol{\delta l} \cdot (S \boldsymbol{\delta l})}{|\boldsymbol{\delta l}|^2},$$

où i représente la valeur propre de la matrice de déformation ($i = \alpha, \beta, \gamma$).

On a $\eta_\alpha \geq 0$ car le taux d'étirement $\frac{\boldsymbol{\delta l} \cdot (S \boldsymbol{\delta l})}{|\boldsymbol{\delta l}|^2}$ est toujours plus petit que α . Donc Λ_α va croître ou décroître de façon monotone (selon le signe de Λ_α) et ne peut s'arrêter que pour $D\Lambda_\alpha/Dt = 0$ car Λ_α^2 est borné par 1 ($\boldsymbol{\Lambda}$ est un vecteur unitaire). Si, initialement, $\Lambda_\alpha \neq 0$, la limite de Λ_α est atteinte pour $\eta_\alpha = 0$. Cela implique que Λ_α va tendre vers ± 1 , ce qui correspond à l'alignement avec $\mathbf{e}_\alpha$.

Le troisième terme de l'équation (4.1) correspond à la rotation effective (vorticité $\boldsymbol{\omega}$ et rotation des axes de déformation $\widehat{\boldsymbol{\omega}}$) qui met en rotation le vecteur élément matériel dans la base de déformation (Dresselhaus et Tabor 1991), tout comme en deux dimensions. Girimaji et Pope (1990) et Dresselhaus et Tabor (1991) montrent que les deux termes de cette rotation effective sont bien responsables d'un mauvais alignement avec les axes de déformation. Par ailleurs, on peut noter que la rotation effective se réduit à la rotation des axes de déformation dans le cas où $\boldsymbol{\delta l}$ est la vorticité (car $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$).

On peut écrire le terme de rotation des axes de déformation afin de séparer les effets locaux des effets non-locaux (Dresselhaus et Tabor 1991) :

$$\widehat{\omega}_k = \sum_{\substack{i,j=\alpha,\beta,\gamma \\ i \neq j}} \frac{1}{j-i} (\omega_i \omega_j + \tilde{P}_{ij}'') \epsilon_{ijk} \quad \text{avec} \quad k = \alpha, \beta, \gamma \quad (4.2)$$

avec $\tilde{P}''$ la hessienne de pression exprimée dans la base de déformation. On a omis ici les termes dus à la diffusion.

On voit que la rotation des axes de déformation se décompose en deux effets (Nomura et Post 1998). D'abord, il y a un effet local d  à la vorticité (terme $\omega_i \omega_j$) qui était absent de la dynamique bidimensionnelle. *Cet effet réoriente les axes de déformation quand la vorticité n'est pas alignée avec ceux-ci.* Le second effet est dû à la partie non-locale² de la hessienne de pression ($\tilde{P}_{ij}''$ pour $i \neq j$), tout comme en deux dimensions. Ce terme est difficilement interprétable et devrait correspondre aux propriétés géométriques des structures (Nomura et Post 1998). Par exemple, dans les régions de forte vorticité, on observe que la rotation des axes de déformation est faible ce qui correspond à une très forte corrélation négative entre la rotation locale $\omega_\alpha \omega_\beta$ et la rotation non-locale $\tilde{P}_{\alpha\beta}''$ (Nomura et Post 1998).

²La pression s'obtient comme en deux dimensions par la relation $\Delta P = \boldsymbol{\omega}^2/2 - S^2$, c'est- dire qu'il faut connaître tous les champs de déformation et de vorticité pour obtenir la composante locale de la pression (Ohkitani et Kishiba 1995).

4.3.3 Discussion sur la dynamique des éléments matériels

L'image qui résulte de ces différents points est que, *tout comme en deux dimensions, il y a une compétition entre les effets de déformation (qui alignent les vecteurs avec l'axe de déformation $\mathbf{e}_\alpha$) et les effets de rotation effective (qui mettent en rotation)*. On peut donc conjecturer que le vecteur élément matériel devrait s'aligner dans une certaine direction quand les effets de déformation sont plus forts que les effets de rotation effective, et devrait tourner dans l'autre cas, tout comme en deux dimensions. L'existence de ces deux régimes semble confirmée par des propriétés différentes de la vorticité dans les régions où la vorticité domine et dans les régions où le taux de déformation domine (Nomura et Post 1998, Chertkov et al. 1999a, Tsinober et al. 1999). *Une différence importante entre les dynamiques 2D et 3D vient de l'action de la vorticité qui met en rotation les axes de déformation si elle n'est pas alignée avec ceux-ci, ce qui n'existait pas en deux dimensions.* En deux dimensions, la vorticité est en fait alignée avec le troisième axe de déformation (vertical) qui correspond à une valeur propre nulle.

Nous avons vu que l'on observe un faible alignement des vecteurs matériels avec les axes de déformation. Cela suggère que, tout comme en deux dimensions, les vecteurs matériels pourraient s'aligner avec une direction différente de ces axes. Par rapport à nos résultats (Lapeyre et al. 1999), on peut conjecturer que les vecteurs matériels s'alignent avec les vecteurs propres de la matrice de déformation exprimée dans la base de déformation, quand la déformation est plus forte que la rotation effective. Cependant, la nature du problème fait qu'un tel résultat est difficile à obtenir analytiquement, vu la complexité d'un problème faisant intervenir deux angles en trois dimensions dans l'équation (4.1) contre seulement un angle en deux dimensions. Dans les régions dominées par la rotation effective, il semble que l'on observe un alignement avec le vecteur $\mathbf{f}_3$, relié à la hessienne de pression (Nomura et Post 1998) : ce résultat a été observé pour la vorticité (cf. figure 4.2) mais on peut conjecturer qu'il s'applique aussi à un vecteur matériel. Un tel alignement est similaire à l'alignement bidimensionnel avec N^- (relié lui aussi à la hessienne de pression (Klein et al. 2000)). Cependant, il faut noter que nos résultats ne peuvent pas être extrapolés à la dynamique de la vorticité car nous allons voir que celle-ci interagit fortement avec la déformation qu'elle subit, beaucoup plus fortement qu'en dynamique bidimensionnelle.

4.4 Nature active de la vorticité tridimensionnelle

Nous venons de voir les caractéristiques de la dynamique de l'alignement d'un vecteur matériel. La question que l'on peut se poser maintenant est celle de la transposition de ces résultats à la dynamique de la vorticité. Nous allons voir que cette dynamique est beaucoup plus complexe et fait intervenir une forte interaction entre la déformation et la vorticité.

4.4.1 Différences de comportement entre vorticité et élément matériel

Afin de voir si la vorticité est active, plusieurs auteurs (Girimaji et Pope 1990, Ohkitani 1998) ont examiné l'évolution d'un vecteur matériel $\delta \mathbf{m}$ qui vérifie la même équation que la vorticité :

$$\frac{D \delta \mathbf{m}}{Dt} = S \delta \mathbf{m} .$$

Cette équation est différente de celle d'un vrai vecteur matériel car, ici, il n'y pas d'effet de rotation d  à la vorticité (le terme W des équations précédentes). On observe bien que la variance du vecteur augmente beaucoup plus vite que l'enstrophie et le vecteur s'aligne plutôt avec $\mathbf{e}_\alpha$ alors que la vorticité s'aligne plutôt avec $\mathbf{e}_\alpha$.

Quelle est la raison de cette différence de propriétés entre le vecteur matériel et la vorticité ? On peut invoquer le fait que la vorticité est liée à la vitesse, donc aussi liée de façon cinématique à la déformation et cela crée des propriétés d'alignement différentes. Il nous faut comprendre le mécanisme qui crée cette différence et rend la vorticité active en turbulence tridimensionnelle.

4.4.2 Dynamique locale de la vorticité

4.4.2a Résultats théoriques sur le tenseur de gradient de vitesse

Une première tentative de compréhension de la dynamique de la vorticité pour les équations d'Euler a été menée par Vieillefosse (1982) et Cantwell (1992) (et aussi par Léorat (1975)). Ces auteurs se sont intéressés à la dynamique locale des équations d'Euler, ce que Cantwell (1992) nomme "les équations d'Euler restreintes".

Ces auteurs partent de l'étude du tenseur de gradient de vitesse $A = \nabla \mathbf{u}$. En utilisant les équation de Navier-Stokes, on peut montrer que ce tenseur vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{DA}{Dt} + A^2 - (tr A^2) \frac{\delta_{ij}}{3} &= H_{ij} , \\ \text{avec } H_{ij} &= - \left(P''_{i,j} - (tr P'') \frac{\delta_{ij}}{3} \right) + \nu \Delta A_{ij} . \end{aligned}$$

H_{ij} correspond aux termes non-locaux et anisotropes ($H_{ii} = 0$), c'est-à-dire à l'interaction des particules qui sont sur des trajectoires lagrangiennes différentes à travers la pression et la viscosité. On obtient ici la fermeture de l'équation pour A dans le cas d'interactions locales, c'est-à-dire quand $H = 0$. Ce cas correspond à étudier seulement l'effet de la structure de vorticité sur elle-même sans tenir compte des effets extérieurs, d'où le nom de dynamique locale que l'on peut aussi lui donner.

En faisant cette hypothèse de localité, on peut montrer que le tenseur de gradient de vitesse A devient singulier en temps fini (Vieillefosse 1982, Cantwell 1992). La configuration asymptotique correspond à β positif et   un alignement de la vorticité avec $\mathbf{e}_\beta$.

On voit donc que l'hypothèse de localité ($H_{ij} = 0$) entraîne une auto-amplification de la vorticité et l'apparition d'une singularité. De plus, cette hypothèse de localité

conduit à un alignement de la vorticité avec $\mathbf{e}_\beta$, ce qui est bien observé dans les régions de déformation.

On a ici la manifestation de l'apparition de la singularité par auto-amplification de la vorticité comme discutée à la section 4.1.2. En relaxant l'hypothèse de localité, par exemple en modélisant H par un bruit aléatoire gaussien, on peut supprimer la singularité et obtenir un alignement avec $\mathbf{e}_\beta$ dans les régions de forte vorticité (Chertkov et al. 1999a).

De plus, on peut noter que cette théorie met l'accent sur la conservation du discriminant associé à l'équation pour les valeurs propres du tenseur A . Le signe de ce discriminant permet de dire si les valeurs propres du tenseur A sont réelles ou complexes, généralisant le critère de Weiss au cas tridimensionnel³ (Cantwell 1992, Blackburn et al. 1996).

4.4.2b Interprétation en terme de dynamique de la vorticité

D'où vient cette singularité ? Nous avons vu précédemment que la vorticité avait un effet dans la rotation des axes de déformation due à la vorticité (terme $\omega_i \omega_j$ dans l'équation 4.2). Cet effet réoriente les axes de déformation quand la vorticité n'est pas alignée avec ceux-ci. La rétroaction de la vorticité sur la déformation entraîne alors la rotation des axes de déformation et l'alignement de la vorticité avec $\mathbf{e}_\beta$. *C'est donc la rétroaction de la vorticité sur la déformation par le biais de la rotation des axes de déformation qui est responsable de l'alignement avec $\mathbf{e}_\beta$.* Une telle rétroaction n'existe pas en deux dimensions et peut expliquer pourquoi la vorticité a une nature plus passive comme on l'a vu au chapitre précédent.

Les différents éléments de la dynamique nous permettent de présenter le scénario probable de l'alignement de la vorticité avec $\mathbf{e}_\beta$ en dynamique locale (Nomura et Post 1998) : si la vorticité n'est pas alignée dès le départ avec un axe de déformation, la composante sur $\mathbf{e}_\alpha$ commence par s'amplifier par *vortex stretching*. Quand elle devient suffisamment importante, elle induit une rotation des axes de déformation qui transfère cette composante sur celles de $\mathbf{e}_\beta$ et $\mathbf{e}_\gamma$. Comme l'étirement sur la composante reliée à $\mathbf{e}_\gamma$ a pour effet de diminuer cette composante ($\gamma < 0$), c'est la deuxième composante qui va s'amplifier ($\beta > 0$) et la vorticité va s'aligner avec $\mathbf{e}_\beta$.

4.4.2c Discussion sur les régions où l'hypothèse locale est valide

Nous avons vu à la section 4.2.2a que l'alignement de la vorticité avec $\mathbf{e}_\beta$ s'observait dans les régions de déformation et non dans les régions de vorticité (figure 4.2) car on obtient un meilleur alignement avec $\mathbf{f}_3$ que $\mathbf{e}_\beta$ dans les régions de forte enstrophie (Nomura et Post 1998) et le terme d'auto-amplification de la vorticité est plus fort dans les régions de forte déformation que dans les régions de fort vorticité (Jiménez et al. 1993, Tsinober et al. 1999). Les régions de forte déformation semblent donc correspondre à des régions de dynamique locale. Pourquoi les régions de forte vorticité ne correspondent-elles pas aussi à cette dynamique locale ? Cela

³puisque le critère d'Okubo-Weiss n'est autre que le discriminant de l'équation pour les valeurs propres de A en deux dimensions.

peut s'expliquer par l'observation que les tubes de vorticité étirés et longilignes (qui sont associés aux fortes valeurs d'ensrophie) sont incapables de modifier la partie de la déformation par laquelle ils sont étirés (Tsinober et al. 1999). Cette partie est prescrite a priori et elle est découplée de leur vorticité, d'où l'effet non-local dans l'espace physique : la vorticité locale subit l'influence d'une structure extérieure (donc non locale) et non d'elle-même. Cela est aussi confirmé par l'alignement observé de la vorticité avec un des vecteurs propres de la hessienne de pression dans ces régions (Nomura et Post 1998).

La dynamique locale s'applique donc plutôt aux régions de forte déformation. Les régions de forte vorticité sont plutôt associées à une dynamique non-locale dans l'espace physique.

4.4.2d Différences avec le cas bidimensionnel

Les hypothèses de localité de Vieillefosse (1982) et de Cantwell (1992) correspondent à l'hypothèse de stationnarité du tenseur de gradient de vitesse faite par Weiss (1981), comme l'a remarqué Ohkitani (1995). Cette hypothèse de stationnarité implique que la vorticité et la déformation n'évoluent pas et cela montre que les équations 2D donnent des solutions beaucoup plus régulières que leurs homologues 3D pour qui l'absence d'une singularité n'est pas claire. De plus, en faisant cette hypothèse, on peut montrer que les gradients de vorticité s'alignent avec des directions différentes des axes de déformation dans les régions dominées par la déformation (il suffit de reprendre nos résultat en négligeant $D\phi/Dt$).

La différence fondamentale entre la dynamique 2D et 3D vient de l'effet rétroactif de la vorticité qui entraîne une rotation des axes de déformation lorsqu'elle n'est pas alignée avec ces axes. En deux dimensions, la rotation des axes de déformation ne peut se faire qu'à travers la non-localité de la hessienne de pression (c'est-à-dire la partie de cette matrice à trace nulle).

4.4.3 Réduction des non-linéarités dans l'équation de la vorticité

Nous venons d'examiner une cause probable de l'apparition d'une singularité dans les équations d'Euler qui se ferait à travers la rétroaction de la vorticité sur la déformation. On peut se poser la question de l'existence réelle de cette rétroaction. En fait, nous allons voir qu'il y a une réduction assez importante des non-linéarités qui peut conduire à l'absence de rétroaction de la vorticité sur la déformation.

  la section 4.1.2, nous avons montré que l'on pouvait suspecter que le taux de croissance de la vorticité pouvait être proportionnel à la vorticité, ce qui pouvait entraîner l'apparition d'une singularité. En fait, on peut s'intéresser à la loi d'échelle de ce taux en fonction de la vorticité :

$$\delta \equiv \frac{\omega \cdot (S\omega)}{|\omega|^2} \sim |\omega|^{n_\omega} .$$

Les simulations numériques montrent que $n_\omega \sim 0.3$ (Jiménez et al. 1993, Tsinober 1998a). *On voit donc qu'il y a une forte réduction de la non-linéarité et que la*

rétroaction de la vorticité sur la déformation semble faible.

Une première approche de l tude de cette rétroaction a été suivie par Constantin (1994) qui a examiné la relation entre le taux de croissance de vorticité δ et la vorticité ω . Le terme δ peut se mettre sous la forme :

$$\delta = \frac{3}{4\pi} VP \int D(\hat{\mathbf{y}}, \chi(\mathbf{x} + \mathbf{y}), \chi(\mathbf{x})) |\omega(\mathbf{x} + \mathbf{y})| \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^3},$$

avec $\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}$ et $\chi = \frac{\omega}{|\omega|}$

et $D(e_1, e_2, e_3) = (e_1 \cdot e_2) \det(e_1, e_2, e_3)$.

où $\det$ est le déterminant de la matrice formée par les trois vecteurs et VP désigne la valeur principale de l'intégrale c'est-à-dire $VP \int = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq \epsilon}$

La première remarque qu'on peut faire à propos de cette relation est que la contribution de l'intégrale spatiale pour $|\mathbf{y}| > L$ peut se borner en fonction de l'énergie totale et de L (Constantin 1994). S'il y a singularité, δ doit aussi exploser (sinon δ est borné et la vorticité croît exponentiellement au plus). Cela signifie que ce sont les interactions locales sur δ qui vont décider de la singularité (Constantin 1994).

La seconde remarque vient de l'apparition d'un déterminant dans l'équation. Si l'on suppose que le champ de vorticité est très lisse alors ce déterminant va s'annuler. En effet, si $\chi(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ est parallèle ou antiparallèle à $\chi(\mathbf{x})$ alors D s'annule. *L'alignement ou l'antialignement des vecteurs vorticité spatialement proches détruit la non-linéarité due à la déformation* (Constantin et al. 1996). *Cela montre pourquoi les tubes de vorticité intenses ne s'auto-amplifient pas puisque ces tubes sont presque rectilignes* (cf. figure 4.1b). On peut noter que le cas bidimensionnel est une dégénérescence de cette situation puisque la vorticité est toujours orientée verticalement, annulant exactement le déterminant.

4.4.4 Relation entre vorticité et déformation

Il peut être plus intéressant d'examiner en détail la relation entre la vorticité et la déformation. Nous venons de voir que potentiellement, il peut y avoir une réduction des non-linéarités dans l'équation de la vorticité. Au contraire, la relation entre vorticité et déformation met en relief le caractère actif de la vorticité.

4.4.4a Conjugaison déformation-vorticité

La caractère actif de la vorticité peut s'interpréter à travers la relation de conjugaison entre la vorticité et la déformation qu'a décrite Ohkitani (1994). En effet, il existe un opérateur T linéaire et non-local spatialement tel que

$$T[W] = S \quad \text{et} \quad T[S] = -W.$$

L'opérateur T peut s'exprimer sous la forme de dérivées spatiales⁴ :

$$(T[A])_{ij} = \partial_{ik}(\Delta^{-1}A_{jk}) - \partial_{jk}(\Delta^{-1}A_{ki}),$$

⁴On emploie la convention de sommation des indices répétés.

ou sous la forme d'intégrale singulière :

$$(T[A])_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{3}{4\pi}VP \int \frac{r_k A_{ki}(\mathbf{y})r_j - r_i A_{jk}(\mathbf{y})r_k}{r^5} dy \quad \text{avec} \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y} .$$

Ce résultat est dû à la non-divergence de la vitesse et ne fait pas intervenir les équations de Navier-Stokes. Cela montre que c'est une propriété *cinématique* de la vorticité.

L'opérateur T relie de façon non-locale dans l'espace spectral la vorticité et la déformation, ce qui peut contraindre la distribution spatiale de l'une par rapport à l'autre comme nous allons le voir.

4.4.4b Cas d'une vorticité unidirectionnelle

Pour illustrer cette conjugaison, on peut montrer que si la vorticité a tendance à être unidirectionnelle, alors elle s'aligne avec l'axe intermédiaire de déformation (Jiménez 1992). En effet, supposons que la vorticité soit intensifiée sur la verticale :

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{z} + O(\omega')$$

avec $\omega_0 \gg \omega'$ et $\partial_z \omega_0 \neq 0$. Alors, S_{ij} se décompose en

$$S_{ij} = -\frac{3}{8\pi}PV \int \frac{\omega_0}{r^5} \begin{pmatrix} -2r_1 r_2 & r_1^2 - r_2^2 & 0 \\ r_1^2 - r_2^2 & 2r_1 r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dy + O(\omega') .$$

Les composantes de S_{ij} d'ordre ω_0 forment une matrice 2×2 donc il y aura deux valeurs propres d'ordre ω_0 et une d'ordre ω' . De plus, les vecteurs propres associés aux valeurs propres d'ordre ω_0 sont dans le plan xy (en fait, ils font un angle $O(\frac{\omega'}{\omega_0})$ avec le plan xy).

  cause de l'incompressibilité, les valeurs propres d'ordre ω_0 sont de signe opposé. Cela implique que la valeur propre d'ordre ω' est intermédiaire. Le vecteur propre associé à cette valeur propre s'aligne approximativement avec $\mathbf{z}$ et donc avec la vorticité $\boldsymbol{\omega}$. On vient donc de montrer que *dans le cas d'une vorticité principalement unidirectionnelle, la conjugaison est active puisqu'elle relie l'orientation de la vorticité avec les axes de déformation.*

Par ailleurs, on peut noter que la vorticité le long de l'axe $\mathbf{z}$ ne modifie pas la déformation sur cet axe mais induit une forte déformation sur le plan équatorial. La déformation le long de l'axe $\mathbf{z}$ est reliée à la vorticité d'ordre ω' donc elle est découplée de la vorticité ω_0 . Il ne peut y avoir d'effet d'auto-amplification pour cette vorticité ω_0 et il faut une cause externe pour créer une vorticité intense.

Cet exemple est réaliste car on observe une accumulation de la vorticité intense en tubes rectilignes. Tsinober (1998a) a montré que les régions de vorticité intensifiée présentent une faible courbure des lignes de vorticité et que la vorticité s'aligne avec $\mathbf{e}_\beta$, ce qui correspond bien au cas examiné ici. Par contre, cet exemple se distingue de la dynamique locale parce que le tube de vorticité n'a pas d'effet auto-amplificateur direct puisqu'il réagit avec la vorticité d'ordre ω' , vorticité qu'il ne contrôle pas.

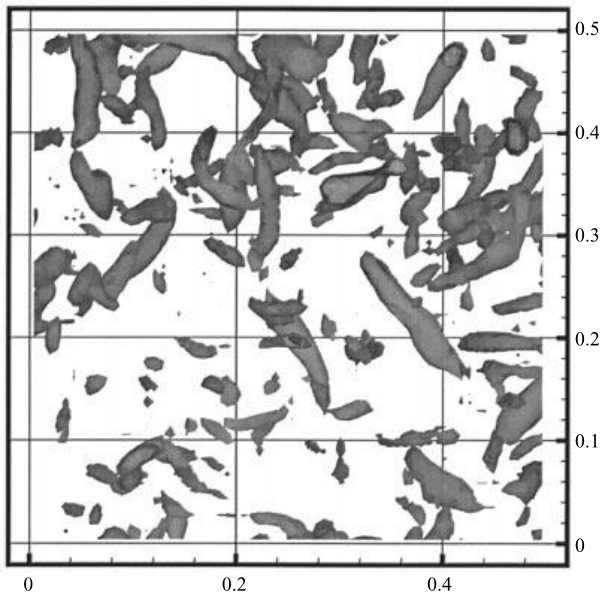


Figure 4.3a :

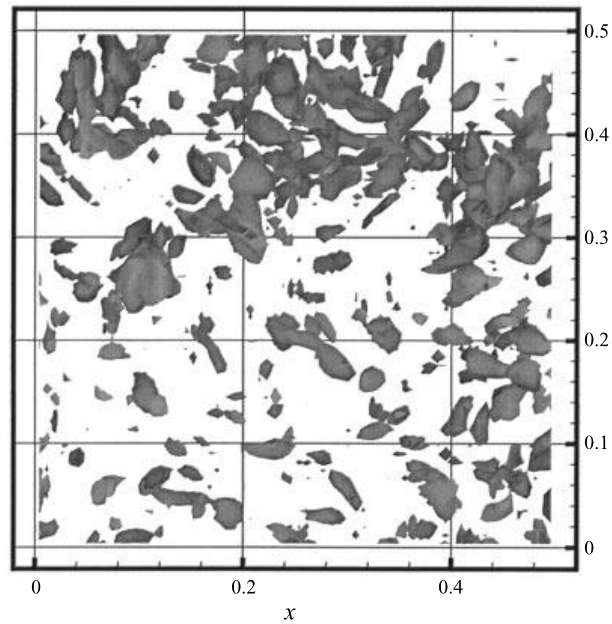


Figure 4.3b :

Figure 4.3 : (a) visualisation tridimensionnelle des structures à forte entropie. (b) visualisation tridimensionnelle des structures à fort taux de déformation. Tiré de Nomura et Post (1998).

4.4.4c Distributions spatiales de la vorticité et de la déformation

  cause de cette conjugaison, il semble que les distributions spatiales de la vorticité et de la déformation sont décorrélées, comme en deux dimensions. Jiménez et al. (1993) montrent que la loi de probabilité jointe du taux de déformation avec la vorticité exhibe une faible corrélation entre ces deux quantités. De plus, la distribution spatiale du taux de production d'entropie montre une tendance à la concentration à la périphérie des tubes de vorticité intense mais pas à l'intérieur (Jiménez et al. 1993). Au contraire des structures géométriques de la vorticité (figure 4.3a), les structures de fort taux de déformation (figure 4.3b) n'ont pas de forme géométrique particulière (Nomura et Post 1998).

4.4.4d Vortex de Burgers

Un exemple simple des propriétés cinématiques de la vorticité est donné par le vortex de Burgers (Burgers 1948, Andreotti 1997, Nomura et Post 1998). Sous certaines conditions, on peut montrer que ce vortex ainsi que la solution de couche cisillée de Burgers sont des solutions points fixes attractifs des équations de Navier-Stokes (Galanti et al. 1997). Par ailleurs, il existe aussi d'autres solutions simplifiées pour les équations d'Euler tridimensionnelle (Moffat et al. 1994, Gibbon et al. 1999) mais nous allons nous concentrer sur cet exemple simple.

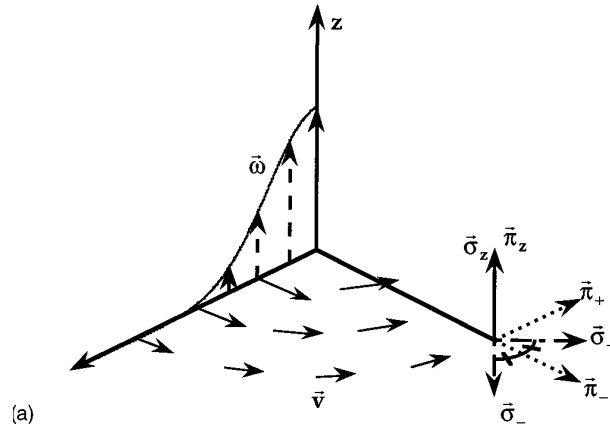


Figure 4.4: Schématisation du vortex de Burgers. Le vecteur vitesse v est représenté par des vecteurs solides ; le vecteur vorticité ω est représenté par des tirets ; Les vecteurs σ_z , σ_+ et σ_- sont les vecteurs propres du tenseur de déformation S ; les vecteurs π_z , π_+ et π_- sont les vecteurs propres de la hessienne de pression P'' . Tiré d'Andreotti (1997).

Le vortex de Burgers est représenté sur la figure 4.4. Il est constitué d'un tube axial de vorticité et ressemble à un tourbillon axisymétrique 2D. La vorticité et la vitesse s'écrivent dans un repère cylindrique (r, θ, z) :

$$\omega = (0, 0, e^{-r^2/4})_{r,\theta,z}$$

$$v = \left(-\frac{r}{2Re}, 2\frac{1 - e^{-r^2/4}}{r}, \frac{z}{Re} \right)_{r,\theta,z}$$

Le tenseur de déformation possède deux vecteurs propres dans le plan horizontal de coordonnées $\sigma_{\pm} = (1, \theta \pm \frac{\pi}{4}, 0)_{r,\theta,z}$ et un vecteur propre vertical σ_z . Une étude des valeurs propres correspondantes (figure 4.5a) montre que la vorticité s'aligne soit avec e_{α} (c'est-à-dire $\sigma_z = e_{\alpha}$) au centre et loin du tube, soit avec e_{β} (c'est-à-dire $\sigma_z = e_{\beta}$) sinon (Andreotti 1997).

La hessienne de pression possède deux vecteurs propres dans le plan horizontal de coordonnées $\pi_+ = (1, \theta + \pi/2, 0)_{r,\theta,z}$ et $\pi_- = (1, \theta, 0)_{r,\theta,z}$ et un vecteur propre vertical π_z . Une étude des valeurs propres correspondantes (figure 4.5b) montre que la vorticité s'aligne soit avec f_3 (c'est-à-dire $\pi_z = f_3$) au centre du tube, soit avec f_2 (c'est-à-dire $\pi_z = f_2$) (Andreotti 1997).

La figure 4.6 montre la vorticité et le taux de déformation dans le cas où $Re = \infty$. On peut voir que la région de déformation maximale est à la périphérie du tube de vorticité, comme pour les tourbillons en deux dimensions.

Cet exemple montre que la structure géométrique de la vorticité peut influencer l'alignement avec les axes de déformation et les vecteurs propres de la hessienne

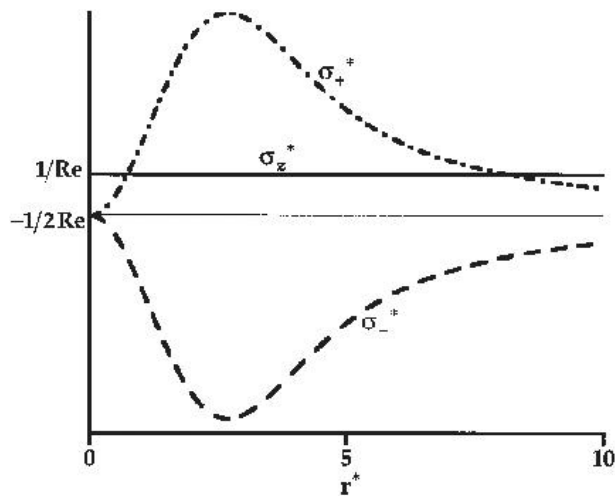


Figure 4.5a :

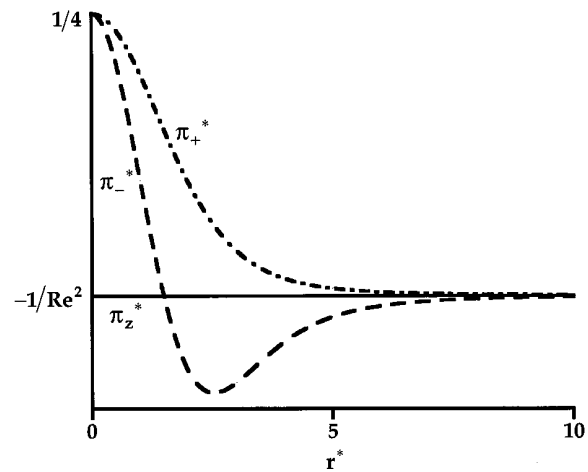


Figure 4.5b :

Figure 4.5 : (a) valeurs propres du tenseur de déformation en fonction de la distance au centre du tube. (b) valeurs propres de la hessienne de pression en fonction de la distance au centre du tube. Tiré de Andreotti (1997).

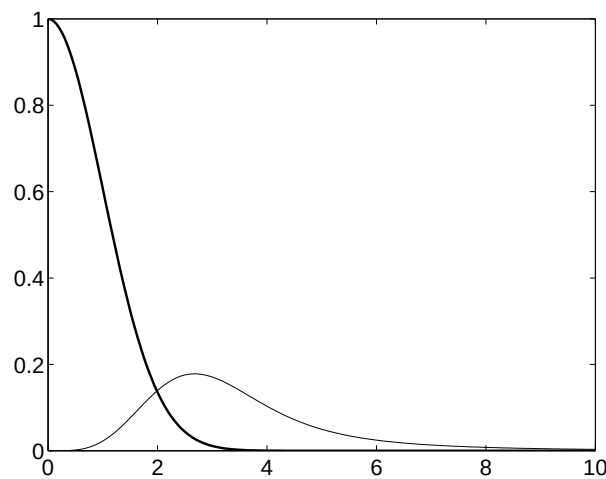


Figure 4.6: En gras, enstrophie du vortex de Burgers pour $Re = \infty$ en fonction de la distance à l'axe. En trait fin, carré du taux de déformation.

de pression à partir de la relation cinématique entre la déformation et la vorticité. Au centre du vortex (là où la vorticité est la plus forte), la vorticité s'aligne avec le vecteur propre $\mathbf{f}_3$ de la hessienne de pression alors qu'à sa périphérie (là où la déformation est la plus forte), il y a alignement avec le vecteur propre $\mathbf{e}_\beta$ du tenseur de déformation. Ceci est en accord avec les alignements observés dans les simulations numériques.

4.5 Conclusion

Nous pouvons maintenant reprendre les principaux résultats connus en turbulence tridimensionnelle et les comparer aux résultats que nous avons obtenus en turbulence bidimensionnelle.

En turbulence 3D, on observe la formation de tubes de vorticité intense dont le mécanisme est analogue aux filaments de forte palinstrophie et se fait grâce à la déformation. Les équations régissant la dynamique de la vorticité et des vecteurs éléments matériels montrent qu'il y a une compétition entre deux effets (Dresselhaus et Tabor 1991) : d'une part, la déformation qui aligne ces vecteurs avec les axes de déformation et, d'autre part, la rotation effective qui met en rotation ces vecteurs. Le premier régime est responsable d'un accroissement intense de la vorticité et des vecteurs matériels alors que le second est responsable d'un accroissement beaucoup plus réduit, ce qui est bien vérifié par les observations (Nomura et Post 1998, Tsinober et al. 1999). Par ailleurs, le premier régime correspond à une dynamique locale avec un certain alignement avec l'axe intermédiaire de la déformation alors que le second correspond à une dynamique non-locale avec alignement avec un vecteur propre de la hessienne de pression (Nomura et Post 1998). Ces résultats, encore relativement qualitatifs, vont dans un sens similaire à nos résultats obtenus en deux dimensions. Il faut cependant noter qu'il n'existe pas de théorie tridimensionnelle (  notre connaissance) qui décrive la dynamique d'alignement des vecteurs matériels en prenant en compte à la fois la déformation et la rotation.

Enfin, nous avons vu qu'en trois dimensions, la vorticité peut avoir une nature active. En effet, un modèle de dynamique locale montre que la vorticité peut rétroagir fortement sur la rotation des axes de déformation (ce qui est impossible en deux dimensions) et que cela peut conduire à un alignement de la vorticité avec l'axe intermédiaire de déformation, comme il est observé dans les régions de déformation. Cependant, les tubes de vorticité intense ne possèdent pas un tel mécanisme d'auto-amplification car ils sont découplés de la déformation qu'ils subissent par la relation entre la vorticité et la déformation (Jiménez et al. 1993). La relation de conjugaison entre la vorticité et la déformation réduit l'efficacité de la production d'enstrophie (Ohkitani 1998) et découple spatialement la vorticité de la déformation. Ce découplage et cette réduction de la production de la vorticité est similaire à la situation bidimensionnelle. La nouveauté vient de l'effet de rétroaction qui réoriente la vorticité vers l'axe intermédiaire de déformation.

Nous avons examiné l'analogie entre la vorticité tridimensionnelle et les gradients de vorticité bidimensionnels. Ces quantités sont des gradients de vitesse dans un cas et des gradients de vorticité dans l'autre. Or la vorticité et la vitesse subissent une cascade vers les petites échelles et développent des gradients par des mécanismes de déformation analogues. Plusieurs auteurs ont conjecturé qu'à cause de ces similitudes les cascades d'énergie tridimensionnelle et d'enstrophie bidimensionnelle pourraient se comporter de façon analogue (Batchelor 1969, Herring et al. 1974, Kida 1985).

En trois dimensions, il faut cependant noter que le transfert d'énergie se fait à travers deux termes : la production de vorticité et le produit des valeurs propres de

déformation $-\alpha\beta\gamma$ (Betchov 1956, Monin et Yaglom 1975). Chertkov et al. (1999a) ont montré que le terme de production d'enstrophie contribue peu au transfert d'énergie, à partir d'un modèle de fermeture pour les tétrades, ce qui est aussi confirmé par Jiménez et al. (1993) et Tsinober et al. (1999) dans leurs simulations turbulentes. Cela implique que la cascade tridimensionnelle d'énergie n'est pas strictement équivalente à la cascade bidimensionnelle d'enstrophie.

Conclusion générale

Au cours de cette thèse, nous avons étudié comment les structures à l'échelle synoptique influent sur les propriétés de mélange et de transport de traceur dans le cadre de la turbulence bidimensionnelle. En particulier, nous avons mis en évidence comment la cascade de traceur vers les petites échelles s'effectue dans l'espace physique. La manifestation physique de cette cascade est la *production de gradients de traceur* et c'est la dynamique de cette production que nous avons examinée de façon théorique et les résultats que nous avons obtenus ont été confirmés à travers des simulations de turbulence en décroissance libre.

Le point principal soulevé par nos travaux est que la dynamique des gradients de traceur s'explique en terme de la *dynamique lagrangienne de l'orientation des ces gradients relativement aux axes de déformation*. Cette dynamique est essentiellement contrôlée par les tenseurs de gradient de vitesse et d'accélération lagrangienne, c'est-à-dire par la *dynamique newtonienne*. Cette dynamique de l'orientation peut s'interpréter de façon relativement simple comme nous l'avons montré en particulier dans trois publications (Lapeyre et al. 1999, Klein et al. 2000, Lapeyre et al. 2001). Nos résultats théoriques ont mis en évidence les deux éléments majeurs qui gouvernent la dynamique de l'orientation.

Le premier effet, et le plus important, est la *compétition entre les effets de déformation et les effets de rotation effective (vorticité et rotation des axes de déformation)*. Les effets de déformation cherchent à aligner le gradient de traceur avec l'axe compressionnel de déformation alors que les effets de rotation effective cherchent à mettre le gradient en rotation. Cette compétition peut s'exprimer en fonction d'un seul paramètre adimensionnel r qui permet de distinguer les deux régimes dynamiques (régions dominées par la déformation ou régions dominées par la rotation effective).

Le deuxième effet est relié à la *variation de l'échelle de temps de la dynamique qui s'exprime à travers la variation du taux de déformation*. Le fait que cette échelle de temps ne soit pas stationnaire provoque un ralentissement ou une accélération de la rotation du gradient. Cette effet s'exprime en fonction d'un seul paramètre adimensionnel s , relié à la dérivée lagrangienne du taux de déformation.

Ces deux effets contribuent à l'existence de deux régimes dynamiques. Quand les effets de déformation dominent, le gradient de traceur s'aligne dans une direction déterminée par r . Cette direction est différente des axes de déformation et correspond à un taux de croissance important des gradients de traceur et donnera une forte cascade. Quand les effets de rotation effective dominent, le gradient est en rotation mais avec un taux de rotation non uniforme. Cette rotation non uniforme entraîne un

alignement statistique du gradient dans la direction du plus faible taux de rotation, qui est déterminée par r et s . Cela correspond à une faible cascade vers les petites échelles.

Ces résultats théoriques ont été obtenus en faisant l'hypothèse que les quantités pertinentes pour la dynamique du gradient de traceur sont les tenseurs de gradient de vitesse et d'accélération, quantités reliées à r et s . La prise en compte seule du tenseur de gradient de vitesse (Okubo 1970, Weiss 1981) conduit à une approche cinématique du problème. Au contraire, la prise en compte des accélérations lagrangiennes permet de relier la dynamique du gradient de traceur à la dynamique de la turbulence. Le tenseur de gradient d'accélération, c'est-à-dire la hessienne de pression, se décompose en une partie isotrope (associée au tenseur de gradient de vitesse) et une partie anisotrope (associée aux caractéristiques non-locales de la pression). La partie dynamique que nous prenons maintenant en compte correspond à cette partie anisotrope qui influe sur la rotation des axes de déformation et sur l'évolution lagrangienne du taux de déformation. Pourquoi cette partie anisotrope de la hessienne de pression est fondamentale pour la turbulence ? Elle est en fait reliée de façon non-locale à la nature non-linéaire de la turbulence (par la relation entre la divergence des accélérations et la quantité d'Okubo-Weiss (Hua et al. 1998)).

Dans les deux régimes dynamiques (dominés par la déformation ou par la rotation effective), on obtient une *direction préférentielle pour les gradients de traceur*, direction indépendante du type de traceur mais dépendante des *propriétés dynamiques de l'écoulement*. Ces mécanismes d'alignement ont été confirmés dans des simulations turbulentes bidimensionnelles à la fois à travers des résultats statistiques et à travers un examen de la cascade dans l'espace physique. Nos résultats améliorent donc la compréhension de la dynamique des gradients de traceur par rapport aux études antérieures (Okubo 1970, Weiss 1981, Hua et Klein 1998).

Ces résultats théoriques permettent une meilleure compréhension du mélange dû aux structures énergétiques de la turbulence. Il apparaît que l'on peut caractériser les régions de forte cascade (régions d'expulsion de filaments) ainsi que les régions faiblement actives pour la cascade à travers la prédiction du taux de croissance exponentielle des gradients de traceur. Par ailleurs, des résultats préliminaires semblent indiquer que l'on peut déterminer les régions de l'espace physique où il y aura une barrière au transport (ou au mélange), régions qui correspondent à une discontinuité sur r .

Compte tenu de nos résultats probants, il nous a semblé intéressant de réexaminer le problème de la nature active de la vorticité et de sa cascade directe vers les petites échelles. L'objectif était de pouvoir comparer les cascades de vorticité et de scalaire passif afin de déterminer dans quelle mesure ces cascades sont différentes alors que ces deux traceurs sont conservés exactement le long de trajectoires lagrangiennes. Un objectif supplémentaire était d'évaluer le rôle de la diffusion sur la dynamique d'alignement des gradients.   cette fin, nous avons examiné l'évolution temporelle de simulations numériques de turbulence bidimensionnelle en décroissance libre. L'étude de l'évolution temporelle permet de se rendre compte de l'effet des structures sur

les cascades ainsi que de l'effet de la diffusion, ce qui n'est pas possible quand la turbulence est pleinement développée. Les diagnostics que nous avons utilisés pour cette étude étaient à la fois classiques (étude du champ physique, des spectres . . .) et originaux (c'est-à-dire fondés sur les propriétés d'alignement des gradients de traceurs).

Nous avons montré dans cette étude qu'un effet de la diffusion était bien de réduire l'alignement dynamique des gradients et que cet effet était réduit pour les gradients les plus forts. Concernant les cascades de vorticité et de scalaire passif, les diagnostics classiques ont montré que la cascade était plus rapide pour le scalaire passif que pour la vorticité mais que les spectres aux petites échelles sont identiques. Une explication de la différence des cascades vient en fait des propriétés différentes d'alignement des gradients de scalaire passif et de vorticité lors de la phase transitoire de la turbulence, comme nous l'avons montré. Dans la phase transitoire de la turbulence, quand la diffusion est faible, les gradients de scalaire passif s'alignent mieux avec la direction privilégiée de l'écoulement dans les régions dominées par la déformation alors que les gradients de vorticité s'alignent mieux avec la direction privilégiée de l'écoulement dans les régions dominées par la rotation effective. Nous avons montré que cela est dû (au moins pour ces dernières régions)   la relation de conjugaison entre la vorticité et la déformation qui est effective lorsqu'il existe des lignes de courant fermées. *Ces différences d'alignement sont responsables d'une cascade plus forte de scalaire passif que de vorticité.* D'autre part, *ces différences s'estompent pour les gradients plus forts* et nous observons que *les gradients de vorticité et de scalaire passif s'alignent exactement entre eux quand la turbulence est pleinement développée.* Ceci manifeste le fait que les propriétés des cascades sont identiques lorsque l'on considère des structures qui ont participé à la cascade (c'est-à-dire les gradients les plus intenses).

Enfin, nous avons mis en relation les résultats obtenus dans cette thèse sur la dynamique des gradients de traceur avec les résultats de la littérature sur la dynamique du vecteur vorticité en turbulence tridimensionnelle. Le point intéressant est que la vorticité tridimensionnelle vérifie une équation analogue à celle des gradients de traceur bidimensionnels. Les caractéristiques de la dynamique de ces deux vecteurs sont similaires : une différence des propriétés d'alignement du vecteur vorticité est observée entre les régions de déformation et les régions de rotation, suggérant une compétition entre les effets de rotation et les effets de déformation. Par ailleurs, une différence importante entre la dynamique bidimensionnelle et la dynamique tridimensionnelle est l'importance de la relation de conjugaison pour réduire la production d'ensrophie en trois dimensions, ce qui implique un comportement diff rent de la vorticité et de vecteurs matériels.

Les résultats obtenus au cours de cette thèse ont permis une meilleure compréhension de la cascade, tout au moins pour les propriétés dynamiques des gradients de vorticité et de scalaire passif. C'est une première étape importante pour cette compréhension. Certains résultats préliminaires semblent montrer que les diagnostics de la cascade

que nous avons employés permettent de déterminer les régions de fort mélange turbulent avec production de filaments de petite échelle et les régions de barrière au mélange turbulent. Il serait intéressant de vérifier ce comportement dans d'autres types de simulations (turbulence forcée, sur le plan β , ou dans des cas simplifiés d'instabilité barotrope de tourbillons) afin de voir si une caractérisation générale du mélange est possible, et de proposer une rationalisation de ce phénomène. Si cela s'avérait correct, il serait possible de proposer une paramétrisation du mélange qui ne tendrait pas à détruire systématiquement les forts gradients comme la paramétrisation classique de diffusion turbulente le fait.

Par ailleurs, nous avons examiné la cascade de traceur dans un contexte d'écoulement bidimensionnel. Or ces processus de cascades sont plus généraux et peuvent s'appliquer à une cascade d'enstrophie ou de traceur en turbulence quasi-géostrophique puisque l'on a aussi une cascade de l'enstrophie potentielle vers les petites échelles et une cascade d'énergie barotrope vers les grandes échelles (Charney 1971, Hua et Haidvogel 1986, McWilliams 1990c, Tung et Welch 2001). En effet, le champ de vitesse dans une telle turbulence est presque horizontal, ce qui implique des équations identiques au cas bidimensionnel pour la composante horizontale du gradient de traceur. De plus, Hua et al. (1998) ont montré que la dynamique de la cascade est bien contrôlée par les tenseurs de gradient de vitesse et d'accélération et que les accélérations lagrangiennes sont dominées par le terme de pression agéostrophique caractérisée par ses grandes échelles. Notre étude bidimensionnelle prenait justement en compte ce terme de pression et on peut conjecturer que l'on obtiendra alors des résultats analogues. Il faudrait donc examiner la cascade horizontale de traceur et voir les conséquences que peuvent entraîner l'effet β ou l'effet de la divergence de la vitesse. Des résultats préliminaires montrent que nos résultats sont aussi qualitativement valides (au sens statistique d'alignement) dans cette turbulence.

Un second aspect à développer serait d'examiner la cascade du traceur sur la verticale. Cette cascade sur la verticale est intimement liée à la cascade sur l'horizontale comme l'ont montré Haynes et Anglade (1997) et Hua et al. (1998) parce que l'équation de la formation de gradient vertical de traceur dépend seulement du gradient horizontal de traceur. Il semble alors possible de pouvoir caractériser le rapport d'aspect horizontal/vertical des filaments produits par les structures énergétiques tridimensionnelles (tourbillons, jets) en fonction des propriétés dynamiques de l'écoulement.

Enfin, nous pourrions confronter nos résultats théoriques à la réalité des écoulements géophysiques, tels que la turbulence mésoéchelle océanique (telle celle qui résulte du Gulf Stream) ou les tourbillons polaires stratosphériques. Pour ces derniers, des analyses préliminaires ont été menées. Il semble que le tourbillon polaire arctique ne soit pas un bon candidat pour ce genre d'études car il ne se comporte pas comme une entité cohérente mais plutôt comme une structure avec des sous-structures dynamiques. Par contre, le tourbillon polaire antarctique a une nature plus cohérente et pourrait mieux se prêter à ce genre d'étude. Néanmoins, le diagnostic des quantités adimensionnées que nous avons employés (r et s) se révèle difficile parce que ces quantités

sont adimensionnées et donc ne distinguent pas les structures peu énergétiques des structures plus énergétiques. Il faudrait donc proposer des quantités dimensionnées pour pallier à ce défaut.

Annexe A

Quelques résultats annexes

Ce chapitre reprend quelques résultats ou remarques que l'on n'a pas jugé bon de conserver dans le corps de la thèse.

A.1 Relation entre les gradients et la courbure des isolignes

On peut s'interroger sur la relation entre les gradients de traceur et la courbure des isolignes de traceur. En effet, les simulations de turbulence bidimensionnelle montrent que les filaments qui possèdent de très forts gradients ont une courbure relativement faible (cf. la figure 1.2b à la page 21). On peut donner une explication à ce phénomène.

Posons $\mathbf{t} = \mathbf{k} \times \frac{\nabla q}{|\nabla q|}$ le vecteur unitaire tangent à l'isoligne de traceur q et $\mathbf{n} = \frac{\nabla q}{|\nabla q|}$ la normale à l'isoligne avec $\mathbf{k}$ le vecteur unitaire vertical. Soit κ la courbure de l'isoligne du traceur (c'est-à-dire l'inverse du rayon de courbure). Alors, celle-ci vérifie (Dresselhaus et Tabor 1991, Liu et Muzzio 1996)

$$\frac{D\kappa}{Dt} = -3\mathbf{t} \cdot ([\nabla \mathbf{u}]\mathbf{t}) + (\partial_{jk}u_i)n_it_jt_k . \quad (\text{A.1})$$

Le premier terme est relié au taux exponentiel de production de gradient de traceur par la relation

$$\frac{D \log |\nabla q|}{Dt} = \mathbf{t} \cdot ([\nabla \mathbf{u}]\mathbf{t}) .$$

L'équation pour la courbure s'exprime donc en fonction de l'évolution du gradient de traceur :

$$\frac{D\kappa}{Dt} = -3 \frac{D \log |\nabla q|^3}{Dt} \kappa + (\partial_{jk}u_i)n_it_jt_k . \quad (\text{A.2})$$

Si on suppose que le second terme de cette équation est négligeable devant le premier terme, une forte croissance des gradients implique une forte décroissance de la courbure donc les forts gradients de traceur seront quasi-rectilignes. Au contraire, dans les régions où il y a une forte décroissance des gradients, les isolignes auront tendance à s'enrouler. Si on applique ce raisonnement à la vorticité, on peut conjecturer que, pour que les filaments de vorticité forment des tourbillons, il faut qu'ils alignent leur

gradient avec l'axe *extensionnel* de déformation, ce qui va diminuer leur gradient et les enrouler. Si la dynamique de la cascade intensifie leur gradient, il ne pourront pas s'enrouler et resteront passifs. Ceci est qualitativement confirmé dans les simulations de Dritschel et al. (1991) où l'on observe la formation de tourbillon par enroulement que lorsque le gradient associé au filament de vorticit   s'aligne avec l'axe extensionnel de d  formation comme le remarque Parker (1998). Par ailleurs, ces r  sultats ne sont valables que si le second terme dans l'  quation A.2 est bien n  gligeable.

On peut cependant prouver un r  sultat exact reliant la courbure et le gradient de traceur (Constantin 1994) :

$$\frac{D \kappa |\nabla q|}{Dt} = \mathbf{k} \cdot (\nabla q \times \nabla \beta) ,$$

avec $\beta = \mathbf{k} \cdot \left(\nabla q \times \frac{D \nabla q}{Dt} \right) .$

Cette relation implique que *l'int  grale de $\kappa |\nabla q|$ sur une isoligne ferm  e de q est conserv  e au cours du temps*. S'il y a une augmentation importante du gradient le long de cette isoligne et que la courbure n'oscille pas rapidement et fortement, alors la courbure doit diminuer en proportion afin de conserver $\kappa |\nabla q|$ sur l'isoligne. La condition de lente oscillation de la courbure est due au fait que l'on a une propri  t   int  grale (le long d'une isoligne).

Ces r  sultats qualitatifs ont   t   confirm  s en particulier par Drummond (1993) et Liu et Muzzio (1996) qui observent une corr  lation n  gative entre la d  formation d'  l  ment mat  riel (analogue    des gradients de traceur) et la courbure de leur isoligne.

On peut noter qu'en trois dimensions, une formule analogue    l'  quation A.2 existe (Drummond et Munch 1991, Constantin et al. 1995). On peut donc s'attendre    un m  canisme similaire de d  croissance de la courbure des lignes de vorticit   avec l'intensification de la vorticit   (Constantin et al. 1995). Ceci est en accord avec les observations de longs tubes de vorticit   dans lesquels les lignes de vorticit   sont fortement unidirectionnelles. En particulier, Tsinober (1998a) a montr   que les r  gions de vorticit   concentr  e pr  sentent une faible courbure des lignes de vorticit   et que, de fa  on plus g  n  rale, l'alignement avec l'axe interm  diaire de d  formation $\mathbf{e}_\beta$ est corr  l   avec une faible courbure.

A.2   quation simplifi  e pour l'  volution d'un tourbillon d  form  

De m  me que l'on peut s'int  resser    l'  volution d'un gradient de traceur soumis    une d  formation et une rotation, on peut s'int  resser aussi    l'  volution d'un tourbillon dans des champs de d  formation et de rotation suppos  s stationnaires. Un mod  le simplifi   d'un tel tourbillon est une tache elliptique de vorticit   constante qui poss  de la propri  t   de rester elliptique au cours de son   volution. Kida (1981) a d  riv   les   quations d'  volution d'un tel tourbillon,   quations qui se r  sument    l'  volution du rapport d'aspect grand axe/petit axe ($\gamma = a/b$) et    l'  volution de

l'angle θ entre le petit axe et la bissectrice des axes de déformation :

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dt} &= -\gamma \sigma_{ext} \sin 2\theta , \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\omega_{ext}}{2} + \frac{\omega_0 \gamma}{(\gamma + 1)^2} - \frac{\sigma_{ext}}{2} \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2 - 1} \cos 2\theta .\end{aligned}$$

En fait, la rotation des axes de déformation peut facilement être prise en compte dans le terme $\omega_{ext}/2$ et en remplaçant 2θ par $2(\theta + \phi)$. À partir de ces équations, on peut obtenir l'équation pour un gradient de vorticité en faisant tendre le rapport d'aspect γ vers l'infini.

Dans le cas d'une vorticité externe nulle, il y a deux solutions stationnaires pour ces équations, une stable et une instable et la solution stable correspond à $\theta = 0$ c'est-à-dire à une orientation du tourbillon à 45° des axes de déformation.

Un résultat similaire a été obtenu par Jiménez et al. (1996) qui ont dérivé une solution stationnaire d'un tourbillon isolé et faiblement diffusif en présence d'un champ de déformation externe par une méthode d'expansion de perturbations. Ils ont comparé leur solution analytique stationnaire à des tourbillons d'une simulation numérique turbulente. Les tourbillons de la simulation sont relativement proches de l'équilibre stationnaire de leur solution. En particulier, on observe bien *un alignement des tourbillons avec la bissectrice des axes de déformation*, résultat aussi observé par Paireau et al. (1997) dans une expérience de laboratoire d'un tourbillon soumis à une déformation externe.

Ces modèles simplifiés représentent donc bien l'équilibre des tourbillons en présence de déformation externe. Par ailleurs, ce résultat sur la quasi-stationnarité des tourbillons va dans le même sens que nos résultats : nous avons vu que les gradients de traceur étaient proches des solutions d'équilibre de l'équation d'orientation, dans les champs de turbulence bidimensionnelle.

A.3 Effets de la divergence de la vitesse

Il est facile d'inclure le terme de divergence $\delta = \partial_x u + \partial_y v$ pour les équations du gradient de traceur dans un écoulement bidimensionnel. Cela modifie l'équation de la norme du gradient mais pas de sa direction :

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho^2}{Dt} = -\delta - \sigma \sin(2(\theta + \phi)) .$$

Donc, pour obtenir la solution en dynamique divergente, on doit multiplier la solution non-divergente pour ρ^2 du gradient par le terme

$$\exp \left(- \int_0^t \delta(t') dt' \right) ,$$

où t correspond au temps lagrangien. L'effet de la divergence est d'accroître ou de réduire la norme des gradients sans agir directement¹ sur la dynamique de leur orientation.

¹Il y a un effet indirect qui se manifeste dans l'équation pour la hessienne de pression.

A.4 Analogie entre l'évolution des nombres d'onde du traceur et les gradients de traceur

Au cours de la thèse, nous avons utilisé le fait que la cascade de traceur vers les petites échelles était associée à la production de forts gradients de traceur. Il est possible de justifier qualitativement ce résultat (Batchelor 1959, Kraichnan 1974, Rhines 1983, Chertkov et al. 1995b, Antonsen et al. 1996).

Considérons un traceur c conservé le long de trajectoires lagrangiennes :

$$\frac{Dc}{Dt} = 0 . \quad (\text{A.3})$$

On peut représenter ce traceur par sa forme spectrale :

$$c = \int c(\mathbf{k}_0, t) \exp(i\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x}(t)) d\mathbf{k}_0 . \quad (\text{A.4})$$

L'idée que l'on utilise ici est de transporter le nombre d'onde comme dans la théorie des rayons. En injectant l'équation (A.4) dans (A.3), on obtient

$$\int \left[\frac{Dc(\mathbf{k}_0, t)}{Dt} + ic(\mathbf{k}_0, t) \left(\frac{D\mathbf{k}}{Dt} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{u}(t) \right) \right] \exp(i\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x}(t)) d\mathbf{k}_0 = 0 ,$$

où $d\mathbf{k}_0$ représente $d\mathbf{k}$ à $t = 0$. De plus, on a utilisé le fait que $D\mathbf{x}/Dt = \mathbf{u}$.

On voit que, dans ce cas, l'amplitude $c(\mathbf{k}_0, t)$ est stationnaire² et que les nombres d'onde vérifient l'équation

$$\frac{D\mathbf{k}}{Dt} \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \quad \text{avec} \quad \mathbf{k}(t=0) = \mathbf{k}_0 ,$$

le long des trajectoires lagrangiennes.

Afin de terminer la preuve, il faut pouvoir linéariser $\mathbf{u}$. Une façon propre de le faire est de passer dans le référentiel en co-mouvement avec le fluide en un point $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (Chertkov et al. 1995b). Pour cela, il faut introduire des vitesses quasi-lagrangiennes $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ reliées aux vitesses eulériennes par

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x} - \int_0^t \mathbf{v}(0, t') dt') .$$

Par ce biais, on obtient

$$\frac{D\mathbf{k}}{Dt} \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{k} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}(t, 0)) .$$

On peut alors faire un développement de la vitesse au premier ordre et on a finalement

$$\frac{D\mathbf{k}}{Dt} = -[\nabla \mathbf{v}]^* \mathbf{k} .$$

On voit donc que l'évolution des gradients correspond aussi à l'évolution des nombres d'onde et que la croissance des gradients devrait aller de pair avec la croissance des nombres d'onde, c'est-à-dire avec la cascade du traceur vers les petites échelles.

²En présence de diffusion, elle vérifierait l'équation : $\frac{D}{Dt} c(\mathbf{k}_0, t) = -\nu c(\mathbf{k}_0, t) \mathbf{k}^2$.

A.5 Lien avec la dispersion de particules et les exposants de Liapounov

A.5.1 Le problème de la dispersion de particules

On peut relier la cascade de traceur vers les petites échelles avec le problème de la dispersion de particules initialement très proches (Hua et Klein 1998) et aux exposants de Liapounov. En effet, l'évolution des trajectoires de particules $\mathbf{X}$ est donnée par l'équation

$$\frac{D\mathbf{X}}{Dt} = \mathbf{u}(\mathbf{X}) .$$

Si on pose $\delta\mathbf{X}$ le vecteur séparant deux particules, initialement proches, on a au premier ordre

$$\frac{D\delta\mathbf{X}}{Dt} \approx [\nabla\mathbf{u}] \delta\mathbf{X} .$$

Maintenant, posons $\mathbf{Z} = \mathbf{k} \times \delta\mathbf{X}$. Après un simple jeu d'écriture, on obtient

$$\frac{D\mathbf{Z}}{Dt} = -[\nabla\mathbf{u}]^* \mathbf{Z} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{Z} .$$

Le problème de dispersion de particules initialement très proches est donc équivalent au problème du gradient de traceur pour un écoulement non-divergent et au premier ordre en dérivée spatiale. Une autre façon de voir ce résultat est de considérer un traceur passif pour lequel $Dq/Dt = 0$. Pour deux particules séparées par $\delta\mathbf{X}$, on obtient $q \approx q_0 + \nabla q \cdot \delta\mathbf{X}$ au premier ordre. Donc

$$(D\nabla q/Dt) \cdot \delta\mathbf{X} + \nabla q \cdot D\delta\mathbf{X}/Dt = 0 .$$

Et un peu d'algèbre montre que

$$\nabla q \cdot (D\delta\mathbf{X}/Dt - [\nabla\mathbf{u}]\delta\mathbf{X}) = 0 ,$$

ce qui achève la démonstration

A.5.2 Théorie de Liapounov

Il existe une théorie qui décrit le problème de dispersion de particules à travers les exposants de Liapounov. Cette théorie est fondée sur le théorème de Osseledec (1968) et nous allons expliquer brièvement en quoi elle consiste à partir de la revue faite par Legras et Vautard (1996). Considérons un système dynamique³ dans $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) .$$

L'équation linéaire des perturbations de ce système $\mathbf{Y} = \delta\mathbf{X}$ (appelée système linéaire tangent) est simplement

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{Y}(t) = [\nabla\mathbf{F}(\mathbf{X}(t))] \mathbf{Y}(t) .$$

Si F est suffisamment régulière, un théorème d'Osseledec (1968) affirme que :

³En fait, les résultats du théorème sont plus généraux que $\mathbb{R}^2$ mais nous ne nous intéressons ici qu'à leur aspect bidimensionnel.

- Il existe

$$\lambda = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \log \left(\frac{|\mathbf{Y}(t_2)|}{|\mathbf{Y}(t_1)|} \right)$$

qui est fini et qui prend au plus deux valeurs $\lambda_1 > \lambda_2$ qui ne dépendent pas de t_1 quand $\mathbf{Y}(t_1)$ décrit $\mathbb{R}^2$. λ_1 et λ_2 sont appelés les exposants de Liapounov. Ils correspondent au taux de croissance exponentielle des perturbations.

- Il existe un vecteur de Liapounov “forward” $\mathbf{f}_+(t_1)$ tel que sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{f}_+\mathbb{R}$ (la différence d’ensemble entre $\mathbb{R}^2$ et la droite $\mathbf{f}_+\mathbb{R}$) le taux de croissance exponentielle est λ_1 . $\mathbf{f}_+(t_1)$ correspond à la direction la plus stable, c’est-à-dire à la perturbation qui décroît le plus vite. Il existe aussi un vecteur de Liapounov “backward” $\mathbf{f}_-(t_2)$ tel que sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{f}_-\mathbb{R}$, le taux de croissance exponentielle est $-\lambda_2$ quand on retourne le temps.
- Toute perturbation aléatoire partant du temps t_1 converge vers $\mathbf{f}_-(t_2)$ quand $t_2 - t_1 \rightarrow \infty$.

Le théorème d’Osseledec donne deux aspects du chaos. D’abord la sensibilité aux conditions initiales est mesurée par des exposants de Liapounov asymptotiques, ce qui donne une information dynamique du chaos. Ensuite, les directions caractéristiques associés à ces exposants de Liapounov donnent un aspect géométrique du chaos. En effet, suivant l’orientation de la séparation initiale de deux particules, ces particules peuvent se séparer ou converger exponentiellement selon les exposants de Liapounov (Tang et Boozer 1999). La théorie ergodique d’Osseledec traite la limite temporelle asymptotique pour laquelle les exposants de Liapounov asymptotiques sont constants et les directions caractéristiques dépendent seulement de la position. Pour un temps fini, il y a un problème de convergence à la fois pour les exposants de Liapounov et pour leurs directions caractéristiques associées (Tang et Boozer 1999). La convergence des directions caractéristiques semble exponentielle (Goldhirsch et al. 1987) donc l’aspect géométrique du chaos en temps fini est bien décrit par sa limite temporelle asymptotique. Ce n’est pas le cas pour les exposants de Liapounov car ceux-ci convergent lentement.

Les conditions d’application du théorème d’Osseledec sont satisfaites pour l’étude de la dispersion de particules. $\mathbf{X}$ est la position des particules fluides, $\mathbf{F}$ est le champ de vitesse que nous appelons habituellement $\mathbf{u}$. La quantité $\mathbf{Y}$ est reliée au gradient de traceur puisque nous venons de voir qu’elle vérifie la même équation que $\mathbf{k} \times \nabla q$ (où $\mathbf{k}$ est le vecteur unitaire vertical) pour un écoulement non-divergent. On peut donc comparer les résultats du théorème avec les résultats obtenus dans le chapitre 2 de la thèse.

Considérons la situation où r est constant. Pour $r^2 \leq 1$,

- Les exposants de Liapounov λ_1 et λ_2 sont respectivement égaux à $\sigma\sqrt{1-r^2}$ et $-\sigma\sqrt{1-r^2}$. Pour $r^2 = 1$, les exposants sont nuls.
- Le vecteur de Liapounov “forward” $\mathbf{f}_+$ est égal à $(\sin(\zeta_+/2 - \phi), -\cos(\zeta_+/2 - \phi))$. La raison est que pour une direction différente du point fixe instable ζ_+ , le gradient va croître au taux exponentiel $\sqrt{1-r^2}$. Pour le point fixe instable ζ_+ , il

- va décroître au taux exponentiel $-\sqrt{1-r^2}$.
- Le vecteur de Liapounov “backward” $\mathbf{f}_-$ est égal à $(\sin(\zeta_-/2 - \phi), -\cos(\zeta_-/2 - \phi))$ pour la même raison que ζ_+ et parce que quand $\tau = t_2 - t_1 \rightarrow \infty$, ζ tend vers ζ_- .
- Nous obtenons la convergence de $\mathbf{Y}$ vers le vecteur de Liapounov “backward” (qui correspond à ζ_-) pour les perturbations qui se sont accrues (c’est-à-dire quand $t_1 \rightarrow \infty$).

Pour $r^2 > 1$, les exposants de Liapounov sont presque nuls car $\lambda \sim \lim \frac{1}{t} = 0$. À cause de cette valeur, il est plus difficile de définir des vecteurs de Liapounov.

Nous voyons que la méthode développée au cours de la thèse peut être utile pour estimer les exposants de Liapounov ainsi que le vecteur de Liapounov “backward”. Il serait intéressant de comparer notre estimation des exposants avec les exposants de Liapounov de temps fini et les vecteurs correspondants dans une simulation de turbulence bidimensionnelle.

Annexe B

Article : Lapeyre et al. (1999)

Does the tracer gradient vector align with the strain eigenvectors in 2-D turbulence? (G. Lapeyre, P. Klein and B. L. Hua), Physics of Fluids, A 11, 3729-3737.

Abstract

This paper investigates the dynamics of tracer gradient for a two-dimensional flow. More precisely, the alignment of the tracer gradient vector with the eigenvectors of the strain-rate tensor is studied theoretically and numerically. We show that the basic mechanism of the gradient dynamics is the competition between the effects due to strain and an “effective” rotation due to both the vorticity and to the rotation of the principal axes of the strain-rate tensor. A non-dimensional criterion is derived to partition the flow into different regimes : in the “strain dominated” regions, the tracer gradient vector aligns with a direction different from the strain axes and the gradient magnitude grows exponentially in time. In the “strain-effective rotation compensated” regions, the tracer gradient vector aligns with the bisector of the strain axes and its growth is only algebraic in time. In the “effective rotation dominated” regions, the tracer gradient vector is rotating but is often close to the bisector of the strain axes. A numerical simulation of 2-D turbulence clearly confirms the theoretical preferential directions in “strain” and “effective rotation dominated” regions. “Effective” rotation can be dominated by the rotation rate of the strain axes, and moreover, proves to be larger than strain rate on the periphery of vortices. Taking into account this term allows us to improve significantly the Okubo-Weiss criterion. Our criterion gives the correct behavior of the growth of the tracer gradient norm for the case of axisymmetric vortices for which the Okubo-Weiss criterion fails.

B.1 Introduction

The study of 2-D turbulence is known to be pertinent to the understanding of large-scale geophysical flows of the extra-tropical atmosphere or ocean. These large-scale flows are characterized by coherent vortices where most of the enstrophy is concentrated. The process of filamentation creates very sharp gradients of vorticity

at the edge of the vortices and produces small-scale filaments-like structures (Mariotti et al. 1994). These filaments are stretched and folded by the velocity field between the large-scale vortices. This process is the manifestation of the enstrophy cascade which knowledge in physical space is important to better understand the internal organization of the flow.

Within this context, the approach followed by many studies (Okubo 1970, Weiss 1991, Hua et Klein 1998, Protas et al. 1999) has been to examine the dynamics of vorticity gradient, or more generally, of the gradient of a tracer which is conserved along a Lagrangian trajectory; such tracer gradient obeys the same equation as vorticity gradient. The gradients dynamics allow to partition the physical space into different regions : production regions where tracer gradient norm grows exponentially and regions where the evolution of gradient norm is slow and where gradient rotation is expected.

Okubo (1970) and Weiss (1991) were the first to derive a criterion based on the eigenvalues of the velocity gradient tensor which governs the equation of the first order time derivative of the tracer gradient vector. They assumed that the velocity gradient tensor is slowly varying along a Lagrangian trajectory. However counter-examples, such as the point-vortex flow, show that a criterion involving only these eigenvalues is not sufficient. Subsequent studies (Basdevant et Philipovitch 1994, Hua et Klein 1998) have shown that the acceleration gradient tensor (or the pressure Hessian), which governs the second order time derivative of the tracer gradient vector is also an important quantity to consider, thus invalidating the assumptions of Okubo and Weiss. An alternative approach in the study of the enstrophy cascade, noted by McWilliams (1984), is to examine the exponential growth rate of the vorticity gradient norm. This growth rate depends on two quantities : the positive eigenvalue of the rate-of-strain tensor and the angle between its compressional eigenvector and the vorticity gradient. The knowledge of the eigenvalue cannot solely determine the growth rate. The determination of the orientation of the vorticity gradient with respect to the compressional eigenvector is essential in order to understand the enstrophy cascade.

A remark of Babiano et al. (1987) indicates the possible existence of some alignment properties in 2D flows : they noted that isolines of tracer and vorticity have similar orientations. These two tracers are likely to align with the same direction which depends only on the flow topology. Other studies (Gibson et al. 1988, Ohkitani et Kishiba 1995, Protas et al. 1999) have revealed a tendency for vorticity gradient to align with the compressional eigenvector. The issue of alignment with the eigenvector of the strain-rate tensor has also been extensively studied in 3D turbulence. It has been shown numerically (Ashurst et al. 1987, She et al. 1990, Ruetch et Maxey 1991, Vincent et Meneguzzi 1991) that the tracer gradient (or the vorticity vector¹) tends to align with an eigenvector of the rate-of-strain tensor. With

¹The vorticity vector verifies the same equations as $\mathbf{k} \times \nabla q$ where q is a tracer conserved along a Lagrangian trajectory and $\mathbf{k}$ is the vertical unit vector, as shown by Constantin et al. (Constantin et al. 1994).

an assumption similar to that made by Okubo and Weiss, this result for the vorticity vector can be demonstrated (Cantwell 1992), thus stressing the importance of the invariants of the velocity gradient tensor. In 2-D turbulence, a single invariant remains : the determinant of the tensor, which is the opposite of the Okubo-Weiss quantity. Recent 3-D results have revealed that the assumption is not always valid and that the pressure Hessian plays an important role (Ohkitani 1995, Nomura et Post 1998). These results show many similarities between 2-D and 3-D turbulence.

This paper revisits the question of the alignment of vorticity or tracer gradient with the eigenvectors of the rate-of-strain tensor, and more generally, the existence of a preferential direction for the gradient vector. In section 2, the equation for the orientation of tracer gradient in the strain basis is derived, following the approach of Dresselhaus et Tabor (1991) (which was also used by Dritschel et al. (1991) to examine the stability of vorticity filaments). This basis allows to take into account explicitly the part of the acceleration gradient tensor that corresponds to the rotation of the strain axes. In section 3, the orientation equation is solved assuming a stationarity property for the velocity field which is much less restrictive than the Okubo-Weiss assumption. We propose a new criterion to partition the physical space into “strain dominated” regions and “effective rotation dominated” regions, where “effective” rotation is defined as the sum of the vorticity and the rotation rate of the strain axes. Furthermore, we provide an estimation for both the direction of the gradient vector and the exponential growth rate of its norm. These results allow to characterize the tracer cascade in physical space. In section 4, the accuracy of our results is assessed through the examination of a numerical simulation of freely decaying turbulence and through analytical examples. It is shown that our criterion yields an exact solution of the growth rate of gradient norm for axisymmetric vortices (which the point-vortex belongs to) and an improved approximation of the growth rates in 2-D turbulence.

B.2 Equations for the evolution of tracer gradient

B.2.1 Magnitude and orientation

Let us consider a tracer q which is conserved along a Lagrangian trajectory in a two-dimensional flow field :

$$\frac{Dq}{Dt} \equiv \partial_t q + \mathbf{u} \cdot \nabla q = 0 , \quad (B.1)$$

where $\mathbf{u} = (u, v)$ and $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

In a more general situation, there should be a diffusive term ($\nu \nabla^2 q$) on the right hand side of (B.1). Its main effect is to weaken the gradient magnitude. We assume in this study that the dynamics of tracer gradient orientation is insensitive to this diffusive term.

The equation for the tracer gradient is

$$\frac{D \nabla q}{Dt} = -[\nabla \mathbf{u}]^* \nabla q, \quad (\text{B.2})$$

where $[\nabla \mathbf{u}]^*$ is the transpose of the velocity gradient tensor.

For what follows, some definitions have to be given :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \partial_x u - \partial_y v, & \nabla q &= \rho (\cos \theta, \sin \theta), \\ \sigma_s &= \partial_x v + \partial_y u, & (\sigma_s, \sigma_n) &= \sigma (\cos 2\phi, \sin 2\phi), \\ \omega &= \partial_x v - \partial_y u, & \text{with } \rho &\geq 0 \text{ and } \sigma \geq 0. \end{aligned}$$

The eigenvectors of the rate-of-strain matrix (the symmetric part of $[\nabla \mathbf{u}]^*$) are called the compressional and extensional strain axes. The compressional axis corresponds to the maximum growth rate of gradient norm, whereas the extensional axis corresponds to the maximum decay rate. The angle between the x -axis and the compressional axis is $-\frac{\pi}{4} - \phi$.

As (B.2) is dependent on the coordinates system, it is more convenient to separate the magnitude of the tracer gradient from its orientation :

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{D \rho^2}{Dt} = -\sigma \sin(2(\theta + \phi)), \quad (\text{B.3})$$

$$2 \frac{D \theta}{Dt} = \omega - \sigma \cos(2(\theta + \phi)). \quad (\text{B.4})$$

The r.h.s. of (B.3) indicates that the evolution of the magnitude ρ strongly depends on the angle θ between the tracer gradient and the eigenvectors of the rate-of-strain matrix. This emphasizes the importance of the orientation dynamics. By contrast, the equation (B.4) for the orientation θ does not depend on the gradient magnitude ρ .

The same equations have also been derived by Dresselhaus et Tabor (1991) and Dritschel et al. (1991). Dritschel et al. (1991) investigate the stability of a vorticity filament submitted to strain. They show that if the stretching rate γ exceeds 25% of the vorticity anomaly $\delta\omega$ (the typical vorticity contrast across the filament), the instability is completely suppressed. Another possibility to inhibit roll-up instability is the presence of adverse shear $\frac{\Lambda}{\delta\omega} < 0$ where Λ is the twisting rate. In our notations, these quantities are simply :

$$\gamma \equiv \frac{1}{\rho} \frac{D \rho}{Dt} = -\frac{\sigma}{2} \sin \zeta, \quad \Lambda \equiv 2\dot{\theta} - \omega = -\sigma \cos \zeta.$$

Dritschel (1993) uses these diagnostics in a simulation of 2-D turbulence where he shows that most of the vorticity filaments behave passively. A prediction of the orientation of the vorticity gradient would lead to a better identification of the regions where vorticity filaments should remain passive. The important role played by the rotation of the strain-rate axes relatively to vorticity, was not stressed by Dritschel *et al.* (Dritschel et al. 1991, Dritschel 1993). In contrast, in the present paper, we provide evidence that it allows to better characterize the stirring properties in physical space.

B.2.2 Orientation in strain coordinates

In order to simplify (B.4), we define :

$$\zeta = 2(\theta + \phi) \quad \text{and} \quad \tau = \int_0^t \sigma(s) ds . \quad (\text{B.5})$$

We expect the orientation ζ to be a continuous function of time, so its values are to be taken in $[-\infty, \infty]$ and not in $[0, 2\pi]$. It is related to the angle between the tracer gradient and the strain axes : a value of $\frac{\pi}{2}$ (respectively $-\frac{\pi}{2}$) stands for an alignment with the compressional (resp. extensional) axis. τ is related to the strain-rate history experienced by a fluid particle (t is here the Lagrangian time). The typical time for the process of alignment is thus given by the inverse of the rate-of-strain and is much shorter than the time taken for the diffusion to act if it were present. Equation (B.4) becomes a simple first order O.D.E. :

$$\frac{D\zeta}{D\tau} = r - \cos \zeta , \quad (\text{B.6})$$

with $r = \frac{\omega}{\sigma} + 2 \frac{D\phi}{D\tau} = \frac{\omega + 2 \frac{D}{Dt}\phi}{\sigma} .$

The dimensionless parameter r is the ratio between “effective” rotation (in the terminology of Dresselhaus et Tabor (1991)) in the strain basis (i.e. the rotation effects due to both the vorticity and the rotation of the principal axes of the strain-rate tensor) and the magnitude of the strain rate (which tends to align the gradient with a strain eigenvector).

The Lagrangian time derivative of ϕ is simply related to the Lagrangian time derivatives of σ_n and σ_s :

$$2 \frac{D\phi}{Dt} = \frac{\sigma_s \frac{D\sigma_n}{Dt} - \sigma_n \frac{D\sigma_s}{Dt}}{\sigma_n^2 + \sigma_s^2} .$$

These quantities can be expressed as functions of the Lagrangian acceleration gradient tensor. In two dimensions, the Lagrangian acceleration is equal to the pressure gradient, and the quantities to examine are given by

$$\frac{D\sigma_n}{Dt} = -(\partial_{xx} - \partial_{yy})p , \quad (\text{B.7a})$$

$$\frac{D\sigma_s}{Dt} = -2\partial_{xy}p , \quad (\text{B.7b})$$

where p is the pressure.

Basdevant et Philipovitch (1994) and Hua et Klein (1998) have shown that $\frac{1}{\sigma} \frac{D\sigma}{Dt}$ and $\frac{D\phi}{Dt}$ are of the same order of magnitude as σ and ω (involved in the Okubo-Weiss criterion). Thus their effects need to be included to obtain the exact gradient dynamics. Here our main assumptions are that (i) the parameter r and (ii) the rate of strain σ are slowly varying along a Lagrangian trajectory. This allows to solve (B.6) and to recover t from τ . Thus we focus our attention on the competition between strain and “effective” rotation by taking into account the role of the rotation of the strain axes ($\frac{D\phi}{Dt}$) but we neglect $\frac{1}{\sigma} \frac{D\sigma}{Dt}$.

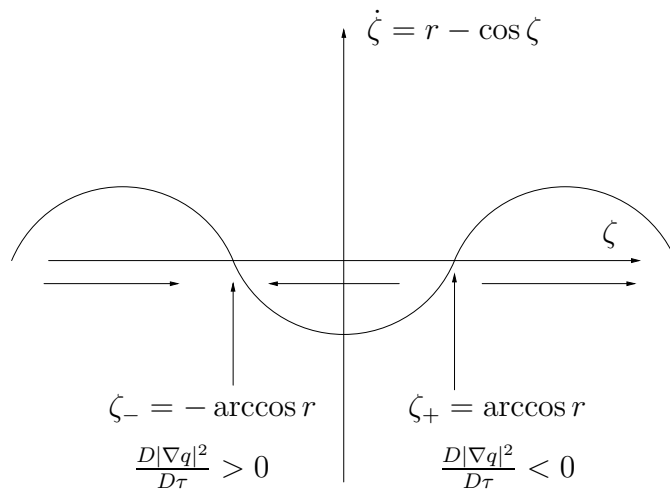


Figure B.1: Diagram of the behavior of ζ for $r^2 < 1$.

B.3 Dynamics of the gradient orientation

B.3.1 Different regimes of evolution

A first examination of (B.6) (Fig. B.1) shows that

- if $r^2 < 1$, there are two fixed points, one stable ζ_- and one unstable ζ_+ . Moreover ζ should converge to the stable fixed point ζ_- ,
- if $r^2 > 1$, $\frac{D\zeta}{D\tau} = r - \cos \zeta \sim r$ and ζ should grow quasi-linearly in time.

We recognize a partition of the flow similar to the partition of Okubo (1970) and Weiss (1991) into hyperbolic (or “straining”) regions ($r^2 < 1$) and elliptic (or “eddy”) regions ($r^2 > 1$). The main difference is that we take into account the rotation of the strain axes.

The general solutions of (B.3) and (B.6) for the three regimes $r^2 < 1$, $r^2 = 1$ and $r^2 > 1$ are now presented.

B.3.1a “Strain dominated” regions : $r^2 < 1$

The general solution is :

$$\zeta(\tau) = -2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-r}{1+r}} \tanh \left(A + \frac{\tau \sqrt{1-r^2}}{2} \right) \right) , \quad (\text{B.8})$$

$$\rho^2(\tau) = \rho_0^2 \frac{r + \cosh(2A + \tau \sqrt{1-r^2})}{r + \cosh(2A)} . \quad (\text{B.9})$$

Here the constant A is the same for the two equations and depends on the initial orientation of the tracer gradient.

The gradient orientation converges to the direction²

$$\zeta_- = -\arccos r , \quad (\text{B.10})$$

²Note that if $r = \cos 2\gamma$ then $\sqrt{\frac{1-r}{1+r}} = |\tan \gamma|$.

exponentially fast. This preferential direction corresponds to a stable fixed point and does not depend on the initial direction of the gradient vector. This direction is different from the strain eigenvectors except for $r = 0$. However the two fixed directions are related to the eigenvectors of the velocity gradient tensor seen in the strain basis as proven in B.A. This alignment is associated with an exponential gradient growth with a dimensional rate $\sqrt{\sigma^2 - (\omega + 2\frac{D\phi}{Dt})^2}$. This regime should correspond to regions where particles are expelled very rapidly, for instance in the saddle points of the flow.

B.3.1b “Strain-effective rotation compensated” regions : $r^2 = 1$

The general solution is :

$$\zeta(\tau) = \frac{\pi}{2}(1 + r) + 2 \arctan(A + r\tau) \quad , \quad (\text{B.11})$$

$$\rho^2(\tau) = \rho_0^2 \frac{1 + (A + r\tau)^2}{1 + A^2} \quad . \quad (\text{B.12})$$

The gradient orientation converges to the direction

$$\zeta_- = \frac{1 - r}{2} \pi \quad , \quad (\text{B.13})$$

which makes an angle of $\pi/4$ with the strain axes. The convergence is slower than for the preceding regime. It is associated with an algebraic growth of the gradient magnitude. This process of slow growth could maintain sharp gradients of tracer as in the case of axisymmetric vortices and shear flows (these cases are studied in section B.4.2).

B.3.1c “Effective rotation dominated” regions : $r^2 > 1$

The general solution is :

$$\zeta(\tau) = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{r-1}{r+1}} \tan \left(A + \text{sign}(r) \frac{\sqrt{r^2-1}}{2} \tau \right) \right) \quad , \quad (\text{B.14})$$

$$\rho^2(\tau) = \rho_0^2 \frac{r + \cos(2A + \text{sign}(r)\tau\sqrt{r^2-1})}{r + \cos(2A)} \quad . \quad (\text{B.15})$$

Actually (B.14) is quasi linear in time (remember that ζ is a continuous function of time) : $\zeta \sim \text{sign}(r) \tau \sqrt{r^2-1}$. This means that the gradient vector is rotating in the strain basis because of either the rotation of the strain axes or the effect of vorticity. In the coordinates (x, y) , the dimensional rotation rate is : $(\omega + 2\frac{D\phi}{Dt})\sqrt{1 - r^{-2}} - 2\frac{D\phi}{Dt}$. Thus, for large values of r , the gradient rotates at the angular velocity ω .

However, there is a preferential direction :

$$\zeta_{prob} = \frac{1 - \text{sign}(r)}{2} \pi \quad . \quad (\text{B.16})$$

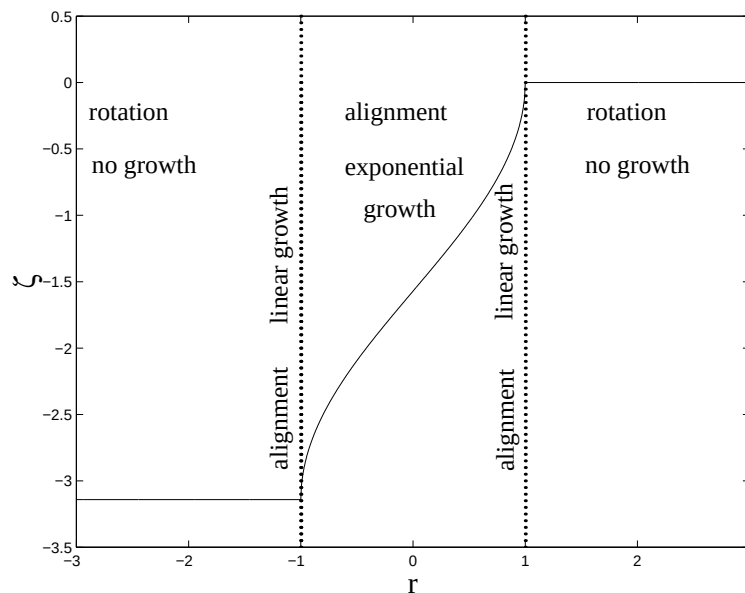


Figure B.2: Preferential direction ζ and nature of the dynamics of gradient as a function of r .

The reason for the existence of this direction is that when $\zeta = \zeta_{prob}$, $|\frac{D\zeta}{D\tau}|$ is minimum. So the tracer gradient spends more time near this direction than near other directions and, on time average, the gradient direction will lie near ζ_{prob} . Moreover, according to (B.15), the gradient magnitude remains bounded. This situation should correspond to the cores of vortices or regions of rapid strain axes rotation.

B.3.2 Criterion to partition the flow

According to the preceding results, the criterion r allows to partition the fluid in three regimes with different properties concerning the tracer gradient evolution :

1. if $r^2 < 1$, the effects of strain dominate. The gradient orientation ζ converges to the direction $\zeta_- = -\arccos r$; the gradient magnitude grows exponentially in time at the non-dimensional rate $\sqrt{1-r^2}$.
2. if $r^2 = 1$, the effects of strain and “effective” rotation balance each other. The direction tends to $\zeta_- = \frac{1-r}{2} \pi$ which is the bisector of the strain axes. The magnitude of the gradient grows only algebraically in time.
3. if $r^2 > 1$, “effective” rotation dominates. The direction rotates in the reference frame of the strain axes because of the rotation due to vorticity and of the rotation of the strain axes. However the most probable direction is $\zeta_{prob} = \frac{1-\text{sign}(r)}{2} \pi$ which makes an angle of $\pi/4$ with the strain axes. The non-dimensional rotation rate is $\sqrt{r^2-1}$ in the strain coordinates. The magnitude of the gradient does not grow nor decay.

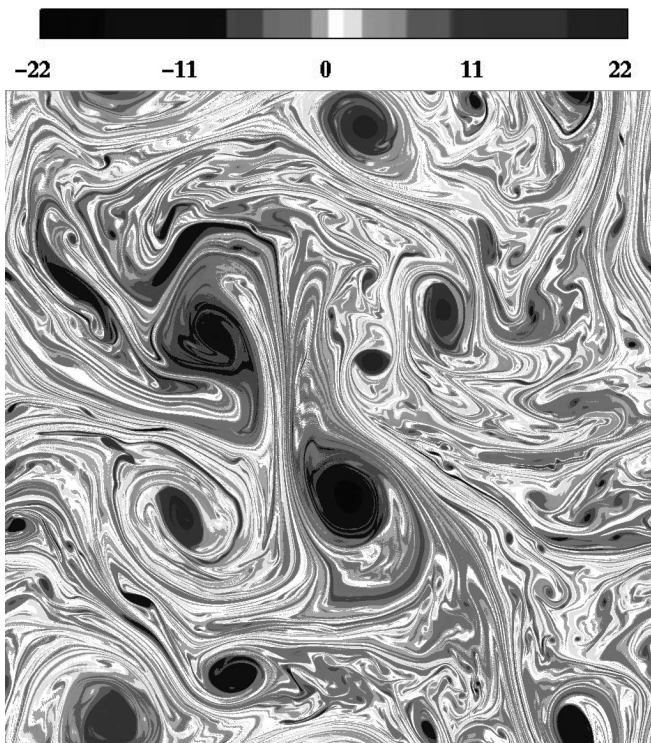


Figure B.3: Vorticity ω . Dark regions represent vorticity extrema.

Figure B.2 summarizes the different regimes of the gradient dynamics and the preferential directions as a function of r . An approach based on the eigenvalues of the velocity gradient tensor expressed in the strain basis gives the same results (see B.A).

B.4 Numerical and analytical results

B.4.1 Freely decaying turbulence

We diagnose a numerical simulation of freely decaying turbulence at a resolution of 1024×1024 using a pseudo-spectral code (see Hua et Klein (1998) for more details). There is a Newtonian viscosity such that the Reynolds number is 3.5×10^4 . It should not affect the gradient orientation dynamics as the following results seem to indicate. The flow exhibits the emergence of coherent structures together with a strong filamentation in the vorticity field (Fig. B.3).

The probability density function for r (Fig. B.4, curve A) presents a slight asymmetry between positive and negative values of r with a plateau between -1 and 1 . Strong vorticity gradients (which represent 2% in area as indicated in the figure caption) seem to prefer regions where $r^2 = 1$ (curve B), a result which stresses the

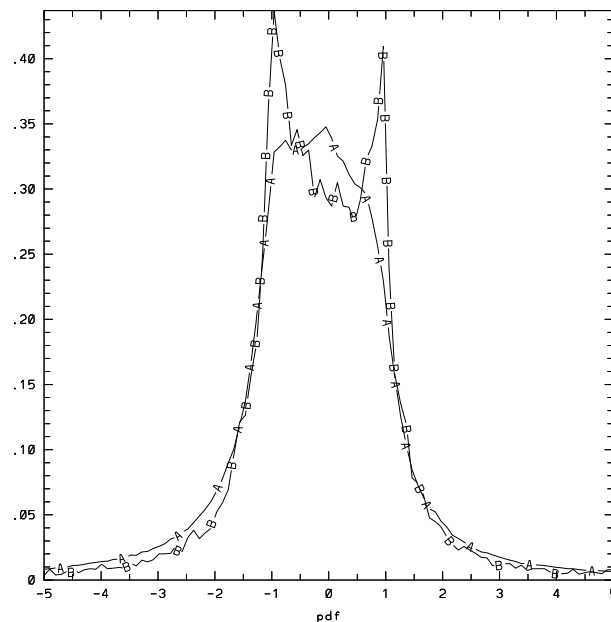


Figure B.4: p.d.f. of r , A : total field, B : for $|\nabla q| > 600$ (2%).

dominance of this regime. The fraction of hyperbolic regions (defined as $r^2 < 1$) represents 59% of the total field. The asymmetry between the area of elliptic and hyperbolic regions was also noted by Protas et al. (1999) but based on the Okubo-Weiss definition (i.e. without the rotation of the strain axes).

The key result of this study is displayed on Figs. B.5a and B.5b which compare the alignments of the vorticity gradient vector with the compressional strain axis and with the direction given by the preferential directions ζ_- (eq. (B.10)) and ζ_{prob} (eq. (B.16)). We concentrate on regions with strong gradients because pdfs are sharper there but the results also hold for the entire field (not shown). The alignment with the compressional axis in the regime $r^2 \leq 1$ is represented by curve A on Fig. B.5a. A value of 0 (respectively $\pm\pi$) corresponds to the case where the vorticity gradient is aligned with the compressional (resp. extensional) axis. There is a weak tendency for alignment with the compressional axis. However experimental results reveal a much better alignment of the vorticity gradients with the direction corresponding to the stable solution ζ_- of eq. (B.10) (curve B). In the regime $r^2 > 1$ (Fig. B.5b), the gradient orientation (curve A) exhibits a weak preference for no exponential growth ($\sin \zeta \sim 0$). On contrast, curve B shows that gradients are close to the most probable direction ζ_{prob} (eq. (B.16)). The comparison of the curves B of Figs. B.5a and B.5b reveals a narrow peak for $r^2 \leq 1$ and a broader one for $r^2 > 1$. This could point out the existence of a mechanism of alignment in regime $r^2 \leq 1$ and the absence of such a mechanism in regime $r^2 > 1$. Figures B.5a and B.5b confirm that our analytical solution reproduces rather well the basic features of vorticity gradient dynamics.

Figure B.6 presents the joint p.d.f. of $\zeta + \pi/2$ and r , the bold curve is $\cos \zeta$. The relation $\cos \zeta \sim r$ is well corroborated and this strongly validates the analytical

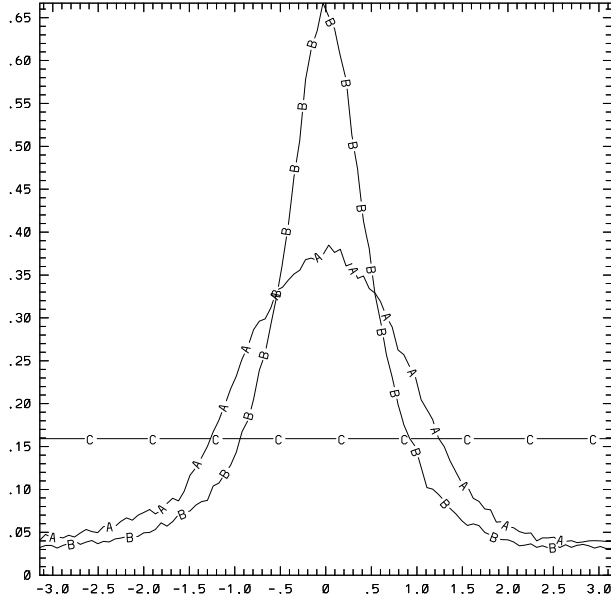


Figure B.5a : alignment p.d.f. for $|\nabla q| > 200$ and $r^2 \leq 1$ (17%), A : of $\zeta + \pi/2$, B : of $\zeta - \zeta_-$, C : equi-partitioned p.d.f.

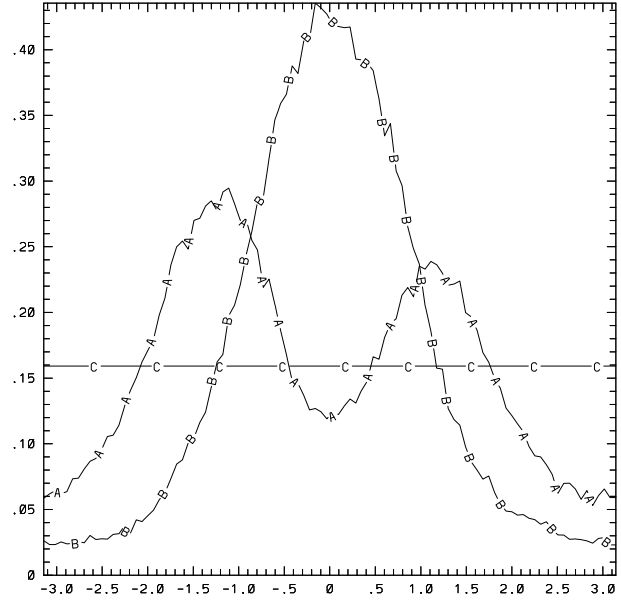


Figure B.5b : alignment for $|\nabla q| > 200$ and $r^2 > 1$ (10%), A : p.d.f. of $\zeta + \pi/2$, B : p.d.f. of $\zeta - \zeta_{prob}$, C : equi-partitioned p.d.f.

solution. A joint p.d.f. between ζ and ω/σ (not shown) does not present such a correlation, thus further emphasizing the quantitative importance of the rotation of the strain axes.

For $r^2 < 1$, the area of regions of gradient norm decay represents only 36% of the total area. These regions are generally associated with the alignment with the unstable direction $\zeta_+ = +\arccos r$ (not shown). This alignment is not as strong as with ζ_- in regions of growth.

Now we can examine the distributions of vorticity ω , the parameter r and the exponential gradient growth rate $-\sigma \sin \zeta$ in physical space (Figs. B.7a, B.7b and B.7c) to understand their importance. We focus our attention on a single vortex as all vortices display a similar behavior. Figure B.7a presents the vorticity contours of the anticyclonic vortex close to the center of Fig. B.3. The core of the vortex is surrounded by filaments peeled out as described by Mariotti et al. (1994). Some are expelled far away from the vortex.

Figure B.7b represents the field of r . At first glance, we see that r is a good index for the characterization of the topology of vortices since the different dynamical regimes (corresponding to different values of r) are well separated in physical space. The vortex core is a region with $r < -1$ because of large ω . The vortex periphery is composed of regions with $r^2 < 1$ because of large σ and regions with $r > 1$ because of large $\frac{D\phi}{Dt}$. For each vortex, we observe opposite signs of r between its core and the part on its periphery where “effective” rotation is strong. In these regions, $\omega + 2\frac{D\phi}{Dt}$ is dominated by $2\frac{D\phi}{Dt}$ which is of opposite sign of ω . This indicates that

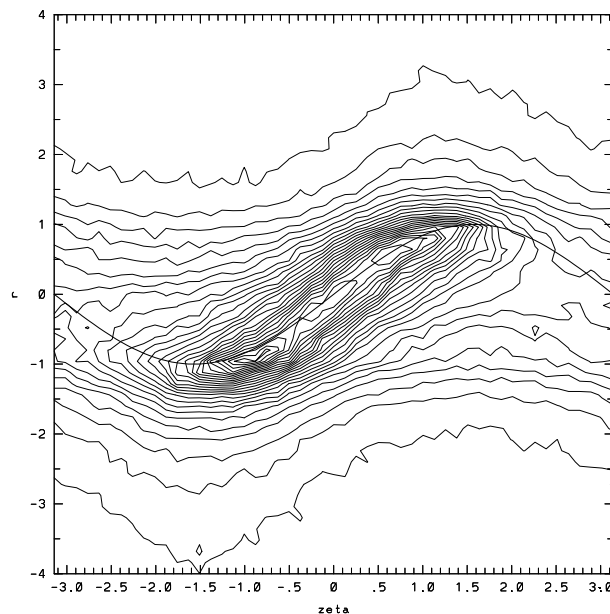


Figure B.6: joint p.d.f. of $\zeta + \pi/2$ and r (total field); the bold curve is $\cos \zeta$.

a characterization of the stirring properties of vortices must take into account this rotation rate.

A comparison with the exponential gradient growth rate $\sigma \sin \zeta$ (Fig. B.7c) reveals that the regions of maximum exponential growth or decay rate are characterized by $r^2 < 1$. Regions of gradient norm growth are contiguous to regions of decay, and these two types of regions are well separated by sharp fronts. The small growth rates on the vortex edge are associated with strong values of the parameter r . Finally, the core of the vortex presents strong growth of gradient, and other mechanisms like diffusion may play a role there.

B.4.2 Analytic examples

To stress the physical importance of the regime $r^2 = 1$, we examine two analytical examples which are solutions of the Euler equations.

B.4.2a Axisymmetric vortices

Consider an axisymmetric vortex, that is a flow with a streamfunction $\psi(R)$ where $R^2 = x^2 + y^2$. Particles are rotating at the angular velocity $\Omega = -\frac{1}{R} \frac{d\psi}{dR}$. The rate of strain is $\sigma = \left| \frac{1}{R} \frac{d\psi}{dR} - \frac{d^2\psi}{dR^2} \right|$ while the vorticity is $\omega = \frac{1}{R} \frac{d\psi}{dR} + \frac{d^2\psi}{dR^2}$. Analytical solutions

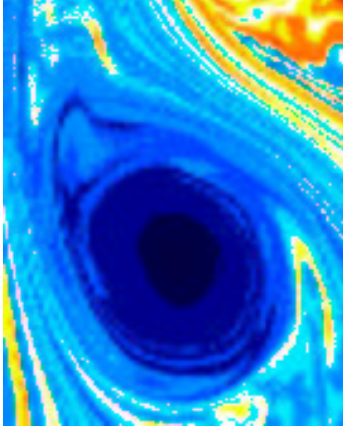


Figure B.7a : Vorticity ω .

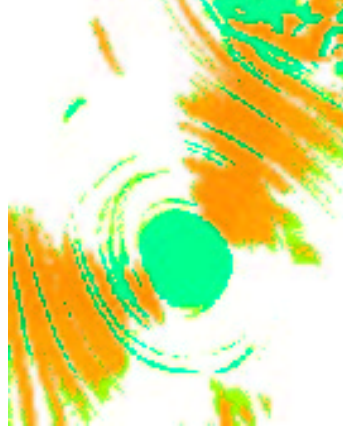
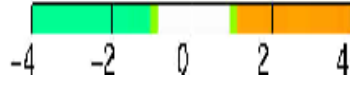


Figure B.7b : Criterion $r = (\omega + 2\frac{D\phi}{Dt})/\sigma$.

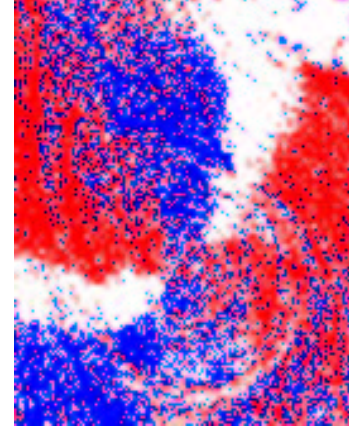
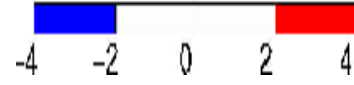


Figure B.7c : Exponential gradient growth rate $-\sigma \sin \zeta$.

for tracer gradient are :

$$\rho = \rho_0 \sqrt{\frac{1 + (A + r\sigma t)^2}{1 + A^2}} , \quad (\text{B.17})$$

$$\zeta = \frac{\pi}{2}(1 + r) + 2 \arctan(A + r\sigma t) , \quad (\text{B.18})$$

$$\text{with } r = \text{sign} \left(\frac{d^2\psi}{dR^2} - \frac{1}{R} \frac{d\psi}{dR} \right) = \pm 1 . \quad (\text{B.19})$$

The orientation ζ tends to $\frac{1-r}{2} \pi$ so gradients become more and more radial : they rotate in physical space to follow the rotation of the strain axes. Moreover their magnitude is linearly increasing with time.

The Okubo-Weiss criterion is $\lambda_0 = \sigma^2 - \omega^2 = -2\frac{1}{R} \frac{d\psi}{dR} \frac{d^2\psi}{dR^2}$. Thus the criterion is either positive which indicates hyperbolic regions, or negative which indicates elliptic regions, according to the definitions given by Weiss. But the flow is neither elliptic nor hyperbolic since the gradient growth is only linear in time ; this behavior occurs because of the rotation of the strain axis : $\frac{D\phi}{Dt} = -\frac{1}{R} \frac{d\psi}{dR}$, which is not taken into account by the Okubo-Weiss criterion and this criterion is therefore incorrect. On the contrary, the value of our criterion ($r = \pm 1$) predicts the alignment dynamics and the linear growth of tracer gradients.

B.4.2b Shear flows

Consider a shear flow such that $(u, v) = (u(y), 0)$. The rate of strain is $\sigma = \left| \frac{du}{dy} \right|$ and the vorticity $\omega = -\frac{du}{dy}$. This flow is similar to the previous one because the behavior of tracer gradient is :

$$\rho = \rho_0 \sqrt{\frac{1 + (A + r\sigma t)^2}{1 + A^2}} , \quad (\text{B.20})$$

$$\zeta = \frac{\pi}{2}(1 + r) + 2 \arctan(A + r\sigma t) , \quad (\text{B.21})$$

$$\text{where} \quad r = \text{sign} \left(-\frac{du}{dy} \right) = \pm 1 . \quad (\text{B.22})$$

The gradients tend to be oriented perpendicularly to the flow. Here the strain axes are fixed : $\frac{D\phi}{Dt} = 0$. So both the Okubo-Weiss criterion ($\lambda_0 = 0$) and our criterion ($r^2 = 1$) indicate a linear growth of gradient norm : the main difference between these criteria is that r provides an estimation of the orientation of the gradient vector and the growth rate of its amplitude.

B.5 Conclusion

We can answer the question asked in the title of this paper : both the analytical and numerical results of this study show that the tracer gradient vector does not preferentially align with strain eigenvectors. There exists a preferential direction depending only on the flow topology which has been estimated analytically.

The analytical solutions have revealed that the main mechanism of the tracer gradient dynamics is a response to the competition between strain and “effective” rotation (i.e. the rotation effects due to both the vorticity and the rotation of the principal axes of the strain-rate tensor). This competition leads to preferential directions that are different from the strain axes. We have derived a criterion based on the parameter r to describe the flow topology in terms of tracer gradient evolution. This parameter measures the competition between strain and “effective” rotation. When strain dominates or is equal to “effective” rotation ($r^2 \leq 1$), the tracer gradient aligns with an eigenvector of the velocity gradient tensor expressed in the strain basis. The gradient norm growth is exponential when strain dominates ($r^2 < 1$), and linear when there is compensation $r^2 = 1$. When “effective” rotation dominates ($r^2 > 1$), the gradient vector only rotates, but with a tendency to align with the direction ζ_{prob} .

The numerical simulation clearly confirms that the competition mechanism is the main feature of alignment dynamics. The gradients are statistically well aligned with the estimated preferential directions. The criterion r allows to partition the flow into regions of exponential growth and regions of slow or no growth. Moreover the different patterns of the flow are well diagnosed by this criterion.

The preferential directions found in each regime allow us to estimate roughly the true stretching rate (i.e. the exponential growth rate), and thus to better precise

the topology of the stirring. Moreover these results have revealed that the alignment properties of the tracer gradient vector do not depend on either the gradient magnitude or the orientation history. This explains why different tracer fields display strong gradients at the same locations and why their isolines are quite similar, as previously noted by Babiano et al. (1987) in their experiments.

Another important factor in tracer gradient dynamics is the rotation of the strain axes. Taking into account this term in the “effective” rotation effects allows a much better characterization of the stirring properties. An illustration of this point is that our criterion gives the correct behavior for tracer gradient for axisymmetric flows for which the Okubo-Weiss criterion is known to fail. The numerical simulation have also revealed that the rotation rate of the strain axes can be the predominant term of the “effective” rotation on the periphery of vortices. The reason is that the rotation of the strain axis is a part of the acceleration gradient tensor. The crucial role played by the Lagrangian accelerations for the stirring properties has been stressed by the work of Hua et Klein (1998) and Hua et al. (1998). Even though we neglect the other part of the acceleration gradient tensor (that involves the Lagrangian time derivative of the strain rate), we obtain robust results since they have been confirmed by the numerical simulation and the analytical examples. It should be interesting to assess the effect of this other part, which requires a different approach. Such work is under progress (Klein et al. 2000).

The Lagrangian accelerations also play a key role for the stirring properties of more realistic flows as the quasi-geostrophic (QG) ones (Hua et al. 1998). In such QG flows, not only the ageostrophic pressure (as in the 2-D flows of the present study, see eq. (B.7)) but also additional terms such as the beta effect and the divergence potential are present in the Lagrangian accelerations (Hua et al. 1998). So future work should aim to extend the results of the present study to more realistic flows by considering the effects of these additional terms.

Finally, the role of diffusion on the alignment properties needs to be examined. Preliminary results indicate that their effect on alignment properties appear to be weak. This is also confirmed in this paper by the comparison of the inviscid analytical results with a numerical simulation that involves a Newtonian viscosity.

Appendix B.A Eigenvalue problem

It is interesting to associate the O.D.E. approach of this paper with the eigenvalue approach of Okubo (1970), Weiss (1991) and Hua et Klein (1998) because this latter approach can give the same kind of information. We start from the equation :

$$\frac{D\nabla q}{Dt} = -[A]\nabla q, \quad (\text{B.23})$$

where $[A]$ is the transpose of the velocity gradient tensor. A change of basis allows to study more carefully this problem. The transform of orthonormal basis corresponds to a rotation of the gradient :

$$\nabla q = R(\varphi)\mathbf{Y}. \quad (\text{B.24})$$

Here $R(\varphi)$ is the rotation matrix of angle φ which will be defined later :

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (\text{B.25})$$

Now we decompose $[A]$ in symmetric and antisymmetric parts :

$$A = S + \frac{\omega}{2} R\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad (\text{B.26})$$

where $[S]$ is the rate-of-strain matrix. The problem reduces into :

$$\frac{D\mathbf{Y}}{Dt} = - \left(R(-\varphi) S R(\varphi) + \left(\frac{D\varphi}{Dt} - \frac{\omega}{2} \right) R\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \mathbf{Y}. \quad (\text{B.27})$$

We can diagonalize $[S]$ with the appropriate φ ; it suffices to write it as :

$$S = \frac{\sigma}{2} \begin{pmatrix} \sin 2\phi & \cos 2\phi \\ \cos 2\phi & -\sin 2\phi \end{pmatrix}. \quad (\text{B.28})$$

Taking $\varphi = \frac{\pi}{4} - \phi$, the tracer gradient in strain basis verifies :

$$\frac{D\mathbf{Y}}{Dt} = \frac{\sigma}{2} \begin{pmatrix} -1 & -r \\ r & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}. \quad (\text{B.29})$$

The eigenvalues and eigenvectors of the matrix present in this equation are :

$$\mathbf{e}_1 = (-\cos \vartheta, \sin \vartheta) \quad \text{associated with} \quad \lambda_1 = -\frac{\sigma}{2} \sqrt{1-r^2}, \quad (\text{B.30})$$

$$\mathbf{e}_2 = (-\sin \vartheta, \cos \vartheta) \quad \text{associated with} \quad \lambda_2 = \frac{\sigma}{2} \sqrt{1-r^2}. \quad (\text{B.31})$$

Here $\vartheta = \frac{\pi}{4} - \frac{\arccos r}{2}$. If r^2 is greater than 1, the eigenvalues are purely imaginary.

For $r^2 < 1$, it is straightforward to see that $\mathbf{e}_1$ corresponds to $\zeta = \arccos r = \zeta_+$ and $\mathbf{e}_2$ to $\zeta = -\arccos r = \zeta_-$. So the eigenvectors and the eigenvalues of the velocity gradient tensor in the strain basis give the same information as our results. However they are only a mean to know the dynamics of tracer gradients : they do not explain why this is the correct behavior. The approach of solving the O.D.E. enables to shed more light on the tracer gradient dynamics while the eigenvalue problem is useful to identify the role of the time evolving quantities as σ or r .

Annexe C

Article : Klein et al. (2000)

Alignment of tracer gradient vector in two-dimensional turbulence using second order Lagrangian dynamics (P.Klein, B. L. Hua and G. Lapeyre). Physica D, sous presse.

abstract

This numerical study examines the stirring properties of a 2-D flow field with a specific focus on the alignment dynamics of tracer gradient vectors. In accordance with the study of Hua et Klein (1998), our approach involves the full second-order Lagrangian dynamics and in particular the second order in time equation for the tracer gradient norm. If the physical space is partitioned into strain-dominated regions and “effective” rotation-dominated regions (following a criterion defined by Lapeyre et al. (1999)), the new result of this study concerns the “effective” rotation-dominated regions : it is found, from numerical simulations of 2-D turbulence, that the tracer gradient vector statistically aligns with one of the eigenvector of a tensor that comes out from the second order equation and is related to the pressure Hessian. The consequence is that, in those regions, the observed exponential growth or decay of the tracer gradient vector can be predicted contrary to previous results which implied zero growth and only a rotation of this vector. This result strongly emphasizes the important role of the time evolution of the strain rate amplitude which, with the rotation of the strain tensor, significantly contribute to the alignment dynamics. Both effects are related to the anisotropic part of the pressure Hessian, which emphasizes the non-locality of the mechanisms involved. These results are reminiscent of those recently obtained by Nomura et Post (1998) for 3-D turbulence.

C.1 Introduction

It is well known that the properties of large scale geophysical flows can be understood through the study of 2-D turbulent flow fields. Within this context one important issue concerns their stirring and mixing properties (Provenzale 1999). The question is how to identify the regions of physical space where the turbulent cascade is the most active through the production of tracer gradients. To address this ques-

tion, several studies have focused on the deformation of a tracer field through the dynamics of its gradients (Okubo 1970, Weiss 1981, McWilliams 1984, Basdevant et Philipovitch 1994, Hua et Klein 1998, Hua et al. 1998, Hua et al. 2000). This approach has also been intensively used for 3-D turbulent flow field to understand the accumulation of vorticity in thin sets (Ohkitani et Kishiba 1995, Galanti et al. 1997).

For 2-D turbulence, Okubo (1970) and Weiss (1981) were the first to derive a kinematic criterion, based on the first order equation for the gradient vector, to separate “straining regions” where the motions strongly shear the vorticity or a passively advected tracer from “eddy regions” where motions advect the vorticity or tracer smoothly. However counterexamples, such as the point vortex flow, suffice to show that this criterion is not generally indicative of the growth rate of the gradients (Pierrehumbert et Yang 1993). An alternative to examine the tendency towards a turbulent cascade is to consider the first order equation for the tracer gradient norm that involves the magnitude of the strain rate (known in terms of the velocity field) and the geometrical alignment of the tracer gradient vector with the eigenvectors of the strain rate tensor (McWilliams 1984, Provenzale 1999). Thus the effectiveness of the turbulent cascade crucially depends on the alignment properties which need to be estimated.

One interesting property of the alignment dynamics, which stimulates our study, is that the orientation of the tracer gradient vector appears to be determined only by the recent history (Batchelor 1959, Balluch et Haynes 1997). This means that over a few strain rate scales, an equilibrium should be attained. Some studies (Ohkitani 1995, Protas et al. 1999) have revealed a tendency for the vorticity gradient vector to align with the compressional strain eigenvector. Lapeyre et al. (1999) have recently revisited the question of the existence of a preferential direction for the tracer gradient. Their results show that the alignment dynamics is a response to a competition between the strain effects and the “effective” rotation (i.e. the sum of vorticity and rotation of the axes of the strain rate tensor) effects. This has led to define a criterion to separate strain-dominated regime from “effective” rotation-dominated regime. Their results represent a substantial improvement to the Okubo-Weiss criterion since an exact analytical solution is found for the class of axisymmetric vortices (which the point vortex belongs to) that lies between these two regimes. Furthermore for the strain-dominated regime, they proposed an exact steady solution for the alignment which is distinct from the compressional eigenvector of the strain tensor. This solution was shown to predict more accurately the tracer gradient orientation than those involving only the compressional eigenvector of the strain tensor. However, for the “effective” rotation-dominated regime, their solution predicts no growth of the tracer gradient, which was found to be less statistically robust.

The original point of Lapeyre et al. (1999) is to take into account explicitly the rotation of the axes of the strain rate tensor. This quantity cannot be deduced directly

from the local velocity field whereas the vorticity and strain rate are expressed in terms of the local velocity field. Actually this quantity is a nonlocal quantity which requires to consider the Lagrangian acceleration gradient tensor (equal to the pressure Hessian for a 2-D flow), i.e. to consider the second order Lagrangian dynamics. This emphasizes the non local character of the stirring properties and the important role of the pressure Hessian that has already been highlighted in Basdevant et Philipovitch (1994) and Hua et Klein (1998). This role of the pressure Hessian on the stirring properties has also been well emphasized by recent analytical and numerical results in 3-D turbulence (Ohkitani et Kishiba 1995, Galanti et al. 1997, Tsinober et al. 1999). However the solutions derived in Lapeyre et al. (1999) use only a part of the information contained in the pressure Hessian since they do not involve the time evolution of the magnitude of the strain rate. Our conjecture, based on our previous studies in 2-D turbulence (Hua et Klein 1998) and on more recent results in 3-D turbulence (Nomura et Post 1998), is that the full consideration of the pressure Hessian should improve the solutions already proposed, in particular for the “effective” rotation-dominated regions. Indeed Fig.18 of Nomura et Post (1998) shows that in the rotation-dominated regions of a 3-D turbulent flow field the gradient vector aligns preferentially with one of the eigenvectors of the pressure Hessian.

Consequently this paper reexamines the alignment properties of tracer gradients in a 2-D flow field with the consideration of the full second order Lagrangian dynamics by using the first two order time derivatives equations for the tracer gradient. A rationalization of this approach, based on a Taylor series expansion, has been given by Ohkitani et Kishiba (1995). Following the recent results of Nomura et Post (1998), a specific purpose of our study is to investigate whether the eigenvectors of the tensor involved in the second order equation represent a preferential direction for the tracer gradient vector in the “effective” rotation-dominated regime. Our approach is developped and discussed in the next two sections. Its potentialities are assessed in section 4 from numerical experiments of 2-D decaying turbulence. For the sake of simplicity, our approach is developped within the context of the 2-D Euler equations since the addition of viscosity makes the analytical problem difficult to interpret. However the numerical experiments result from the integration of the Navier-Stokes equations with the inclusion of a Newtonian viscosity. The conclusions are summarized in section 5.

C.2 Second order Lagrangian approach of alignment dynamics

Let us consider a tracer field q conserved on a Lagrangian trajectory :

$$\frac{dq}{dt} = 0, \quad (\text{C.1})$$

where $\frac{d}{dt}(\) = \frac{\partial(\)}{\partial t} + u\frac{\partial(\)}{\partial x} + v\frac{\partial(\)}{\partial y}$, with u, v respectively the zonal and meridional components of the 2-D velocity field.

The approach used in Hua et Klein (1998) to study the deformation of the tracer field was to consider the equations of the first and second orders in time for the tracer gradient vector. The first equation involves the velocity gradient tensor and the second one the pressure Hessian (see appendix A). In this study, we use a slightly different approach : we consider the first two order time derivative equations of the *norm* of the tracer gradient instead of those for the gradient vector. The main argument for this choice is that these equations are independent of the coordinates system and allow to focus on the geometrical alignment of the tracer gradient vector. Defining $|\nabla q|^2 \equiv \nabla q^* \nabla q$, with $*$ denoting the transpose, we obtain :

$$\frac{d}{dt} |\nabla q|^2 = -2 \nabla q^* \mathbf{S} \nabla q, \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{d^2}{dt^2} |\nabla q|^2 = \nabla q^* \mathbf{N} \nabla q; \quad (\text{C.3})$$

with :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_n & \sigma_s \\ \sigma_s & -\sigma_n \end{bmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \sigma_n^2 + \sigma_s^2 - \omega \sigma_s - \frac{d\sigma_n}{dt} & \omega \sigma_n - \frac{d\sigma_s}{dt} \\ \omega \sigma_n - \frac{d\sigma_s}{dt} & \sigma_n^2 + \sigma_s^2 + \omega \sigma_s + \frac{d\sigma_n}{dt} \end{bmatrix}; \quad (\text{C.5})$$

where ω , σ_n and σ_s are respectively the vorticity and the normal and shear strain rates defined as : $\omega \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, $\sigma_n \equiv \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$ and $\sigma_s \equiv \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$. Note that in 2-D turbulence, the vorticity ω is a tracer that verifies (C.1).

The first equation (C.2) involves the strain tensor $\mathbf{S}$ and the second one (C.3) the tensor $\mathbf{N}$. The tensor $\mathbf{N}$ involves $d\mathbf{S}/dt$ and is directly related to the pressure Hessian (see appendix A). Let us introduce $\mathbf{S}_-$ and $\mathbf{N}_-$ ¹ the eigenvectors of respectively $\mathbf{S}$ and $\mathbf{N}$ corresponding to their lowest eigenvalues. From (C.2), the growth rate of the tracer gradient depends on the eigenvalues of $\mathbf{S}$ and on the alignment of ∇q with $\mathbf{S}_-$. On the other hand, from (C.3) (see Galanti et al. (1997)) for a more complete demonstration), the growth rate tendency and the dynamics of the alignment of ∇q with one of the eigenvectors of $\mathbf{S}$ depend on the alignment of ∇q with $\mathbf{N}_-$. Thus $\mathbf{N}$ explicitly affects the alignment dynamics. Consequently when ∇q does not align with $\mathbf{S}_-$, as in the “effective” rotation-dominated regime (see Lapeyre et al. (1999)), it seems natural to examine whether it preferentially aligns with $\mathbf{N}_-$.

A way to examine more explicitly the alignment dynamics is to rewrite (C.2) and (C.3) using the notations $\nabla q = \rho(\cos \theta, \sin \theta)$ with $\rho \geq 0$ (see fig.C.1) and $(\sigma_s, \sigma_n) = \sigma(\cos 2\phi, \sin 2\phi)$ with $\sigma \geq 0$. These equations become :

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{dt} \rho^2 = -\sigma \sin \zeta, \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d^2}{dt^2} \rho^2 = \sigma^2 (1 - \chi \cos(\zeta - \alpha)); \quad (\text{C.7})$$

¹ $\mathbf{N}$ (as well as $\mathbf{S}$) is symmetric and therefore its eigenvectors (and those of $\mathbf{S}$) are orthogonal. So $\mathbf{S}_-$ and $\mathbf{N}_-$ suffice to characterize the eigenvectors of $\mathbf{S}$ and $\mathbf{N}$.

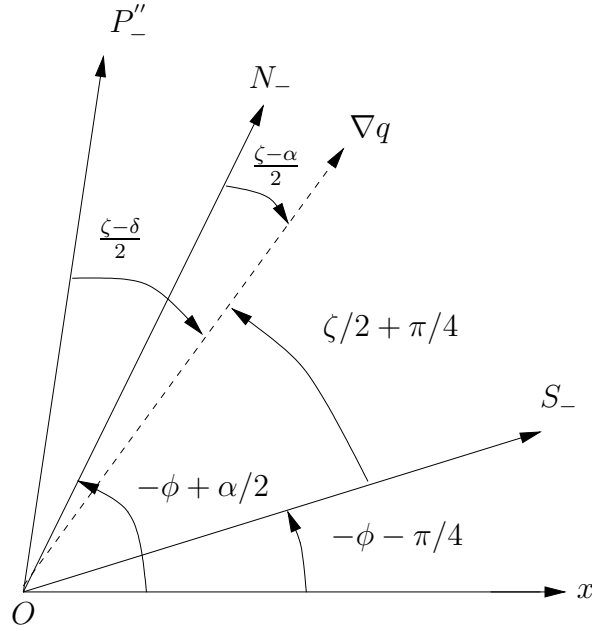


Figure C.1: Angles between ∇q and the different eigenvectors. The different angles are defined in the text.

with :

$$\zeta = 2(\theta + \phi),$$

and where χ and α are defined by :

$$\chi = \sqrt{r^2 + s^2} \quad , \quad (\sin \alpha, \cos \alpha) = \left(\frac{s}{\chi}, \frac{r}{\chi} \right); \quad (\text{C.8})$$

with :

$$r \equiv (\omega + 2\frac{d\phi}{dt})/\sigma \quad , \quad s \equiv \frac{d\sigma}{dt}/\sigma^2. \quad (\text{C.9})$$

The angles θ, ϕ, ζ and α are shown on fig.C.1.

The RHS of (C.6), i.e. the exponential growth rate of the tracer gradient norm, involves only σ and ζ . The angle ζ is directly related to the orientation of ∇q with the compressional eigenvector $\mathbf{S}_-$, since from the preceding definitions the angle of $\mathbf{S}_-$ with the x -axis is $-(\phi + \pi/4)$ (see fig.C.1). Then a perfect alignment of ∇q with the compressional eigenvector ($\zeta = -\pi/2$) corresponds to the largest growth rate. On the other hand, $\zeta = 0$ means that ∇q is aligned with the bisector of the strain rate eigenvectors, which leads to a zero exponential growth rate. The RHS of (C.7) involves two new nondimensional terms : r and s . The term r is a “rotational” term related to the “effective” rotation (i.e. the rotation effects resulting from the competition between the vorticity and the rotation of the main axes of the strain

rate tensor). The term s represents the effects of the time evolution of the strain rate amplitude. It should be emphasized that both tensors, $\mathbf{N}$ and $d\mathbf{S}/dt$ (and hence the anisotropic part of the pressure Hessian), can be expressed in terms of r and s (see appendix).

From equations (C.2) and (C.3), $\mathbf{S}_-$ and $\mathbf{N}_-$ represent two natural directions which the tracer gradient vector could preferentially align with. The angle between $\mathbf{S}_-$ and $\mathbf{N}_-$ is just equal to $(\alpha + \pi/2)/2$ (fig. C.1). This means that, when both r and s differ from zero, $\mathbf{N}_-$ is coaligned neither with the strain axes nor with the bisector of the strain axes. The alignment of ∇q with $\mathbf{S}_-$ has been addressed by several studies (see Protas et al. (1999)) and references therein). However a more recent study (Lapeyre et al. 1999) has shown that the tracer gradient vectors prefer to align with specific directions that differ from $\mathbf{S}_-$. These directions, that involve only the value of the parameter r (and not s), were derived by using only the first order equation for the tracer gradient vector. The present study, based on the first and second order equations for the tracer gradient norm, yields a new direction, $\mathbf{N}_-$, which naturally stems from the second-order equation and that depends on both r and s . Consequently the question now is : do the tracer gradient vectors prefer to align with $\mathbf{N}_-$ rather than with the other directions? This question is addressed in the next sections within the framework of the equations (C.2) and (C.3).

C.3 Discussion of the approach used

C.3.1 Relation with previous work

The combination of (C.6) and (C.7) allows to obtain an equation for the time evolution of the angle ζ :

$$\frac{d\zeta}{dt} = \sigma(r - \cos \zeta), \quad (\text{C.10})$$

The equation is actually identical to that derived in Lapeyre et al. (1999). Similar equations have also been derived by Dresselhaus et Tabor (1991) and Dritschel et al. (1991) (see also Kevlahan et Farge (1997)). Eq.C.10 only involves r and has led Lapeyre et al. (1999) to define two regimes : the strain-dominated regime (when $|r| \leq 1$) for which there are two steady solutions :

$$\zeta_- = -\arccos(r) \quad \text{stable}, \quad (\text{C.11})$$

$$\zeta_+ = \arccos(r) \quad \text{unstable}, \quad (\text{C.12})$$

and the “effective” rotation-dominated regime (when $|r| > 1$) for which no steady solution exists. Steady solutions express that the alignment angle, ζ , results from the balance between the strain effects (σ) that tend to align the tracer gradient vector in the direction of the compressional eigenvector $\mathbf{S}_-$ and the rotation effects ($\omega + 2d\phi/dt$) that tend to move away the tracer gradient vector from $\mathbf{S}_-$.

For the “effective” rotation-dominated regime ($|r| > 1$), Lapeyre et al. (1999) only predict a continuous rotation of the gradient vector with a minimum rate of rotation for a preferential orientation that corresponds to :

$$\zeta_{prob} = \frac{\pi}{2}(1 - \text{sign}(r)), \quad (\text{C.13})$$

which corresponds to the bisector of the strain axes and therefore to a zero exponential growth rate of the tracer gradient norm.

The solutions of Lapeyre et al. (1999) only depend on r . However the equations (C.6) and (C.7) reveal that both r and s should affect the alignment dynamics and the growth rate. Consequently we would like to examine, in particular for the “effective” rotation-dominated regime, whether the consideration of the full second order Lagrangian dynamics, allows to better identify the preferential direction for the alignment of the tracer gradient. More precisely we intend to examine whether the eigenvector $\mathbf{N}_-$ represents a preferential direction for the tracer gradient vectors or not. Some insights for a positive answer are given by the solutions for the alignment dynamics for three different limiting cases.

C.3.2 Three limiting cases

These limiting cases concern the saddle point, the axisymmetric vortex and the strongly rotating case.

a - the saddle point ($r = 0$)

For a saddle point where $r = s = 0$ ($\chi = 0$) the stable solutions of (C.6) and (C.7) lead to :

$$\sin \zeta = -\frac{C_1 \sinh(\sigma t) + C_2 \cosh(\sigma t)}{C_1 \cosh(\sigma t) + C_2 \sinh(\sigma t)},$$

where C_1 and C_2 are constants. This yields the following equilibrated solution $\zeta = -\frac{\pi}{2}$. Consequently the exponential growth rate of the tracer gradient is maximum and ∇q is exactly aligned with the compressional eigenvector $\mathbf{S}_-$. Furthermore ∇q is also exactly aligned with $\mathbf{N}_-$ (since $\mathbf{N}$ is a diagonal matrix and therefore any vector is an eigenvector, which emphasizes the degenerated character of this example).

b - the axisymmetric vortex ($|r| = 1$)

A steady axisymmetric vortex is characterized by a stream function that is only radially varying. (Note that the point vortex satisfies this characteristic). This leads to $r = \pm 1$ and $s = 0$ ($\chi = 1$). Then the exact solutions of equations (C.6) and (C.7) lead to :

$$\sin \zeta = -2r \frac{A + r\sigma t}{1 + (A + r\sigma t)^2},$$

where A is a constant. At equilibrium, $\zeta = 0$ or π , which means that the exponential growth rate of the tracer gradient is zero and that the vector ∇q exactly aligns with the bisector of the strain axes. The equilibrated solution corresponds to only an algebraic growth. However, since $\alpha = \arctan(s/r) = 0$, ∇q is exactly aligned with $\mathbf{N}_-$.

c - the strongly rotating case ($|r| \gg 1$)

From (C.10) there is no steady solution for ζ in that case and the tracer gradient is continuously rotating. However one can argue (as in Lapeyre et al. (1999)) that the tracer gradient vector could spend statistically more time in the direction for which $|d\zeta/dt|$ is minimum (i.e. for $d^2\zeta/dt^2 \approx 0$). This direction can be found from the equation for $d^2\zeta/dt^2$ only assuming that $2|d^2\phi/dt^2| \ll |d\sigma/dt|$, which leads to :

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \sigma^2 \chi \sin(\zeta - \alpha).$$

Thus the preferential direction that corresponds to $d^2\zeta/dt^2 \approx 0$ is $\zeta \approx \alpha$. This direction that strongly depends on s corresponds to $\mathbf{N}_-$. It differs from the strain axes and from the bisector of the strain axes when s is non-zero.

These specific examples that are only limiting cases are quite different with respect to the alignment of ∇q with the eigenvectors of $\mathbf{S}$. The first one has a degenerated character. However in the two other examples, that represent the lower and upper bounds of the “effective” rotation-dominated regime, ∇q aligns with $\mathbf{N}_-$. Furthermore the last one involves both parameters r and s and takes into account strong unsteadiness. This suggests that, *in a 2-D time-evolving turbulent flow field*, ∇q could be preferentially aligned with the eigenvector $\mathbf{N}_-$, in particular for the “effective” rotation-dominated regime. Consequently, in order to assess the importance of the parameters r and s , the next section examines, from the results of numerical experiments, the alignment of the tracer gradient vector with various directions.

C.4 Experimental results

The experimental results concern the flow field obtained in a numerical simulation of decaying turbulence at a resolution of 1024×1024 (see Hua et Klein (1998) for more details). There is a Newtonian viscosity such that the Reynolds number is 3.5×10^4 . In the following sections the characteristics of this flow field are analysed after about 40 turnover timescales of the predominant eddies. At this stage of the decay, the vorticity field (see the figure 1 in Hua et Klein (1998)) exhibits the usual emergence of coherent structures together with a strong filamentation resulting from the mutual straining and shearing influences of closely located vortices. The results discussed below have been corroborated by the analysis (not reported here) of the

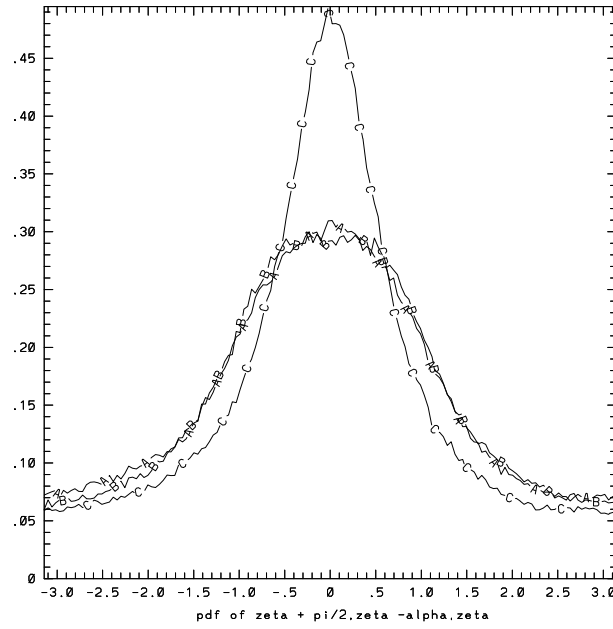


Figure C.2: PDF, conditioned by $|r| \leq 1$ and $|\nabla q| > 100$, of the alignment, (A) between the tracer gradient and the compressional eigenvector S_- (i.e. $\zeta + \pi/2$), (B) between the tracer gradient and the eigenvector N_- (i.e. $\zeta - \alpha$) and (C) between the tracer gradient and the direction corresponding the stable solution (C.11) (i.e. $\zeta - \zeta_-$).

numerical simulation at later times (after 50 and 60 turnover timescales) and also of other numerical simulations of 2-D turbulence.

C.4.1 Preferential alignment of the tracer gradient vector

The preferential direction which the vector ∇q tends to align with has been estimated through the statistics of the geometrical alignment of ∇q with different vectors. The vectors considered are, first, the compressional eigenvector S_- and the eigenvector N_- . The alignment of ∇q with S_- (respectively N_-) is assessed by checking whether $\zeta \approx -\pi/2$ (respectively $\zeta \approx \alpha$). Furthermore we have also estimated the alignment with the solutions of Lapeyre et al. (1999), namely the steady solution (C.11) when $|r| < 1$ (by checking whether $\zeta \approx \zeta_-$) and the most probable solution when $|r| > 1$ (by checking whether $\zeta \approx \zeta_{prob}$). At last, in order to compare our results with those of Nomura et Post (1998), we have computed the statistics of the alignment of ∇q with one of the eigenvector of the pressure Hessian (P''_-) by considering the statistics of $\zeta - \delta$ (with $(\delta + \pi/2)/2$ the angle between P''_- and S_- , see fig.C.1).

The statistical results clearly confirm the partition of the physical space into strain-dominated regions ($|r| < 1$), which concerns 60% of physical space, and “effective” rotation-dominated regions ($|r| > 1$). The key results are summarized on fig.C.2 and

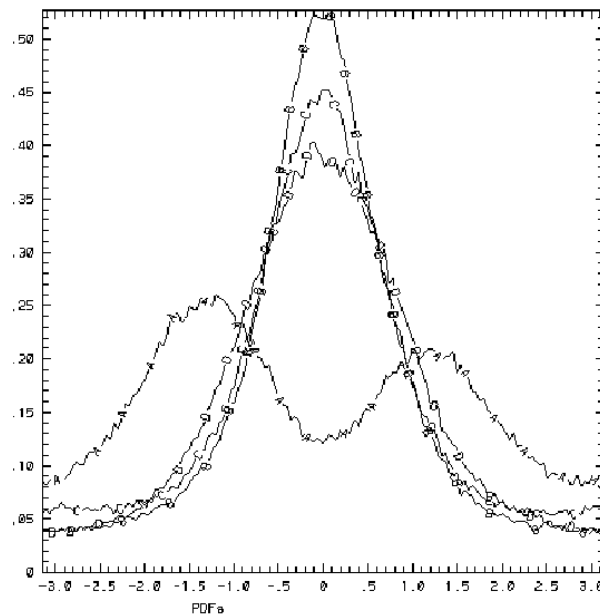


Figure C.3: PDF, conditioned by $|r| > 1$ and $|\nabla q| > 100$, of the alignment, (A) between the tracer gradient and the compressional eigenvector S_- (i.e. $\zeta + \pi/2$), (B) between the tracer gradient and the eigenvector N_- (i.e. $\zeta - \alpha$), (C) between the tracer gradient and the eigenvector P'' of the pressure Hessian (i.e. $\zeta - \delta$) and (D) between the tracer gradient and the preferential direction of Lapeyre et al. (1999) (i.e. $\zeta - \zeta_{prob}$).

fig.C.3 that display the probability density function (PDF) of the different angles conditioned by $|\nabla q| > 100$ (which concerns more than 50% of physical space)².

For the strain-dominated regions the PDFs (fig.C.2) reveal that ∇q preferentially aligns with ζ_- . The alignment with S_- and N_- are comparable and less efficient than with ζ_- , but more efficient than with P'' (not shown). These results clearly confirm that for the strain-dominated regions the solution proposed by Lapeyre et al. (1999), i.e. ζ_- , is the best one. On the other hand the consideration of N_- does not introduce more information on the gradient orientation than that of S_- .

For the “effective” rotation-dominated regions (fig.C.3) the results significantly differ. The alignment of ∇q with N_- strongly dominates. It is more efficient than with P'' and significantly much better than with ζ_{prob} . This figure shows that the tracer gradient vectors actually lie close to the bisector of the axes of the strain rate tensor with however a non-zero shift as displayed by the enlarged PDF of $\zeta + \zeta_{prob}$. This non-zero shift appears to be well captured by N_- , which is a significant improvement relatively to the previous studies.

²The mean $|\nabla q|$ -value is 162.

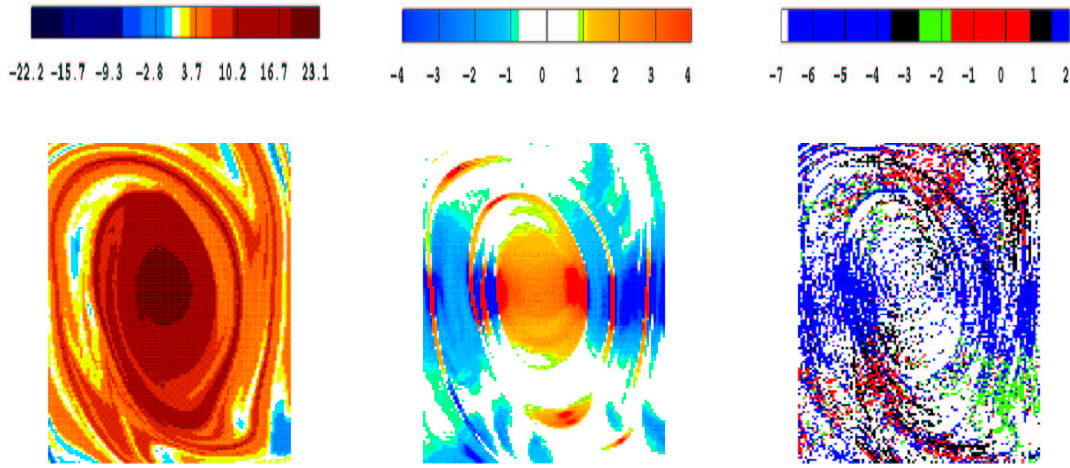


Figure C.4: : vorticity (a); r (b); alignment (with a precision of $\pm 20^\circ$) of tracer gradient vectors (such that $|\nabla q| > 100$) with S_- (black), N_- (blue), $-\arccos r$ when $|r| < 1$ (red) and $+\arccos r$ when $|r| < 1$ (green) (c).

Since the alignment of ∇q in the strain-dominated regions significantly differs from that in the “effective” rotation-dominated regions, we have assessed the sharpness of the boundary $|r| = 1$. For that purpose we have calculated the same PDFs as in fig.C.2 and fig.C.3 for the regions corresponding to $0.8 < |r| \leq 1$ and $1 < |r| \leq 1.2$. The PDFs (not shown) clearly confirm the strong preference of ∇q to align with ζ_- when $|r| < 1$ and with N_- when $|r| > 1$, which emphasizes the role of $|r| = 1$ as a threshold in the alignment dynamics.

Figs.C.4, that focus on one vortex of the turbulent field (fig.C.4a), provide an illustration of a region where both regimes, $|r| < 1$ and $|r| > 1$, coexist. Fig.C.4b shows that these regimes are well separated and that the $|r| > 1$ regime is dominating. The vortex core is a region where $r > 1$ because of large values of ω . The vortex periphery is composed of regions where $|r| < 1$ because of large values of σ and regions where $r < -1$ because of large values of $\frac{d\phi}{dt}$ (whose sign is opposite to that of ω (fig.C.4a)). Moreover the $|r| > 1$ region at the vortex periphery is characterized by a sharp interleaving of negative and positive values with a domination of the latter. Actually, for all vortices of the turbulent flow field, we have observed that large values of r at the vortex periphery and in the vortex core globally have opposite sign. Fig.(C.4c) shows the directions the tracer gradient vectors prefer to align with among the directions : S_- , ζ_- , ζ_+ and N_- . Clearly there is a strong preference for ∇q to align with N_- where $|r| > 1$ and with ζ_- where $|r| \leq 1$. However it is interesting to note that in some regions where $|r| \leq 1$ (as in the lower right edge) some gradients prefer to align with ζ_+ .

Thus the new outcome of this study concerns the “effective” rotation-dominated regions for which the present results clearly display a preferential alignment with the eigenvector N_- , which differs from the bisector of the eigenvectors of S when s is

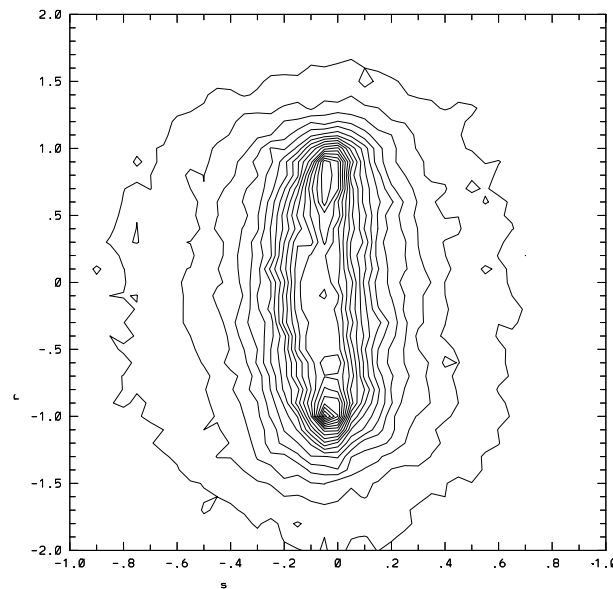


Figure C.5: Joint PDF of s with r conditioned by $|\nabla q| > 100$.

non-zero, yielding a non zero exponential growth. This outcome has to be contrasted with previous results that only predicted a perfect alignment with the bisector of the eigenvectors of $\mathbf{S}$ and consequently a zero exponential growth. Therefore the present results strongly emphasize the importance of the parameter s , which was not found in previous studies. Furthermore the alignment with $\mathbf{N}_-$ is better than with $\mathbf{P}''_-$ for 98% of the tracer gradients³, which justifies the present approach using the time evolution of the tracer gradient norm rather than of the vector itself. At last this clearly confirms the significant influence of the full Lagrangian second order dynamics. On the other hand, for the strain-dominated regions, the results well confirm the conclusions of Lapeyre et al. (1999) about the preferential alignment of the tracer gradient vector with ζ_- .

C.4.2 The role of the parameters r and s on the alignment process

The alignment of ∇q with either the direction of the stable solution (C.11) or with $\mathbf{N}_-$ depends on the parameters r and s . So one question is : where are the tracer gradients and the different alignment properties located in the parameter space $\{r, s\}$? The region where most of the tracer gradients are located is displayed by the joint PDF of r and s conditioned by $|\nabla q| > 100$ (fig.C.5). Tracer gradients are mostly found where $|r| < 1.5$ (with an almost even distribution) and where values of s are slightly negative. Furthermore we have found (figure not shown) that, in the region where $|r| \leq 1$, tracer gradients that align with the stable solution (C.11) are also almost evenly distributed between $r = -1$ and $r = 1$.

³Indeed for the remaining 2%, that correspond to the largest gradients, another alignment dynamics seems to prevail.

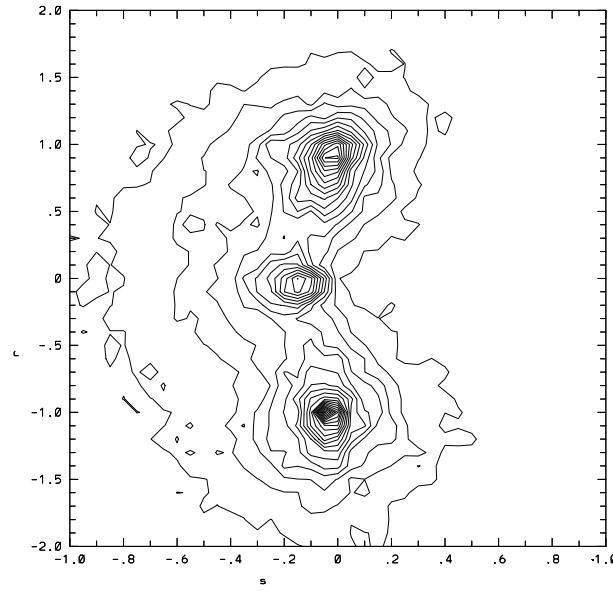


Figure C.6: Joint PDF of s with r conditioned by $|\nabla q| > 100$ and $\cos(\zeta - \alpha) > 0.9$

Fig.C.6 shows the joint PDF of s and r conditioned by $|\nabla q| > 100$ and $\cos(\zeta - \alpha) > 0.9$ (which concerns more than 18% of physical space). This corresponds to an angle of ∇q with $\mathbf{N}_-$ that is less than 13° . It reveals that tracer gradients that align with $\mathbf{N}_-$ are more frequently found in three well-defined regions whose characteristics are close to those of the first two limiting cases discussed in section 3. The first region is centered around the point $\{r, s\} = \{0, -0.15\}$. It means that $\tan \alpha = s/r \approx \infty$ and therefore that the eigenvectors of $\mathbf{N}$ and $\mathbf{S}$ are almost parallel. This situation is close to the first limiting case (the saddle point). We have checked that, in this region, the alignment of the tracer gradient vector with the stable solution (C.11) is however better than with $\mathbf{N}_-$. The two other regions are centered around the peaks $\{r, s\} = \{-1, -0.05\}$ and $\{r, s\} = \{0.95, -0.025\}$. This means that $\tan \alpha$ is small but non zero in those regions and thus the angle between the eigenvectors of $\mathbf{N}$ and $\mathbf{S}$ is not equal to $\pi/4$. The consequence is that the direction of ∇q should differ from the bisector of the eigenvectors of $\mathbf{S}$. Therefore the tracer gradient exponential growth rate should be small but non-zero. These situations are close to the second limiting case (the axisymmetric vortices). However they emphasize the important role of s . Again we have checked that the alignment of the tracer gradient vector with the stable solution (C.11) is better than with $\mathbf{N}_-$ when $|r| \leq 1$. However, when $|r| > 1$, the angle of ∇q with $\mathbf{N}_-$ is much closer to zero than when $|r| \leq 1$.

The preceding results reveal that the alignment of the tracer gradient vectors with $\mathbf{N}_-$ occurs preferentially for negative values of s . This feature is corroborated by the joint PDF (not shown) of s and the growth rate of the tracer gradient norm, defined as

$$\Delta = -\sigma \sin \zeta, \quad (\text{C.14})$$

which displays a negative correlation of s with Δ and which presents a strong asymmetry that is more pronounced for large amplitudes of s : positive (negative) values of the growth rate are more frequently found in regions where s is negative (positive). Thus, when the amplitude of s is large, the sign of s affects the alignment process and the growth rate of the tracer gradient norm. On the other hand, the sign of r does not seem to have a so much pronounced influence on the alignment of ∇q with the eigenvectors of $\mathbf{N}$ (and therefore on the sign of the growth rate). We observe however on fig.C.6 that the PDF is stronger in the region centered around $\{r, s\} = \{-1, -0.05\}$ than in the region around $\{r, s\} = \{0.95, -0.025\}$.

C.4.3 Consequence on the growth rate of the tracer gradient

What can be inferred from the alignment properties, in particular in the “effective” rotation-dominated regions, for the production of the tracer gradients and the tracer cascade? One way to address this question is to compare the observed instantaneous growth rates of the tracer gradient norm (Δ) with their estimations using the strain rate amplitude and the analytical expressions for the alignment properties. The strong preference for ∇q to be aligned with ζ_- in the strain-dominated regions and with $\mathbf{N}_-$ in the “effective” rotation-dominated regions leads to the following analytical expressions of the instantaneous exponential growth rate, Δ , of the tracer gradient magnitude :

$$\Delta = \sigma \sin(\arccos r) = \sigma \sqrt{1 - r^2} \quad \text{when } |r| \leq 1 \quad (\text{C.15})$$

$$\Delta = -\sigma \sin(\alpha) = -\sigma \frac{s}{\chi} \quad \text{when } |r| > 1 \quad (\text{C.16})$$

The joint PDFs of the experimental values of Δ with the analytical expressions provided by (C.15) and (C.16), shown on fig.C.7 and fig.C.8, reveal that these estimations of the growth rate are statistically close to the experimental values. In the regions where $|r| \leq 1$, the joint PDF (fig.C.7) exhibits a maximum near $\Delta = 2.5$. Most of the tracer gradients located in those regions align with ζ_- . However there is a branch in the upper left-hand quarter that corresponds to a correlation of -1 . This means that, at those locations, the tracer gradient vectors align with ζ_+ instead of ζ_- . So far we have no explanation for this intriguing feature. Fig.C.8 reveals that in the “effective” rotation-dominated regions the growth rate of the tracer gradients ranges between -1.5 and 1.5 and that the estimation produced by (C.16) is statistically correct. These results again emphasize the important role of the amplitude and sign of r and s on the growth rate of the tracer gradients and therefore on the stirring properties of a 2-D flow field. Thus the main novel feature that emerges, relatively to the previous studies, is that taking into account the rate of change of the strain rate amplitude allows to predict the exponential growth rate of the tracer gradients in the “effective” rotation-dominated regions.

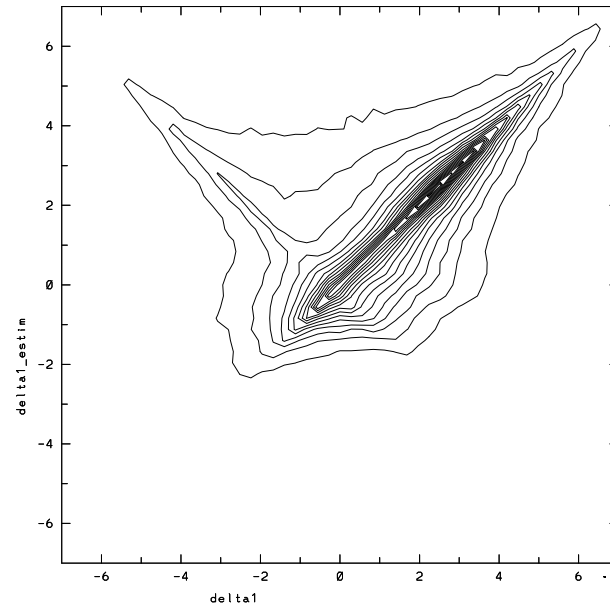


Figure C.7: Joint PDF of the growth rate with its estimation using (C.15) and (C.16) conditioned by $|\nabla q| > 100$

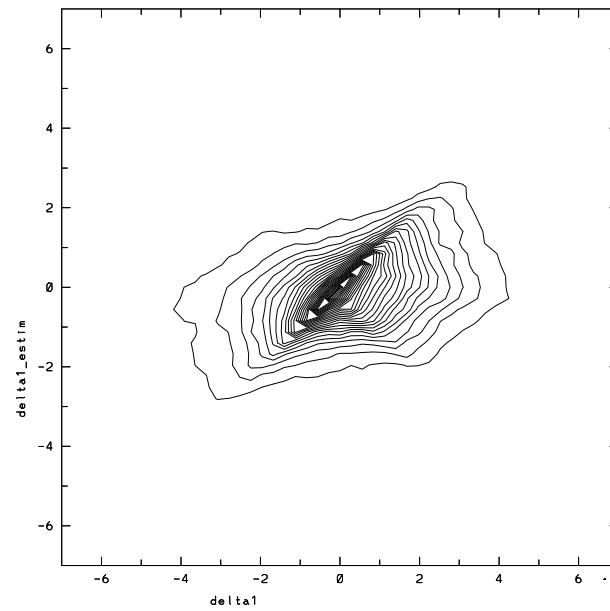


Figure C.8: Same as fig.C.7 but conditioned by $|r| > 1$

C.5 Conclusion

The purpose of this study was to examine this alignment dynamics of the tracer gradient vectors by considering the second order Lagrangian dynamics. In accordance with the results of Hua et Klein (1998), the approach used has been to consider the

first two order equations for the tracer gradients. The equations for the tracer gradient norm are considered instead of those for the tracer gradient vectors. These equations are indeed independent of the coordinates system and allow to focus on the geometrical alignment of the tracer gradient vectors relatively to the strain eigenvectors. The main result, that emerges from direct numerical simulations, is that the full consideration of the second order Lagrangian dynamics significantly improves the statistical estimation of the alignment dynamics and therefore the knowledge of the stirring properties of a 2-D turbulent flow field.

More precisely, defining a parameter r , that measures the competition of the “effective” rotation effects (due to both the vorticity and the rotation of the strain axes) with the strain modulus effects, the present results well confirm those obtained in Lapeyre et al. (1999) in the strain-dominated regime ($|r| < 1$) : for this regime, that concerns almost 60% of the physical space, there is a stronger preference for the alignment with a direction corresponding to a steady equilibrium between the “effective” rotation and strain effects.

The major improvement which emerges from our approach concerns the “effective” rotation-dominated regime ($|r| > 1$) that concerns 40% of the physical space : the experimental results clearly reveal a strong preference for the tracer gradient vectors to be statistically aligned with $\mathbf{N}_-$, one of the eigenvectors of a matrix $\mathbf{N}$ related to the pressure Hessian. These results are corroborated by other numerical simulations of decaying 2-D turbulence (not reported here). The eigenvector $\mathbf{N}_-$ differs from the bisector of the eigenvectors of $\mathbf{S}$ when the time evolution of the strain rate modulus, s , is non-zero. This feature strongly emphasizes the importance of this parameter s , which was not found in previous studies. The consequence is that, in these “effective” rotation-dominated regions, the non-zero exponential growth or decay of the tracer gradient vector (and therefore both the sign and amplitude of the growth rate) can be predicted contrary to previous results which predicted zero growth and only a rotation of this vector.

The tensor $\mathbf{N}$ is directly related to the time evolution of the amplitude and orientation of the strain tensor. This clearly confirms the significant influence of the pressure Hessian, more precisely of its anisotropic part, since this part modifies both the amplitude and orientation of the strain tensor. Furthermore this emphasizes the strong influence of the *non-local* (in terms of the velocity field) interactions on the alignment dynamics in particular for the “effective” rotation-dominated regime. Indeed calculation of the anisotropic part of the pressure Hessian requires to solve a Poisson equation over the whole domain (Hua et Klein 1998) whereas the isotropic part is expressed in terms of the local velocity gradients.

The present results are similar to those obtained recently by Nomura et Post (1998) for 3-D turbulence. For the rotation-dominated regions, these authors found that the vorticity vector (equivalent to the tracer gradient vector in 2-D turbulence)

preferentially aligns with one of the pressure Hessian eigenvectors. Our results clearly reveal that for a 2-D field the tracer gradients prefer to align with $\mathbf{N}_-$ rather than with the eigenvectors of the pressure Hessian, which justifies the present approach using the equations for the tracer gradient norm. The explanation of this difference is that in a 2-D flow field, the tracer gradients are affected by the vorticity (see eq.C.17) whereas in a 3-D field the vorticity vector cannot be directly affected by itself. This is why the expression of $\mathbf{N}$ (see (C.22)) involves, besides the pressure Hessian $\mathbf{P}''$ and its isotropic part ($\lambda_o \mathbf{I}$), an additional term linearly related to the vorticity ($\Omega \nabla \mathbf{u}^*$).

It should be mentioned that throughout this study we do not make distinction between the gradient of a passive tracer conserved on a Lagrangian trajectory and that of the vorticity. We have indeed found in our numerical 2D simulations that, for times longer than an initial enstrophy timescale, the two gradients have an identical orientation in most of the domain. This is also confirmed by Babiano et al. (1987) who have noted that isolines of tracer and vorticity have similar orientations. Therefore the present results are valid for both gradients. However a more thorough study on the comparison between the behaviors of active and passive scalars in 2-D turbulence is under progress.

Two questions arise from the results of the present study. The first one concerns the sign of the growth rate of the tracer gradient. Indeed the analytical findings of this study indicate that in the strain-dominated regions the tracer gradients vectors should align in a direction that corresponds to a positive growth rate. However, at some locations, the numerical results clearly reveal an alignment just in the opposite direction. This suggests that at those locations the tracer gradient vectors preferentially align in the direction of the unstable fixed point of (C.10). The mechanisms that force this solution to be stabilized in those regions, and more specifically the role of the parameter s , should be investigated as s was not taken into account in the derivation of (C.11) and (C.11). The second question concerns the effects of the dissipation on the alignment dynamics which have not been examined in this study. Some recent results show that both the magnitude and the form of the viscosity (using a Newtonian or an hyperviscous model) can have a significant effect on the alignment dynamics with the strain eigenvectors (Protas et al. 1999) and on the stripping of vortex caused by the steep vorticity gradients (Mariotti et al. 1994). These results suggest to study more carefully the effects of the viscosity on the topology of the stirring processes. Such a study could use a recent technique of Lagrangian path analysis to take into account the diffusion on Lagrangian trajectories as it permits to have an exact expression for the tracer distribution (see for instance Chertkov et al. (1999b) and references therein). We intend to address these questions in the next future.

C.6 Acknowledgements

We are grateful to Xavier Carton and Raymond Pierrehumbert for their insightful suggestions and discussions on the manuscript. This work is supported by IFREMER

and the CNRS. The calculations reported here were done on the CRAY C90 of the IDRIS (Orsay, France).

Appendix C.A

One approach to study the deformation of the tracer field is to consider the first two order time derivative equations of its gradient vectors (Basdevant et Philipovitch 1994, Hua et Klein 1998) :

$$\frac{d\nabla q}{dt} = -\nabla \mathbf{u}^* \nabla q \quad (\text{C.17})$$

$$\frac{d^2 \nabla q}{dt^2} = \left[[\nabla \mathbf{u}^*]^2 - \frac{d}{dt}(\nabla \mathbf{u}^*) \right] \nabla q \quad (\text{C.18})$$

with ∇ the gradient operator and $\nabla \mathbf{u}^*$ the transpose of the velocity gradient tensor, expressed as :

$$\nabla \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_x v \\ \partial_y u & \partial_y v \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_n & \sigma_s \\ \sigma_s & -\sigma_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{S} + \mathbf{\Omega}.$$

ω , σ_n and σ_s are respectively the vorticity and the normal and shear strain rates and $\mathbf{\Omega} = \frac{\omega}{2} \mathbf{R}(\frac{\pi}{2})$ with $\mathbf{R}(\frac{\pi}{2})$ the rotation matrix of $\pi/2$. Furthermore if $\mathbf{P}''$ designates the Hessian matrix of the pressure :

$$\mathbf{P}'' \equiv \begin{bmatrix} \partial_{xx} p & \partial_{xy} p \\ \partial_{xy} p & \partial_{yy} p \end{bmatrix},$$

we have the relation (Hua et Klein 1998) :

$$\left[[\nabla \mathbf{u}^*]^2 - \frac{d}{dt}(\nabla \mathbf{u}^*) \right] = -\mathbf{R}(-\frac{\pi}{2}) \mathbf{P}'' \mathbf{R}(\frac{\pi}{2}). \quad (\text{C.19})$$

This relation emphasizes the role of the pressure Hessian (i.e of the acceleration gradient tensor) on the evolution of the tracer gradient vectors. For a 2-D flow, we have :

$$\left[[\nabla \mathbf{u}^*]^2 - \frac{d\nabla \mathbf{u}^*}{dt} \right] = \lambda_o \mathbf{I} - d\mathbf{S}/dt, \quad (\text{C.20})$$

since $d\omega/dt = 0$ and $[\nabla \mathbf{u}^*]^2 = \lambda_o \mathbf{I}$ with $\mathbf{I}$ the identity matrix and $\lambda_o = (\sigma_n^2 + \sigma_s^2 - \omega^2)/4$. The part $\lambda_o \mathbf{I}$ is related to the isotropic part of the pressure Hessian ($\lambda_o = -\nabla^2 p/2$) whereas $d\mathbf{S}/dt$ is related to the non isotropic part, which points out its nonlocal nature (Hua et al. 1998). The studies of Basdevant et Philipovitch (1994) and Hua et Klein (1998) have clearly revealed the necessity to take into account both $\lambda_o \mathbf{I}$ and $d\mathbf{S}/dt$ for a better characterization of the stirring processes.

The tensor $\mathbf{N}$ defined in (C.5) can be directly related to the pressure Hessian using the preceding expressions :

$$\mathbf{N} = 2 \left[-\mathbf{R}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{P}'' \mathbf{R}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}^* \right] \quad (\text{C.21})$$

or :

$$\mathbf{N} = 2 \left[-\mathbf{R}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{P}'' \mathbf{R}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_o \mathbf{I} - 2\Omega \nabla \mathbf{u}^* \right] \quad (\text{C.22})$$

Simpler expressions for both $\mathbf{S}$ and $\mathbf{N}$ can be obtained when they are rewritten in the strain coordinates. Using the relations $(\sigma_s, \sigma_n) = \sigma(\cos 2\phi, \sin 2\phi)$ with $\sigma \geq 0$, these expressions are :

$$\mathbf{S} = \frac{\sigma}{2} \mathbf{R}\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4} - \phi\right) \quad , \quad \mathbf{N} = \sigma^2 \mathbf{R}\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) \begin{bmatrix} 1-s & r \\ r & 1+s \end{bmatrix} \mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4} - \phi\right) ;$$

where the terms r and s are defined by (C.9).

Références

- Ambaum, M., 1997** : Isentropic formation of the tropopause. *J. Atmos. Sc.*, **54**, 555–568.
- Andreotti, B., 1997** : Studying Burgers’ models to investigate the physical meaning of the alignments statistically observed in turbulence. *Phys. Fluids A*, **9**, 735–742.
- Antonsen, T. M., Z. Fan, E. Ott, et E. Garcia-Lopez, 1996** : The role of chaotic orbits in the determination of power spectra of passive scalars. *Phys. Fluids A*, **8**, 3094–3104.
- Aref, H., 1984** : Stirring by chaotic advection. *J. Fluid Mech.*, **143**, 1–21.
- , **1999** : Order in chaos. *Nature*, **401**, 756–758.
- Armi, L. et P. Flament, 1985** : Cautionary remarks on the spectral interpretation of turbulent flows. *J. Geophys. Res.*, **90**, 11,779–11,782.
- Artale, V., G. Boffetta, A. Celani, M. Cencini, et A. Vulpiani, 1997** : Dispersion of passive tracers in closed basins : beyond the diffusion coefficient. *Phys. Fluids A*, **9**, 3162–3171.
- Ashurst, W., W. Kerstein, et C. Gibson, 1987** : Alignment of vorticity and scalar gradient with strain rate in simulated Navier-Stokes turbulence. *Phys. Fluids*, **30**, 2343–2353.
- Babiano, A., 1999** : On the non-homogeneous two-dimensional inverse cascade of energy. Preprint.
- , **B. Dubrulle, et P. Frick, 1995** : Scaling properties of numerical two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. E*, **52**, 3719–3729.
- , ———, et ———, **1997** : Some properties of two-dimensional inverse energy cascade dynamics. *Phys. Rev. E*, **55**, 2693–2706.
- , **C. Basdevant, B. Legras, et R. Sadourny, 1987** : Vorticity and passive-scalar dynamics in two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, **183**, 379–397.
- , **G. Boffetta, A. Provenzale, et A. Vulpiani, 1994** : Chaotic advection in point vortex models and two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids A*, **6**, 2465–2474.
- Balluch, M. G. et P. H. Haynes, 1997** : Quantification of lower stratospheric mixing processes using aircraft data. *J. Geophys. Res.*, **102**, 23,487–23,504.
- Basdevant, C., B. Legras, R. Sadourny, et M. Beland, 1981** : A study of barotropic model flows : intermittency, waves and predictability. *J. Atmos. Sc.*, **38**, 2305–2326.
- et **R. Sadourny, 1983** : Modélisation des échelles virtuelles dans la simulation numérique des écoulements turbulents bidimensionnels. *J. Méc. Théor. Appl.*, Numéro spécial, 243–269.
- et **T. Philipovitch, 1994** : On the validity of the “Weiss criterion” in two-dimensional turbulence. *Physica D*, **73**, 17–30.
- Batchelor, G. K., 1952** : The effect of homogeneous turbulence on material lines and surfaces. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **213**, 349–366.
- , **1953** : *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge University

- Press.
- , **1955** : On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, **1**, 177–190.
- , **1959** : Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part 1. General discussion and the case of small conductivity. *J. Fluid Mech.*, **5**, 113–133.
- , **1969** : Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids Supp II*, **12**, 233–239.
- Beale, J. T., T. Kato, et A. Majda, 1984** : Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations. *Comm. Math. Phys.*, **94**, 61–66.
- Benzi, R., G. Paladin, S. Patarnello, P. Santangelo, et A. Vulpiani, 1986** : Intermittency and coherent structures in two-dimensional turbulence. *J. Phys. A*, **19**, 3771–3784.
- Betchov, R., 1956** : An inequality concerning the production of vorticity in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, **1**, 497–504.
- Blackburn, H. M., N. N. Mansour, et B. Cantwell, 1996** : Topology of fine-scale motions in turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, **310**, 269–292.
- Boffetta, G., A. Celani, et M. Vergassola, 2000a** : Inverse energy cascade in two-dimensional turbulence : deviations from Gaussian behavior. *Phys. Rev. E*, **61**, 29–32.
- , ———, **M. Cencini, G. Lacorata, et A. Vulpiani, 2000b** : Nonasymptotic properties of transport and mixing. *Chaos*, **10**, 50–60.
- Boratav, O. N. et R. B. Pelz, 1994** : Direct numerical simulation of transition to turbulence from a high-symmetry initial condition. *Phys. Fluids A*, **6**, 2757–2784.
- Borue, V., 1994** : Inverse energy cascade in stationary two-dimensional homogeneous turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 1475–1478.
- Bower, A. S. et M. S. Lozier, 1994** : A closer look at particle exchange in the Gulf Stream. *J. Phys. Oceanogr.*, **24**, 1399–1418.
- , **T. Rossby, et J. L. Lillibridge, 1985** : The Gulf Stream–Barrier or blender? *J. Phys. Oceanogr.*, **15**, 24–32.
- Bowman, K. P. et P. Chen, 1994** : Mixing by barotropic instability in a nonlinear model. *J. Atmos. Sci.*, **51**, 3692–3705.
- Brachet, M. E., D. Meiron, S. A. Orszag, B. Nickel, R. H. Morf, et U. Frisch, 1983** : Small-scale structure of the Taylor-Green vortex. *J. Fluid Mech.*, **130**, 411–452.
- , **M. Meneguzzi, A. Vincent, H. Politano, et P. L. Sulem, 1992** : numerical evidence of smooth self-similar dynamics and possibility of subsequent collapse for three-dimensional ideal flows. *Phys. Fluids A*, **4**, 2845–2854.
- , ———, **H. Politano, et P. L. Sulem, 1988** : The dynamics of freely decaying two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, **194**, 333–349.
- Brown, G. L. et A. Roshko, 1974** : On density effects and large structures in turbulent mixing layer. *J. Fluid Mech.*, **64**, 775–816.
- Burgers, J. M., 1948** : A mathematical model illustrating the theory of turbulence. In “Advances in Applied Mechanics,” Vol. 1, Academic, pp. 171–196.

- Cantwell, B. J., 1992** : Exact solution of a restricted Euler equation for the velocity gradient tensor. *Phys. Fluids A*, **4**, 782–793.
- Celani, A., A. Lanotte, A. Mazzino, et M. Vergassola, 2000** : Universality and saturation of intermittency in passive scalar turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 2385–2388.
- Charney, J., 1971** : Geostrophic turbulence. *J. Atmos. Sc.*, **28**, 1087–1095.
- Chen, J. H., M. S. Chong, J. Soria, R. Sondergaard, A. E. Perry, M. Rogers, R. Moser, et B. J. Cantwell, 1990** : A study of the topology of dissipating motions in direct numerical simulations of time developing compressible and incompressible mixing layers. In “Proc. of the Summer Program,” Center for Turbulence Research, Stanford, U.S.A., pp. 139–161.
- Chen, P., 1994** : The permeability of the Antarctic vortex edge. *J. Geophys. Res.*, **99**, 20,563–20,571.
- Chertkov, M., A. Pumir, et B. I. Shraiman, 1999a** : Lagrangian tetrad dynamics and the phenomenology of turbulence. *Phys. Fluids A*, **11**, 2394–2410.
- , **G. Falkovich, I. Kolokolov, et M. Vergassola, 1999b** : Small-scale turbulent dynamo. *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 4065–4068.
- , ———, ———, et **V. Lebedev, 1995a** : Normal and anomalous scaling of the fourth order correlation function of a randomly advected passive scalar. *Phys. Rev. E*, **52**, 4924–4941.
- , ———, ———, et ———, **1995b** : Statistics of a passive scalar advected by a large-scale two-dimensional velocity field : analytic solution. *Phys. Rev. E*, **51**, 5609–5627.
- , **I. Kolokolov, et M. Vergassola, 1997** : Inverse cascade and intermittency of passive scalar in one-dimensional smooth flow. *Phys. Rev. E*, **56**, 5483–5499.
- , ———, et ———, **1998** : Inverse versus direct cascades in turbulent advection. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 512–515.
- Constantin, P., 1994** : Geometric statistics in turbulence. *SIAM rev.*, **36**, 73–98.
- , **A. J. Majda, et E. Tabak, 1994** : Formation of strong fronts in the 2-D quasigeostrophic thermal active scalar. *Nonlinearity*, **7**, 1495–1533.
- , **C. Fefferman, et A. Majda, 1996** : Geometric constraints on potentially singular solutions for the 3-D Euler equations. *Commun. Partial Diff. Eq.*, **21**, 559.
- et ———, **1993** : Direction of vorticity and the problem of global regularity for the Navier-Stokes equations. *Indiana Univ. Math. J.*, **42**, 775.
- , **I. Procaccia, et D. Segel, 1995** : Creation and dynamics of vortex tubes in three-dimensional turbulence. *Phys. Rev. E*, **51**, 3207–3222.
- Corrsin, S., 1951** : On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence. *J. Appl. Phys.*, **22**, 469.
- Couder, Y. et C. Basdevant, 1986** : Experimental and numerical study of vortex couples in two-dimensional flows. *J. Fluid Mech.*, **173**, 225–251.
- Danielsen, E. F., 1990** : In defense of Ertel’s potential vorticity and its general applicability as a meteorological tracer. *J. Atmos. Sc.*, **47**, 2013–2020.
- Douady, S., Y. Couder, et M. E. Brachet, 1991** : Direct observation of the

- intermittency of intense vorticity filaments in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 983–986.
- Dresselhaus, E. et M. Tabor, 1991** : The stretching and alignment of material elements in general flow fields. *J. Fluid Mech.*, **236**, 415–444.
- Dritschel, D. G., 1989a** : Contour dynamics and contour surgery : numerical algorithms for extended, high-resolution modeling of vortex dynamics in two-dimensional, inviscid, incompressible flows. *Comp. Phys. Rep.*, **10**, 77–146.
- , **1989b** : On the stabilization of a two-dimensional vortex strip by adverse shear. *J. Fluid Mech.*, **206**, 193–221.
- , **1993** : Vortex properties of two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids A*, **5**, 984–997.
- , **1995** : A general theory for two-dimensional vortex interactions. *J. Fluid Mech.*, **293**, 269–303.
- , **1998** : On the persistence of non-axisymmetric vortices in inviscid two-dimensional flows. *J. Fluid Mech.*, **371**, 141–155.
- et **B. Legras, 1993** : Modeling oceanic and atmospheric vortices. *Physics Today*, **46**, 44–51.
- , **M. de la Torre Juárez, et M. H. P. Ambaum, 1999** : The three-dimensional vortical nature of atmospheric and oceanic flows. *Phys. Fluids A*, **11**, 1512–1520.
- , **P. H. Haynes, M. N. Jukes, et T. G. Shepherd, 1991** : The stability of a two-dimensional vorticity filament under uniform strain. *J. Fluid Mech.*, **230**, 647–665.
- Drummond, I. T., 1993** : Stretching and bending of line elements in random flows. *J. Fluid Mech.*, **252**, 479–498.
- et **W. Munch, 1991** : Distortion of line and surface elements in model turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, **225**, 529–543.
- Duan, J. et S. Wiggins, 1996** : Fluid exchange across a meandering jet with quasiperiodic variability. *J. Phys. Oceanogr.*, **26**, 1176–1188.
- Elhmaïdi, D., A. Provenzale, et A. Babiano, 1993** : Elementary topology of two-dimensional turbulence from a Lagrangian viewpoint and single-particle dispersion. *J. Fluid Mech.*, **257**, 533–558.
- Elliott, B. A. et T. B. Sanford, 1986** : The subthermocline lens D1. Part I : description of water properties and velocity profiles. *J. Phys. Oceanogr.*, **16**, 532–548.
- Ertel, H., 1942** : Ein Neuer hydrodynamischer Wirbelsatz. *Met. Z.*, **59**, 271–281.
- Fjørtoft, R., 1953** : On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for two-dimensional non-divergent flow. *Tellus*, **5**, 225–230.
- Frisch, U., 1995** : *Turbulence : The Legacy of A.N. Kolmogorov*, Cambridge University Press.
- , **A. Mazzino, et M. Vergassola, 1998** : Intermittency in passive scalar advection. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 5532–5537.
- et **P. L. Sulem, 1984** : Numerical simulation of the inverse cascade in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **27**, 1921–1923.
- Galanti, B., J. D. Gibbon, et M. Heritage, 1997** : Vorticity alignment

- results for the three-dimensional Euler and Navier-Stokes equations. *Nonlinearity*, **10**, 1675–1694.
- Gawedzki, K. et A. Kupiainen, 1995** : Anomalous scaling of the passive scalar. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 3834–3837.
- et **M. Vergassola, 2000** : Phase transition in the passive scalar advection. *Physica D*, **138**, 63–90.
- Gibbon, J. D., A. S. Fokas, et C. R. Doering, 1999** : Dynamically stretched vortices as solutions of the 3D Navier-Stokes equations. *Physica D*, **132**, 497–510.
- Gibson, C. H., W. T. Ashurst, et A. R. Kerstein, 1988** : Mixing of strongly diffusive passive scalars like temperature by turbulence. *J. Fluid Mech.*, **194**, 261–293.
- Girimaji, S. S. et S. B. Pope, 1990** : Material-element deformation in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, **220**, 427–458.
- Goldhirsch, I., P.-L. Sulem, et S. A. Orszag, 1987** : Stability and Lyapunov stability of dynamical systems : a differential approach and a numerical method. *Physica D*, **27**, 311–337.
- Guckenheimer, J. et P. Holmes, 1983** : *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer.
- Haller, G. et A. C. Poje, 1998** : Finite time transport in aperiodic flows. *Physica D*, **119**, 352–380.
- et **G. C. Yuan, 2000** : Lagrangian coherent structures and mixing in two-dimensional turbulence. *Physica D*, **147**, 352–370.
- Haynes, P. H. et E. Shuckburgh, 2000** : Effective diffusivity as a diagnostic of atmospheric transport. Part 1 : stratosphere. *J. Geophys. Res.*, **105**, 22,777–22,794.
- et **J. Anglade, 1997** : The vertical-scale cascade of atmospheric tracers due to large-scale differential advection. *J. Atmos. Sc.*, **54**, 1121–1136.
- et **M. E. McIntyre, 1990** : On the conservation and impermeability theorems for potential vorticity. *J. Atmos. Sc.*, **47**, 2021–2031.
- et **W. E. Ward, 1993** : The effect of realistic radiative transfer on potential vorticity structures, including the influence of background shear and strain. *J. Atmos. Sc.*, **50**, 3431–3453.
- Held, I. M., R. T. Pierrehumbert, S. T. Garner, et K. L. Swanson, 1995** : Surface quasi-geostrophic dynamics. *J. Fluid Mech.*, **282**, 1–20.
- Herring, J. R., 1975** : Theory of two-dimensional anisotropic turbulence. *J. Atmos. Sc.*, **32**, 2254–2271.
- , **S. A. Orszag, R. H. Kraichnan, et D. G. Fox, 1974** : Decay of two-dimensional homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, **66**, 417–444.
- Holland, W. R. et P. B. Rhines, 1980** : An example of eddy-induced circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, **10**, 1010–1031.
- Hoskins, B. J., M. E. McIntyre, et A. W. Robertson, 1985** : On the use and significance of isentropic potential vorticity maps. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **111**, 877–946.
- Hua, B. L., 1994** : Skewness of the generalized centrifugal force divergence for a joint normal distribution of strain and vorticity components. *Phys. Fluids A*, **6**,

- 3200–3202.
- et D. B. Haidvogel, 1986 : Numerical simulations of the vertical structure of quasi-geostrophic turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **43**, 2923–2936.
- et P. Klein, 1998 : An exact criterion for the stirring properties of nearly two-dimensional turbulence. *Physica D*, **113**, 98–110.
- , J. C. McWilliams, et P. Klein, 1998 : Lagrangian accelerations in geostrophic turbulence. *J. Fluid Mech.*, **366**, 87–108.
- , P. Klein, et G. Lapeyre, 2000 : Formation of tracer gradients in nearly two-dimensional flows. In R. M. Kerr and Y. Kimura (eds.) , *IUTAM Symposium on Developments in Geophysical Turbulence*, Kluwer Academic Publishers, June 1999, NCAR, Boulder, Colorado, USA, pp. 127–141.
- Huang, M.-J., 1996 : Correlations of vorticity and material line elements with strain in decaying turbulence. *Phys. Fluids A*, **8**, 2203–2214.
- Ierley, G. R. et W. R. Young, 1983 : Can the western boundary layer affect the potential vorticity distribution in the Sverdrup interior of a wind gyre? *J. Phys. Oceanogr.*, **13**, 1753–1763.
- Jiménez, J., 1992 : Kinematic alignment effects in turbulent flows. *Phys. Fluids A*, **4**, 652–654.
- , A. A. Wray, P. G. Saffman, et R. S. Rogallo, 1993 : The structure of intense vorticity in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, **255**, 65–90.
- et ———, 1998 : On the characteristics of vortex filaments in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, **373**, 255–285.
- , H. K. Moffatt, et C. Vasco, 1996 : The structure of the vortices in freely decaying two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, **313**, 209–222.
- Juckes, M. N. et M. E. McIntyre, 1987 : A high resolution one layer model of breaking planetary waves in the stratosphere. *Nature*, **328**, 590–596.
- Jullien, M.-C., P. Castiglione, et P. Tabeling, 1999 : Experimental observation of the Batchelor dispersion of passive tracers. Preprint.
- Keffer, T., 1985 : The ventilation of the world’s oceans : maps of the potential vorticity field. *J. Phys. Oceanogr.*, **15**, 509–523.
- Kerr, R. M., 1985 : Higher-order derivative correlations and the alignment of small-scale structures in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, **153**, 31–58.
- , 1993 : Evidence for a singularity of the three-dimensional, incompressible Euler equations. *Phys. Fluids A*, **5**, 1725–1746.
- Kevlahan, N. K.-R. et M. Farge, 1997 : Vorticity filaments in two-dimensional turbulence : creation, stability and effect. *J. Fluid Mech.*, **346**, 49–76.
- Keyser, D., M. J. Reeder, et R. J. Reed, 1988 : A generalization of Petterssen’s frontogenesis function and its relation to the forcing of vertical motion. *Mon. Weather Rev.*, **116**, 762–780.
- Kida, S., 1981 : Motion of an elliptic vortex in a uniform shear flow. *J. Phys. Soc. Jap.*, **50**, 3517–3520.
- , 1985 : Numerical simulation of two-dimensional turbulence with high-symmetry. *J. Phys. Soc. Jap.*, **54**, 2840–2854.
- Klein, P., A.M. Tréguier, et B. L. Hua, 1998 : Three-dimensional stirring of thermohaline fronts. *J. Mar. Res.*, **56**, 589–612.

- , B. L. Hua, et G. Lapeyre, 2000 : Alignment of tracer gradient vectors in 2D turbulence. *Physica D*, **146**, 246–260.
- Koh, T.-Y. et R. A. Plumb, 2000 : Lobe dynamics applied to barotropic Rossby wave breaking. *Phys. Fluids A*, **12**, 1518–1528.
- Kolmogorov, A. N., 1941 : The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **30**, 9–13.
- Kraichnan, R. H., 1967 : Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **10**, 1417–1423.
- , 1968 : Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence. *Phys. Fluids*, **11**, 945.
- , 1971 : Inertial-range transfer in two- and three-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, **47**, 525–535.
- , 1974 : Convection of a passive scalar by a quasi-uniform random straining field. *J. Fluid Mech.*, **64**, 737–762.
- , 1975 : Statistical dynamics of two-dimensional flows. *J. Fluid Mech.*, **67**, 155–175.
- Ladyzhenskaya, O. A., 1969 : *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach.
- Lamb, H., 1932 : *Hydrodynamics*, Cambridge University Press.
- Lapeyre, G., B. L. Hua, et P. Klein, 2001 : Dynamics of orientation of gradients of active and passive scalars in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids A*, **13**, 251–264.
- , P. Klein, et B. L. Hua, 1999 : Does the tracer gradient vector align with the strain eigenvectors in 2-D turbulence? *Phys. Fluids A*, **11**, 3729–3737.
- Legras, B., D. G. Dritschel, et P. Caillol, 2001 : The erosion of a distributed two-dimensional vortex in a background straining flow. *J. Fluid Mech.*, **441**, 369–398.
- et R. Vautard, 1996 : A guide to Liapunov vectors. In T. Palmer (ed.), *Proceedings of the 1995 ECMWF Seminar on Predictability*, ECMWF, Reading, U. K., pp. 143–156.
- , P. Santangelo, et R. Benzi, 1988 : High-resolution numerical experiments for forced two-dimensional turbulence. *Europhys. Lett.*, **5**, 37–42.
- Leith, C. E., 1968 : Diffusion approximation for two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **11**, 671–673.
- Léorat, J., “La turbulence magnétohydrodynamique hélicitaire et la génération des champs magnétiques à grande échelle.” Thèse de doctorat, Université Paris 7 1975.
- Leray, J., 1934 : Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace. *Acta Math.*, **63**, 193–248.
- Lindborg, E. et K. Alvelius, 2000 : The kinetic energy spectrum of the two-dimensional enstrophy turbulence cascade. *Phys. Fluids A*, **12**, 945–947.
- Liu, M. et F. J. Muzzio, 1996 : The curvature of material lines in chaotic cavity flows. *Phys. Fluids A*, **8**, 75–83.
- Lozier, M. S. et S. C. Riser, 1990 : Potential vorticity sources and sinks in a quasigeostrophic ocean : beyond western boundary currents. *J. Phys. Oceanogr.*,

- 20, 1608–1627.
- Majda, A., 1991** : Vorticity, turbulence and acoustics in fluid flow. *SIAM Rev.*, **33**, 349–388.
- Malhotra, N. et S. Wiggins, 1998** : Geometric structures, lobe dynamics and Lagrangian transport in flows with aperiodic time dependence, with applications to Rossby wave flow. *Journal of Nonlinear Science*, **8**, 401–456.
- , **I. Mezić, et S. Wiggins, 1998** : Patchiness : a new diagnostic for Lagrangian trajectory analysis in time-dependent fluid flows. *Intern. J. Bifurc. and Chaos*, **8**, 1053.
- Maltrud, M. E. et G. K. Vallis, 1993** : Energy and enstrophy transfer in numerical simulations of two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids A*, **5**, 1760–1775.
- Mariotti, A., B. Legras, et D. G. Dritschel, 1994** : Vortex stripping and the erosion of coherent structures in two-dimensional flows. *Phys. Fluids A*, **6**, 3954–3962.
- , **M. Moustaoi, B. Legras, et H. Teitelbaum, 1997** : Comparison between vertical ozone soundings and reconstructed potential vorticity maps by contour advection with surgery. *J. Geophys. Res.*, **102**, 6131–6142.
- McDowell, S., P. Rhines, et T. Keffer, 1982** : North atlantic potential vorticity and its relation to general circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, **12**, 1417–1436.
- McIntyre, M. E., 1989** : On the Antarctic ozone hole. *J. Atmos. Terr. Phys.*, **51**, 29–43.
- **et W. A. Norton, 2000** : Potential-vorticity inversion on a hemisphere. *J. Atmos. Sc.*, **57**, 1214–1235.
- McWilliams, J. C., 1984** : The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, **146**, 21–43.
- , **1990a** : A demonstration of the suppression of turbulent cascade by coherent vortices in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids A*, **2**, 547–557.
- , **1990b** : Geostrophic vortices. In “Proc. Intl. School of Physics., Enrico Fermi,” pp. 5–50.
- , **1990c** : The vortices of geostrophic turbulence. *J. Fluid Mech.*, **219**, 387–404.
- , **J. B. Weiss, et I. Yavneh, 1994** : Anisotropy and coherent vortex structures in planetary turbulence. *Science*, **264**, 410–413.
- Melander, M. V., N. J. Zabusky, et J. C. McWilliams, 1987** : Asymmetric vortex merger in two dimensions : which vortex is “victorious” ? *Phys. Fluids*, **30**, 2610–2612.
- , ———, **et ———, 1988** : Symmetric vortex merger in two dimensions : causes and conditions. *J. Fluid Mech.*, **195**, 303–340.
- Miller, P. D., C. K. R. T. Jones, A. M. Rogerson, et L. J. Pratt, 1997** : Quantifying transport in numerically generated velocity fields. *Physica D*, **110**, 105–122.
- Moffat, H. K., 1985** : Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology. Part 1. Fundamentals. *J. Fluid Mech.*, **159**,

- 359–478.
- , **1986** : Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology. Part 2. Stability considerations. *J. Fluid Mech.*, **166**, 359–378.
- , **2000** : The interaction of skewed vortex pairs : a model for blow-up of the Navier-Stokes equations. *J. Fluid Mech.*, **409**, 51–68.
- , **S. Kida**, et **K. Ohkitani**, **1994** : Stretched vortices- the sinews of turbulence ; large-Reynolds number asymptotics. *J. Fluid Mech.*, **259**, 241–264.
- Monin, A. S.** et **A. M. Yaglom**, **1975** : *Statistical Fluid Mechanics*, MIT Press.
- Nakamura, N.**, **1996** : Two-dimensional mixing, edge formation and permeability diagnosed in an area coordinate. *J. Atmos. Sc.*, **53**, 1524–1537.
- Ngan, K.** et **T. G. Shepherd**, **1997a** : Chaotic mixing and transport in Rossby-wave critical layers. *J. Fluid Mech.*, **334**, 315–351.
- et ———, **1997b** : Comments on some recent measurements of anomalously steep N_2O and O_3 tracer spectra in the stratospheric surf zone. *J. Geophys. Res.*, **102**, 24,001–24,004.
- Nomura, K. K.** et **G. K. Post**, **1998** : The structure and dynamics of vorticity and rate of strain in incompressible homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, **377**, 65–97.
- et **P. J. Diamessis**, **2000** : The interaction of vorticity and rate of strain in homogeneous sheared turbulence. *Phys. Fluids A*, **12**, 846–864.
- et **S. E. Elghobashi**, **1992** : Mixing characteristics of an inhomogeneous scalar in isotropic and homogeneous sheared turbulence. *Phys. Fluids A*, **4**, 606–625.
- Norton, W. A.**, **1994** : Breaking Rossby waves in a model stratosphere diagnosed by a vortex-following coordinate system and a technique for advecting material contours. *J. Atmos. Sc.*, **51**, 654–673.
- Obukhov, A. M.**, **1949** : Structure of the temperature field in turbulent flow. *Izv. Akad. Nauk., SSSR, Geogr. i Geofiz.*, **13**, 58.
- O'Dwyer, J.**, **R. G. Williams**, **J. H. LaCasce**, et **K. G. Speer**, **2000** : Does the potential vorticity distribution constrain the spreading of floats in the north Atlantic? *J. Phys. Oceanogr.*, **30**, 721–732.
- Oetzel, K. G.** et **G. F. Vallis**, **1997** : Strain, vortices and the enstrophy range in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids A*, **9**, 2991–3004.
- Ohkitani, K.**, **1990** : Nonlocality in a forced two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids A*, **2**, 1529–1531.
- , **1991** : Wave number space dynamics of enstrophy cascade in a forced two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids A*, **3**, 1598–1611.
- , **1994** : Kinematics of vorticity : vorticity-strain conjugation in incompressible fluid flows. *Phys. Rev. E*, **50**, 5107–5110.
- , **1995** : Some mathematical aspects of 2D vortex dynamics. In D. Chae (ed.), *Proceedings of Partial Differential Equations and Applications*, Seoul National university.
- , **1998** : Stretching of vorticity and passive vectors in isotropic turbulence. *J. Phys. Soc. Jap.*, **67**, 3668–3671.
- et **S. Kishiba**, **1995** : Nonlocal nature of vortex stretching in an inviscid

- fluid. *Phys. Fluids A*, **7**, 411–421.
- Okubo, A., 1970** : Horizontal dispersion of floatable particles in the vicinity of velocity singularity such as convergences. *Deep-Sea Res.*, **17**, 445–454.
- Osseledec, V., 1968** : A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.*, **19**, 197–231.
- Ottino, J. M., 1989** : *The Kinematics of Mixing : Stretching, Chaos and Transport*, Cambridge University Press.
- Paireau, O., P. Tabeling, et B. Legras, 1997** : A vortex subjected to a shear : an experimental study. *J. Fluid Mech.*, **351**, 1–16.
- Paret, J. et P. Tabeling, 1997** : Experimental observation of the two-dimensional inverse energy cascade. *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 4162–4165.
- et ———, **1998** : Intermittency in the two-dimensional inverse cascade of energy : experimental observations. *Phys. Fluids A*, **10**, 3126–3136.
- , **M.-C. Jullien, et P. Tabeling, 1999** : Vorticity statistics in the two-dimensional enstrophy cascade. *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 3418–3421.
- Parker, D. J., 1998** : Barotropic instability in frontolytic strain. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **124**, 1617–1632.
- Pelz, R. B., 1997** : Locally self-similar, finite-time collapse in a high-symmetry vortex filament model. *Phys. Rev. E*, **55**, 1617–1626.
- Pierrehumbert, R. T., 1991** : Chaotic mixing of tracer and vorticity by modulated travelling Rossby waves. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **58**, 285–319.
- , **1994** : On tracer microstructure in the large-eddy dominated regime. *Chaos, Solitons and Fractals*, **4**, 1091–1110.
- et **H. Yang, 1993** : Global chaotic mixing on isentropic surfaces. *J. Atmos. Sc.*, **50**, 2462–2480.
- Pingree, R. D. et B. Le Cann, 1993** : A shallow meddy (a smeddy) from the secondary mediterranean salinity maximum. *J. Geophys. Res.*, **98**, 20,169–20,185.
- Plumb, R. A., D. W. Waugh, R. Atkinson, P. Newman, L. Lait, M. Schoeberl, E. Browell, A. Simmons, et M. Lowenstein, 1994** : Intrusions into the lower stratospheric Arctic vortex during the winter of 1991–1992. *J. Geophys. Res.*, **99**, 1089–1105.
- Poje, A. C. et G. Haller, 1999** : Geometry of cross-stream mixing in a double-gyre ocean model. *J. Phys. Oceanogr.*, **29**, 1649–1665.
- , ———, et **I. Mezic, 1999** : The geometry and statistics of mixing in aperiodic flows. *Phys. Fluids A*, **11**, 2963–2968.
- Polvani, L. M. et R. A. Plumb, 1992** : Rossby wave breaking, microbreaking, filamentation and secondary vortex formation : the dynamics of a perturbed vortex. *J. Atmos. Sc.*, **49**, 562–476.
- Ponce, G., 1985** : Remarks on a paper by J. T. Beale, T. Kato and A. Majda. *Commun. Math. Phys.*, **98**, 349.
- Prater, M. D. et T. B. Sanford, 1994** : A meddy off cape St. Vincent. Part 1 : description. *J. Phys. Oceanogr.*, **24**, 1572–1586.
- Protas, B., A. Babiano, et N. K.-R. Kevlahan, 1999** : On geometrical alignment properties of two-dimensional forced turbulence. *Physica D*, **128**,

- 169–179.
- Provenzale, A., 1999** : Transport by coherent barotropic vortices. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **31**, 55–93.
- Pumir, A. et E. Siggia, 1990** : Collapsing solutions to the 3-D Euler equations. *Phys. Fluids*, **30**, 220–241.
- Rayleigh, Lord, 1880** : On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **11**, 57–70.
- Rhines, P. B., 1983** : Lectures in geophysical fluid dynamics. *Lectures in applied mathematics*, **20**, 3–58.
- , **1986** : Vorticity dynamics of the oceanic general circulation. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **18**, 433–497.
- **et W. R. Holland, 1979** : A theoretical discussion of eddy-driven mean flows. *Dyn. Atm. Oc.*, **3**, 289–325.
- **et W. R. Young, 1982** : Homogenization of potential vorticity in planetary gyres. *J. Fluid Mech.*, **122**, 347–367.
- Rossby, C. G., 1940** : Planetary flow patterns in the atmosphere. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **66** (Suppl.), 68–87.
- Rothstein, D., E. Henry, et J. P. Gollub, 1999** : Persistent patterns in transient chaotic fluid mixing. *Nature*, **401**, 770–772.
- Ruetch, G. R. et M. R. Maxey, 1991** : Small scale features of vorticity and passive scalar fields in homogeneous isotropic turbulence. *Phys. Fluids A*, **3**, 1587–1597.
- Rupolo, V., B. L. Hua, A. Provenzale, et V. Artale, 1996** : Lagrangian velocity spectra at 700m in the Western North Atlantic. *J. Phys. Oceanogr.*, **26**, 1591–1607.
- Saffman, P. G., 1971** : On the spectrum and decay of random two-dimensional vorticity distributions at large Reynolds number. *Stud. Appl. Math.*, **50**, 377–383.
- Santangelo, P., R. Benzi, et B. Legras, 1989** : The generation of vortices in high-resolution, two-dimensional decaying turbulence and the influence of initial conditions on the breaking of self-similarity. *Phys. Fluids A*, **1**, 1027–1034.
- Sarmiento, J. L., C. G. H. Rooth, et W. Roether, 1982** : The north atlantic tritium distribution in 1972. *J. Geophys. Res.*, **87**, 8047–8056.
- Schoeberl, M. R., L. R. Lait, P. A. Newman, et J. E. Rosenfield, 1992** : The structure of the polar vortex. *J. Geophys. Res.*, **97**, 7859–7882.
- She, Z. S., E. Jackson, et S. A. Orszag, 1990** : Intermittent vortex structures in homogeneous isotropic turbulence. *Nature*, **344**, 226–228.
- Shtilman, L., M. Spector, et A. Tsinober, 1993** : On some kinematic versus dynamic properties of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, **247**, 65–77.
- Siggia, E. D., 1981** : Numerical study of small-scale intermittency in three-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, **107**, 375–406.
- Smith, L. M. et V. Yakhot, 1993** : Bose condensation and small-scale structure generation in a random force driven 2D turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 352–355.
- Sommeria, J., 1986** : Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in square box. *J. Fluid Mech.*, **170**, 139–168.
- Sreenivasan, K. R. et R. A. Antonia, 1997** : The phenomenology of

- small-scale turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **29**, 435–472.
- Tabor, M., 1989** : *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics : an Introduction*, Wiley.
- , **1992** : Stretching and alignment in general flow fields : classical trajectories from Reynolds number zero to infinity. In H. K. Moffat et al. (ed.), *Topological Aspect of the Dynamics of Fluids and Plasmas*, Kluwer Academic Publishers, pp. 83–110.
- Tang, X. Z. et A. H. Boozer, 1999** : Hamiltonian structure of hamiltonian chaos. *Phys. Let. A*, **236**, 476–480.
- Tao, B., J. Katz, et C. Meneveau, 2000** : Geometry and scale relationships in high Reynolds number turbulence determined from three-dimensional holographic velocimeter. *Phys. Fluids A*, **12**, 941–944.
- Tsinober, A., 1998a** : Is concentrated vorticity that important ? *Europ. J. Mech. B*, **17**, 421–450.
- , **1998b** : On statistics and structure(s) in turbulence. Preprint.
- , **E. Kit, et T. Dracos, 1992** : Experimental investigation of the field of velocity gradients in turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, **242**, 169–192.
- , **M. Ortenberg, et L. Shtilman, 1999** : On depression of nonlinearity in turbulence. *Phys. Fluids A*, **11**, 2291–2297.
- Tuck, A. F., 1989** : Synoptic and chemical evolution of the Antarctic vortex in late winter and early spring. *J. Geophys. Res.*, **94**, 11,687–11,737.
- Tung, K. K. et W. T. Welch, 2001** : Remarks on Charney’s note on geostrophic turbulence. *J. Atmos. Sc.*, **58**, 2009–2012.
- Vallis, G. K., 1993** : Problems and phenomenology in two-dimensional turbulence. In G. F. Carnevale and R. Pierrehumbert (eds.) , *Nonlinear Phenomena in Atmospheric and Oceanic Sciences*, Springer-Verlag, pp. 1–25.
- Vergassola, M., 1996** : Anomalous scaling for passively advected magnetic fields. *Phys. Rev. E*, **53**, 3021–3024.
- Vieillefosse, P., 1982** : Local interaction between vorticity and shear in a perfect incompressible fluid. *J. Phys. (Paris)*, **43**, 837–842.
- Vincent, A. et M. Meneguzzi, 1991** : The spatial and statistical properties of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, **225**, 1–20.
- Waugh, D. W. et D. G. Dritschel, 1991** : The stability of filamentary in two-dimensional geophysical vortex-dynamics models. *J. Fluid Mech.*, **231**, 575–598.
- et **R. A. Plumb, 1994** : Contour advection with surgery : a technique for investigating finescale structure in tracer transport. *J. Atmos. Sc.*, **51**, 530–540.
- , ———, **R. J. Atkinson, M. R. Schoeberl, L. Lait, P. A. Newman, M. Lowenstein, D. W. Toohey, et C. R. Webster, 1994** : Transport of the lower stratospheric Arctic vortex by Rossby wave breaking. *J. Geophys. Res.*, **99**, 1071–1088.
- Weiss, J.,** The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics. Technical Report LJI-TN-121ss, La Jolla Inst., La Jolla, California, USA **1981**.
- , **1991** : The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional

- hydrodynamics. *Physica D*, **48**, 273–294.
- Wiggins, S., 1992** : *Chaotic Transport in Dynamical System*, Springer.
- Yang, H., 1998** : The central barrier, asymmetry and random phase in chaotic transport and mixing by Rossby waves in a jet. *Intern. J. Bifurc. Chaos*, **8**, 1131–1152.
- Yao, H. B., D. G. Dritschel, et N. J. Zabusky, 1995** : High-gradient phenomena in 2D vortex interactions. *Phys. Fluids A*, **7**, 539–548.