

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité

Océanologie, Météorologie et Environnement

présentée par

Gwendal Rivière

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet de la thèse :

Dynamique locale de la croissance des perturbations dans les écoulements quasigéostrophiques et prévisibilité

soutenue le 30 septembre 2002

devant le jury composé de :

M. Vladimir Tseitline
M. Xavier Carton
M. Alain Joly
M. Bernard Legras
Mme Bach Lien Hua
M. Patrice Klein

Président du jury
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Co-directrice de thèse
Co-directeur de thèse

Remerciements

Ce manuscrit de thèse est le fruit de plusieurs collaborations et rencontres et je voudrais remercier tous ceux qui y ont participé.

Je suis très reconnaissant à Lien Hua pour le dynamisme, l'enthousiasme et la rigueur avec lesquels elle a dirigé mon travail de thèse ainsi que pour toutes les orientations de recherche fructueuses vers lesquelles elle a su m'orienter. J'ai beaucoup apprécié aussi chez Lien sa grande disponibilité, ses conseils judicieux qu'ils soient scientifiques ou non et son sens aigu du "coaching". Je tiens également à remercier Patrice Klein pour toutes les réflexions constructives et pertinentes qu'il a apportées à mon travail ainsi que pour ses encouragements permanents. J'ai beaucoup aimé les discussions très enrichissantes et très motivantes que nous avons eues à trois avec Lien et Patrice dont les différents points de vue m'ont permis d'élargir fortement mes connaissances en dynamique des fluides géophysiques.

Je voudrais remercier Olivier Talagrand pour l'intérêt constant qu'il a porté à mon travail de recherche et pour avoir bien voulu être dans mon comité de thèse.

Je remercie Alain Joly et Xavier Carton pour avoir bien voulu être les rapporteurs de ma thèse et pour l'attention qu'ils ont portée à ce manuscrit ainsi que Bernard Legras et Vladimir Tseitline pour avoir accepté d'être membres de mon jury.

Je suis bien évidemment reconnaissant à de nombreuses personnes du LMD-ENS. Merci d'abord aux directeurs du LMD, Claude Basdevant et Hervé Letreut, qui m'ont aidé dans les démarches administratives et notamment pour mon après-thèse. Je tiens à remercier Marie-Christine Roos, Gabriel Rabreau et Frédéric Bongat pour leur aide quotidienne et leur capacité à résoudre mes problèmes administratifs ou informatiques.

Mes remerciements vont également aux chercheurs du LMD et aux thésards ou ex-thésards du LMD (Fabio D'Andrea, Ludovic Auger, Mahdi Ben Jelloul, Guillem Candille, Vincent Daniel, Thomas Dubos, Guillaume Lapeyre, Julien Le Sommer, Riwal Plougonven, Alexandre Stegner ...) pour les diverses discussions scientifiques, pour leur aide en informatique mais aussi et surtout pour la chaleureuse ambiance qu'ils ont su créer au sein du laboratoire.

Enfin, je voudrais remercier ma famille et en particulier saluer la mémoire de ma mère qui m'a fortement soutenu pendant mes études et le début de cette thèse mais qui n'a pas eu la joie d'en voir la fin. Un grand merci à Irina, ma femme, pour son soutien quotidien, ses encouragements et sa patience tout au long de cette thèse.

à Irina.

Table des matières

Préambule	11
1 Etude des instabilités dans les écoulements parallèles, stationnaires	15
1.1 Introduction	15
1.2 Méthodes	18
1.2.1 Méthode classique de l'instabilité modale ou des modes normaux . .	18
1.2.2 Exemple de croissance sans instabilité modale : le mécanisme d'Orr	18
1.2.3 Méthode de l'instabilité généralisée ou des vecteurs singuliers	21
1.3 Application à un cas simple : le modèle à deux couches de Phillips	24
1.3.1 Résumé des résultats de l'article I	24
1.3.2 article I	26
2 Croissance locale des perturbations dans les écoulements quasigéostrophiques barotropes	41
2.1 Introduction	41
2.2 Contexte et discussion sur l'approche suivie	42
2.2.1 Equation du mouvement linéarisée sous la forme lagrangienne . . .	42
2.2.2 Notion d'instabilité localisée	45
2.2.3 Approche suivie : analyse de l'équation d'orientation du vecteur vitesse perturbée	46
2.3 Interprétation du terme d'extraction barotrope	47
2.3.1 L'alignement du vecteur vitesse perturbée comme mécanisme d'extraction	47
2.3.2 Exemple du champ de déformation pur	48
2.3.3 Introduction du taux d'extraction exponentiel	50
2.4 Dynamique d'alignement du vecteur vitesse perturbée	50
2.4.1 Analogie avec les gradients de traceur	50
2.4.2 Approximation de l'équation d'orientation	53

2.4.3	Résumé des indices de croissance	57
2.5	Interprétation de nos résultats analytiques dans deux cas simples	58
2.5.1	Le mécanisme d'Orr	58
2.5.2	Le champ de déformation pur	62
2.6	Résultats numériques	67
2.6.1	Le modèle quasigéostrophique à bassin fermé	67
2.6.2	Dynamique d'alignement	68
2.7	Discussion	77
2.7.1	Par rapport à nos résultats	77
2.7.2	Par rapport aux méthodes existantes	78
3	Croissance locale des perturbations dans les écoulements quasigéostrophiques quelconques	83
3.1	Introduction	83
3.2	Equations d'évolution des perturbations	84
3.2.1	Evolution tridimensionnelle de la fonction de courant perturbée	84
3.2.2	Equation locale de l'énergie totale de la perturbation	86
3.2.3	Définition des taux d'extraction exponentiels barotrope et barocline d'énergie totale	87
3.3	Dynamique d'alignement du gradient 3D de la fonction de courant perturbée	89
3.3.1	Influence de la déformation horizontale et du cisaillement vertical	89
3.3.2	Diagnostic analytique des termes agéostrophiques	92
3.3.3	Approximation des équations d'orientation	94
3.3.4	Résumé des calculs analytiques	95
3.4	Interprétation de nos résultats analytiques dans le cas simple d'un écoulement cisailé linéairement selon la verticale	95
3.5	Résultats numériques	97
3.5.1	Alignement du gradient 3D de la fonction de courant perturbée	97
3.5.2	Rapport entre les taux de conversion barotrope et barocline	101
3.5.3	Comparaison avec le paramètre d'Eady	102
3.5.4	Localisation spatiale des champs d'erreur	102
3.6	Discussion	108
4	Prévisibilité et croissance de l'erreur initiale	111
4.1	Introduction	111
4.2	Méthodes classiques	114
4.2.1	Vecteurs singuliers	114

4.2.2	Simulation de "bred modes"	116
4.3	Initialisation d'une perturbation unique à partir de la dynamique locale de croissance	118
4.3.1	Détermination de la perturbation de vitesse initiale	118
4.3.2	Localisation des régions de production et de destruction	119
4.3.3	Détails de l'algorithme	123
4.3.4	Résumé	125
4.4	Résultats numériques et comparaison des différentes méthodes de prévisions uniques	125
4.4.1	Structures initiales des différentes perturbations	126
4.4.2	Localisation spatiale de l'erreur	133
4.5	Discussion	141
	Conclusion générale	143
A	Article II : Perturbation growth in terms of barotropic alignment properties	147
B	Article III : Perturbation growth in terms of baroclinic alignment properties	171
	Références	194

Préambule

Les erreurs des modèles prognostiques qui déterminent l'état futur de l'atmosphère ou de l'océan ont deux origines bien distinctes : la première est liée à la paramétrisation des phénomènes physiques et est donc liée à l'erreur intrinsèque du modèle tandis que la deuxième est liée à la croissance de l'erreur due aux incertitudes sur l'état initial de l'écoulement. Ce deuxième type d'erreur est la cause majeure des erreurs de prévisions à court terme (1 à 2 jours dans l'atmosphère, 10 à 20 jours dans l'océan). Il est donc nécessaire pour améliorer la prévision en météorologie et en océanographie d'estimer de manière fiable et quantitative l'erreur due à ces incertitudes initiales qui a crû entre l'instant initial et l'instant de la prévision. L'approche classique pour étudier l'évolution de l'erreur est de considérer un écoulement dit de référence, puis d'effectuer des simulations prognostiques dont l'état initial correspond à l'écoulement de référence auquel une perturbation est rajoutée. Cette perturbation peut croître *en extrayant de l'énergie à l'écoulement de référence par les mécanismes d'instabilité présents dans cet écoulement* : dans ce cas, la croissance de l'erreur est ainsi interprétée comme la croissance de l'énergie de la perturbation.

La problématique de la croissance de l'erreur dans les modèles prognostiques est étroitement liée à la problématique de la cyclogénèse. Dans le cas de l'atmosphère, ce phénomène est défini comme la naissance de cyclones et d'anticyclones aux moyennes latitudes qui émergent en raison du gradient méridien de température entre le pôle et l'équateur. Ce gradient de température crée un jet en haut de la troposphère et la formation des cyclones est ainsi décrit comme la croissance de perturbations qui extraient de l'énergie au jet. Des phénomènes analogues se produisent dans l'océan.

Une description complète de la littérature concernant ces deux problématiques est fournie dans les chapitres correspondants de la thèse et n'est donc pas rappelée ici.

Afin d'apporter des éléments de réponse aux deux problématiques citées plus haut, *l'objet de la thèse est d'améliorer la compréhension des mécanismes qui amènent à la croissance des perturbations dans les écoulements géophysiques spatialement et temporellement complexes. Plus précisément, on cherche à identifier les régions où la croissance*

des perturbations est la plus forte et à quantifier cette croissance. La situation physique choisie est liée à la problématique des échelles synoptiques des moyennes latitudes pour lesquelles les perturbations croissent par interactions baroclines et barotropes.

Nous allons nous placer dans le cadre des équations quasigéostrophiques qui permettent une première approche pour l'étude des problématiques citées ci-dessus.

Dans un premier temps, nous allons rappeler les mécanismes de base de l'instabilité barocline dans les écoulements simples, parallèles et stationnaires. Dans ce cadre, deux types de théorie peuvent expliquer la croissance des perturbations et leur amplification : la théorie modale (ou des modes normaux) et la théorie non modale (notamment celle des vecteurs singuliers) ; leurs caractéristiques et différences sont rappelées dans le premier chapitre. Une intercomparaison systématique de ces deux théories est développée dans le cas particulier du modèle à deux couches de Phillips et a fait l'objet de la publication d'un article (Rivière et al. 2001) qui est inclus à la fin de ce premier chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous développons une nouvelle approche pour estimer et quantifier la croissance des perturbations dans les écoulements quasigéostrophiques barotropes quelconques. La méthode que nous mettons en place a le mérite d'obtenir analytiquement des diagnostics de croissance pour des écoulements quasigéostrophiques complexes dont la seule hypothèse est l'hypothèse barotrope. Les diagnostics analytiques obtenus se révèlent pertinents au vu des résultats numériques effectués dans la situation océanique classique du double-gyre forcé par le vent. Notre nouvelle méthode est détaillée dans un article accepté pour "Quarterly journal of the royal meteorological society" (Rivière et al. 2002a) placé dans l'annexe A.

Dans le troisième chapitre, nous généralisons la méthode précédente dans le cas des écoulements quasigéostrophiques quelconques où les interactions barotropes et baroclines entre la perturbation et l'écoulement de base interviennent (soit séparément, soit conjointement). De nouveau, cette méthode analytique aboutit à des diagnostics pertinents pour estimer la croissance des perturbations et explique la façon dont le cisaillement vertical de la vitesse de l'écoulement de base interagit avec le champ de déformation de l'écoulement de base pour faire évoluer les structures tridimensionnelles des perturbations. L'article soumis à "Quarterly journal of the royal meteorological society" (Rivière et al. 2002b) détaillant ces résultats est inclus dans l'annexe B.

Les deuxième et troisième chapitres de la thèse, d'une part permettent de mieux comprendre les mécanismes locaux de croissance des perturbations et d'autre part aboutissent à une estimation pertinente de cette croissance dans les écoulements quasigéostrophiques complexes. Ces résultats correspondent à des *diagnostics instantanés* alors que le dernier chapitre adresse le problème de la croissance de l'erreur *au bout d'un temps fini*. Le qua-

trième chapitre est ainsi consacré à une application des résultats précédents aux problèmes de prévisibilité et plus particulièrement au problème de la croissance de l'erreur initiale. A partir des critères analytiques établis dans les chapitres précédents, nous initialisons une perturbation unique dont l'évolution simule bien la croissance de l'erreur moyenne obtenue par une méthode de Monte-Carlo (ensemble de perturbations aléatoires). L'évolution de notre perturbation est comparée favorablement à celle obtenue à partir de la méthode des vecteurs singuliers qui est la méthode perturbative utilisée au centre de prévision météorologique (ECMWF). L'algorithme d'initialisation de la perturbation unique est l'aspect original du dernier chapitre et correspond à une nouvelle méthode perturbative pertinente pour décrire la dynamique de la croissance de l'erreur initiale. Les résultats de ce chapitre font l'objet d'une publication en cours de rédaction.

Chapitre 1

Etude des instabilités dans les écoulements parallèles, stationnaires

1.1 Introduction

Les moyennes latitudes sont caractérisées par un gradient méridien de température entre le pôle et l'équateur qui crée un vent zonal cisailé verticalement. Ce cisaillement du vent zonal reflète l'énergie potentielle disponible de l'écoulement de base qui peut être extraite par l'interaction avec une perturbation. Ce mécanisme d'interaction appelé barocline qui aboutit généralement à la croissance de l'énergie cinétique de la perturbation est le mécanisme principal expliquant la formation de cyclones et d'anticyclones aux moyennes latitudes. L'interaction barocline est le moteur du phénomène appelé cyclogénèse. Pour essayer de comprendre et quantifier l'instabilité barocline¹, Charney (1947) et Eady (1949) se sont placés dans le cadre d'un cisaillement vertical du vent zonal constant dans le temps et ne variant ni dans la direction zonale ni dans la direction méridienne. Cet écoulement très idéalisé de l'atmosphère fait partie de la catégorie dite des écoulements parallèles, stationnaires qui ont été initialement étudiés dans le cadre plus large de la mécanique des fluides par Rayleigh (1880) et Kelvin (1887) à l'aide de la méthode des modes normaux. Cette méthode consiste à linéariser les équations autour de l'écoulement dit de référence, à calculer les valeurs propres de l'opérateur linéaire obtenu, et à déterminer si ces valeurs propres ont une partie réelle positive ou non. Dans le cas affirmatif, il y a présence d'un mode normal instable et l'instabilité associée est dite modale. Dans le cas le plus simple d'un vent zonal cisailé dans la direction méridienne $\vec{u} = U(y)\vec{e}_x$, Rayleigh (1880) montre

¹Dans le chapitre 1, le terme d'instabilité barocline est utilisé plutôt qu'interaction barocline car est approprié pour l'étude théorique des écoulements parallèles, stationnaires

qu'une condition nécessaire pour qu'il y ait une instabilité modale est que le profil de vitesse $U(y)$ doit avoir un point d'inflexion (U_{yy} doit changer de signe au moins une fois) : c'est le critère de Rayleigh. Charney et Eady se sont inspirés de ces travaux sur les modes normaux pour l'appliquer au cas atmosphérique : ainsi en se plaçant dans le cadre des équations quasigéostrophiques, en présence d'un vent zonal avec un cisaillement vertical linéaire $\vec{u} = \Lambda z \vec{e}_x$, ils ont montré que pour des perturbations sous la forme exponentielle $\exp(ik(x - ct))$, il existe un intervalle de nombres d'onde k pour lesquels c a une partie imaginaire et l'instabilité modale existe. En raison du succès de la théorie pour prédire l'échelle, la croissance, et la structure des cyclones, cette approche a largement été développée depuis pour l'étude de la cyclogénèse et des problèmes de prévisibilité. En plus de ces deux études qui se sont focalisées sur les modes normaux autour d'un écoulement de référence donné (vent zonal avec un cisaillement vertical linéaire), il existe des théorèmes basés aussi sur les modes normaux et comparables à celui de Rayleigh, qui donnent des conditions nécessaires d'instabilité portant sur la forme de l'écoulement de référence pour les instabilités barotropes et baroclines (Kuo 1949, Charney et Stern 1962). La méthode des modes normaux ne peut cependant pas expliquer certaines caractéristiques de l'atmosphère ; la cyclogénèse peut être caractérisée parfois par une croissance initiale explosive et les observations montrent aussi que les structures spatiales des perturbations évoluent au cours du temps alors que les structures des modes normaux sont indépendantes du temps.

On sait depuis le travail de Orr (1907) que la description modale est incomplète (les modes normaux ne représentent qu'une partie des solutions) et qu'une croissance transitoire importante des perturbations peut émerger sans instabilité modale. Cependant deux raisons expliquent que l'intérêt pour l'instabilité non modale n'apparait que dans les années 80 avec les articles de Farrell (1982) et Farrell (1984) : la première est que la théorie modale a pu représenter un certain nombre de phénomènes atmosphériques comme on l'a dit précédemment ; la deuxième est que pour les temps longs les modes normaux émergent et l'autre partie de la solution décroît (Case 1960, Pedlosky 1964). Farrell (1982) a repris le modèle simple d'Eady pour étudier la croissance initiale de la perturbation sans se focaliser sur les temps longs. Il a pris l'ensemble des solutions, les modes normaux discrets mais aussi la partie de la solution liée à une vorticité potentielle non uniforme qu'on appelle le spectre continu. Il a montré que le spectre continu peut interagir avec les modes normaux discrets pour créer une perturbation qui croît plus fortement que le mode normal instable au cours du développement initial. L'idée originelle de Farrell de faire interagir deux types de solutions a été reprise par Rotunno et Fantini (1989) : en filtrant le spectre continu, ils parviennent à trouver des solutions instables au delà du nombre d'onde de

coupure d'Eady en faisant interagir deux modes neutres normaux. En fait, la possibilité d'obtenir une croissance de la perturbation à partir de deux modes neutres vient du fait que ces deux modes ne sont pas orthogonaux pour le produit scalaire utilisé (par exemple l'énergie cinétique); ainsi ils peuvent interagir pour extraire de l'énergie à l'écoulement zonal (Held 1985).

Finalement l'idée de trouver la perturbation qui optimise le taux de croissance d'une norme physique donnée apparait dans les articles de Farrell (1989a), O'Brien (1992) et Davies et Bishop (1994). Plusieurs méthodes sont utilisées dans ces articles notamment le principe variationnel ou le recours au biorthogonal du mode le plus instable mais une formulation plus aisée apparait qui est la méthode des modes singuliers. Effectuons brièvement un rappel historique de la méthode des modes singuliers. Cette méthode introduite en météorologie par Lorenz (1965) et reprise par Lacarra et Talagrand (1988) pour encadrer la croissance de l'erreur initiale permet de façon systématique de trouver la perturbation initiale qui optimise pour une norme donnée au bout d'un instant T la croissance de l'instabilité : cette perturbation initiale est en fait vecteur propre de $\mathbf{M}^*\mathbf{M}(T)$ où $\mathbf{M}(T)$ est la résolvante du modèle linéarisé et $\mathbf{M}^*(T)$ est son adjoint pour le produit scalaire choisi. Elle est donc très vite utilisée à partir de l'approximation linéaire tangente pour étudier des écoulements complexes : Farrell et Moore (1992) et Moore et Farrell (1993) dans un océan quasigéostrophique, Borges et Hartmann (1992) et Yoden et Nomura (1993) dans une atmosphère barotrope. Joly (1995) étudie ces modes singuliers dans le cadre d'écoulements frontaux bidimensionnels dans un modèle semigéostrophique avec vorticité potentielle uniforme. Depuis cette m ethod est largement utilisée en pratique dans les modèles de prévision météorologiques. En ce qui concerne l'étude des instabilités, cette m ethod qu'on appelle m ethod de l'instabilité généralisée est d evvelopp ee dans l'article de Farrell et Ioannou (1996a). Les principaux résultats de cette théorie de l'instabilité généralisée sont pr esent es dans la section 1.2.3 de ce chapitre tandis que les points importants de la m ethod des vecteurs singuliers lorsqu'elle est utilisée pour la prévision d'ensemble sont rappelés dans le chapitre 4 qui traite des problèmes de prévisibilité.

L'idée de ce premier chapitre est de détailler les deux méthodes, l'instabilité modale et l'instabilité généralisée et de comparer dans un cas simple d'écoulement parallèle stationnaire instable barocliniquement, en l'occurrence le modèle à deux couches de Phillips (1954), la différence de comportement entre modes normaux et modes singuliers. L'intérêt est double : d'une part, d'étudier le mécanisme de croissance des modes singuliers dans un cas simple avant de les utiliser dans un cas plus complexe dans le chapitre 4; d'autre part de mieux comprendre les mécanismes qui permettent à la perturbation d'extraire de l'énergie à l'écoulement de base pour aborder l'instabilité localisée des chapitres 2 et 3

(par exemple mise en valeur de l'importance des structures spatiales des perturbations). Ces modes singuliers ont déjà été étudiés analytiquement dans un cas simple linéaire par Fischer (1998) où il a choisi le modèle d'Eady avec vortacité potentielle uniforme : il a donc lui aussi filtré le spectre continu. Dans le cas du modèle à deux couches de Phillips (1954), deux paramètres en plus du modèle d'Eady apparaissent, l'effet de β et de la différence de hauteurs de couches utile pour représenter le cas océanique ; ces deux paramètres sont importants et accentuent significativement la différence entre modes normaux et modes singuliers comme cela est montré dans l'article de Rivière et al. (2001) à la fin du chapitre.

1.2 Méthodes

1.2.1 Méthode classique de l'instabilité modale ou des modes normaux

Si on linéarise les équations du mouvement autour d'un écoulement de référence, on obtient l'équation vérifiée par le vecteur d'état de la perturbation ϕ sous la forme suivante

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \Lambda \phi, \quad (1.1)$$

où Λ est l'opérateur linéaire lié aux équations du mouvement et à l'écoulement de référence. Si initialement $\phi(0)$ est vecteur propre de Λ avec la valeur propre σ , alors $\phi(t) = \phi(0)e^{\sigma t}$, la croissance de la perturbation est exponentielle quelle que soit la norme et la structure de la perturbation n'évolue pas dans le temps. La méthode des modes normaux consiste donc à considérer les perturbations sous la forme des vecteurs propres de Λ , et les perturbations sont ainsi appelées les modes normaux. La méthode des modes normaux fait en général intervenir les conditions limites des perturbations. En effet, pour mettre les équations sous la forme (1.1) dans le cadre des modèles d'Eady et de Charney, les conditions limites ont un rôle primordial. De plus, dans le cadre du théorème de Charney-Stern, les propriétés au bord du domaine d'intégration des perturbations sont cruciales pour obtenir les critères d'instabilité. Cet aspect important lié aux conditions limites doit être gardé à l'esprit car notre approche locale décrite au chapitre 2 ne fait pas intervenir cette dépendance par rapport aux conditions limites.

1.2.2 Exemple de croissance sans instabilité modale : le mécanisme d'Orr

Le mécanisme d'Orr (1907) est un modèle très simple pour comprendre d'abord la nature des instabilités de cisaillement et l'importance des structures spatiales par rapport

à l'écoulement de base et aussi l'origine de l'instabilité non modale. On considère dans un plan (Ox, Oy) , un écoulement de référence avec une vitesse zonale cisailée linéairement dans la direction méridienne $\vec{u} = Sy\vec{e}_x$ avec $S > 0$. On suppose que le domaine est infini, que le fluide est incompressible et on ne prend pas en compte la rotation. On note de plus respectivement ψ' et ω' la fonction de courant et la vorticité des perturbations. Dans ce contexte, la linéarisation de l'équation de conservation de la vorticité s'écrit ainsi

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + Sy \frac{\partial \omega'}{\partial x} = 0, \quad (1.2)$$

où la vorticité de la perturbation est simplement advect e par l'écoulement de référence. Si   l'instant initial, la perturbation a la forme suivante :

$$\omega'(x, y, t = 0) = F(x, y), \quad (1.3)$$

alors l'évolution future est simplement d termin e par

$$\omega'(x, y, t) = F(x - Syt, y). \quad (1.4)$$

Consid rions à l'instant initial $t = 0$, une perturbation de la forme suivante

$$F(x, y) = A \cos(kx + ly), \quad (1.5)$$

avec $k > 0$. Alors la vorticité perturb e évolue selon l'équation

$$\omega'(x, y, t) = A \cos(kx + (l - kSt)y), \quad (1.6)$$

et la fonction de courant vaut donc

$$\psi' = \frac{-A \cos(kx + (l - kSt)y)}{k^2 + (Stk - l)^2}. \quad (1.7)$$

L'énergie cinétique de la perturbation a ainsi la forme suivante :

$$K' = \frac{A^2 \sin^2(kx + (l - kSt)y)}{2(k^2 + (Stk - l)^2)}, \quad (1.8)$$

ce qui moyenn e sur une longueur d'onde vaut

$$\langle K' \rangle = \frac{A^2}{4(k^2 + (Stk - l)^2)}, \quad (1.9)$$

Le rapport entre l'énergie cinétique à l'instant t et l'énergie cinétique à l'instant initial vaut :

$$\frac{\langle K' \rangle}{\langle K'_0 \rangle} = \frac{k^2 + l^2}{k^2 + (Stk - l)^2}. \quad (1.10)$$

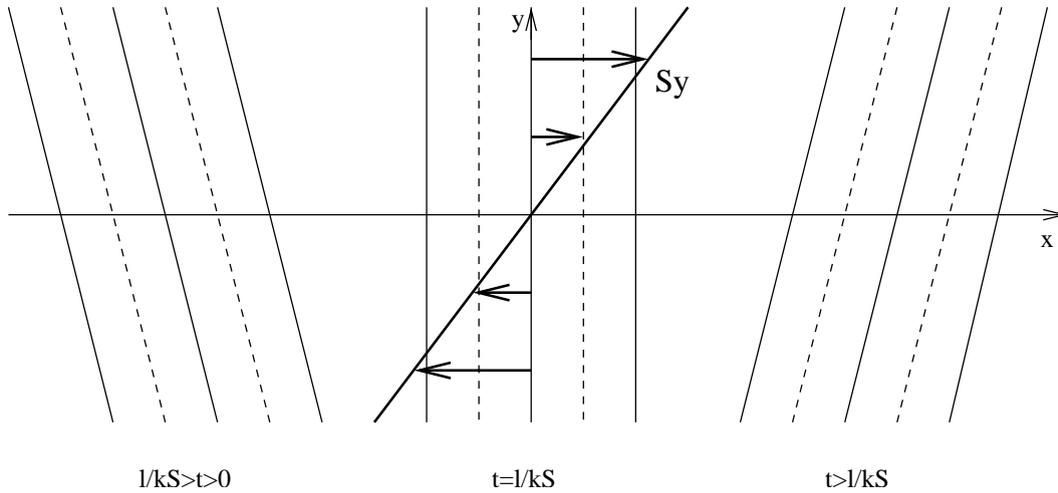


FIG. 1.1 – Evolution temporelle de la perturbation dont la vorticité à l’instant initial a la forme $\omega' = A \cos(kx + ly)$ avec $l > 0$ dans l’écoulement de référence donné par $\vec{u} = Sy\vec{e}_x$: le profil de vitesse est représenté par les flèches en gras et les isolignes de vorticité perturbée par la succession des lignes continues et des lignes en tirets. Pour $l/kS > t > 0$, croissance transitoire de la perturbation et pour $t > l/kS$, décroissance.

On remarque que si l est négatif, l’énergie cinétique de la perturbation décroît quelque soit $t > 0$. Par contre, si l est positif, l’énergie cinétique de la perturbation commence par croître jusqu’à l’instant déterminé par $t = l/kS$, puis va ensuite décroître. Il y a donc pour certaines perturbations, une instabilité transitoire même s’il n’existe pas d’instabilité modale. L’idée est que le mécanisme d’Orr est un mécanisme important lorsque la perturbation croît suffisamment et atteint des amplitudes telles que les termes non linéaires deviennent importants ; dans ce cas l’éventuelle décroissance est insignifiante.

Interprétation géométrique en termes de structures spatiales des perturbations

Il est facile de retrouver les résultats ci-dessus sans calcul, en considérant que l’écoulement ne fait qu’advecter la vorticité perturbée. Si à l’instant initial, l est positif, alors les isolignes de vorticité perturbée ont une inclinaison opposée à celle du profil de vitesse (cf figure 1.1) ; lors de l’évolution jusqu’à l’instant $t = l/kS$, les isolignes de vorticité perturbée vont s’écarter les unes des autres lorsque leur inclinaison va se rapprocher de la verticale ; ainsi puisqu’il y a conservation de la vorticité, les amplitudes des vitesses vont croître car la vorticité est faite des dérivées spatiales de la vitesse. Lorsque la perturbation est penchée dans le même sens que celui décrit par le profil de vitesse ($t > l/kS$), par le même raisonnement, on trouve que les vitesses de la perturbation vont décroître. Ce

mécanisme d'instabilité transitoire a été remis en avant par Farrell (1982) pour expliquer la croissance explosive de la cyclogénèse et sert à l'heure actuelle à rationaliser les propriétés d'évolution temporelle des vecteurs singuliers utilisés au centre européen (Hoskins et al. 2000). Ce mécanisme met aussi en relief l'importance des structures spatiales des perturbations par rapport à l'écoulement de référence pour leur croissance future. Cette notion de "tilt against the shear" est cruciale pour comprendre les phénomènes d'instabilités barotropes et baroclines à la fois dans les écoulements simples d'Eady ou de Phillips mais aussi dans les écoulements plus complexes étudiés dans les chapitres ultérieurs.

Le cas du mécanisme d'Orr ne vérifie pas la condition nécessaire d'instabilité modale de Rayleigh pour deux raisons : d'abord, parceque le profil de vitesse est linéaire et n'a donc pas de point d'inflexion et ensuite parceque le mécanisme d'Orr se place dans un plan infini et ne considère pas de conditions limites. Ceci explique que dans le mécanisme d'Orr, il n'existe pas d'instabilité modale mais simplement une instabilité transitoire non modale. Ce mécanisme servira d'exemple simple pour illustrer la méthode analytique mise en place au chapitre 2 pour déterminer des diagnostics de croissance de perturbations dans des écoulements complexes.

1.2.3 Méthode de l'instabilité généralisée ou des vecteurs singuliers

Si on considère une norme donnée $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$, le but de la méthode est de trouver la perturbation qui maximise le taux d'amplification suivant

$$\frac{\langle \phi(t), \phi(t) \rangle_S}{\langle \phi(0), \phi(0) \rangle_S}. \quad (1.11)$$

Si on note Φ le vecteur colonne formé par les composantes canoniques de ϕ (la base canonique étant liée à une norme) et \mathbf{A} la matrice de l'opérateur Λ dans cette base, l'équation (1.1) nous amène à l'équation matricielle suivante

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mathbf{A}\Phi, \quad (1.12)$$

et la résolvante associée à ce système $\mathbf{M}(t)$ est

$$\Phi(t) = \mathbf{M}(t)\Phi(0). \quad (1.13)$$

Le taux d'amplification pour la norme $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ vaut donc

$$\frac{\langle \phi(t), \phi(t) \rangle_S}{\langle \phi(0), \phi(0) \rangle_S} = \frac{\Phi(t)^* \mathbf{S} \Phi(t)}{\Phi(0)^* \mathbf{S} \Phi(0)} = \frac{\Phi(0)^* \mathbf{M}(t)^* \mathbf{S} \mathbf{M}(t) \Phi(0)}{\Phi(0)^* \mathbf{S} \Phi(0)} = \frac{\Phi(0)^* \mathbf{S} (\mathbf{S}^{-1} \mathbf{M}(t)^* \mathbf{S} \mathbf{M}(t)) \Phi(0)}{\Phi(0)^* \mathbf{S} \Phi(0)}, \quad (1.14)$$

où \mathbf{S} est la matrice représentant la norme $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{S}}$ et \cdot^* désigne le transposé. La solution optimale est obtenue lorsque $\Phi(0)$ est le vecteur propre de $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}^*(t)\mathbf{S}\mathbf{M}(t)$ correspondant à la plus grande valeur propre, $\Phi(0)$ est alors appelé vecteur singulier. La valeur propre associée est égale au maximum d'amplification (1.14).

Dans des modèles très idéalisés, \mathbf{A} ne dépend pas du temps, on a alors $\mathbf{M}(t) = \exp(\mathbf{A}t)$, et les vecteurs singuliers sont les vecteurs propres de $\mathbf{S}^{-1}\exp(\mathbf{A}^*t)\mathbf{S}\exp(\mathbf{A}t)$. Si $\Phi(0)$ est vecteur propre de \mathbf{A} alors le comportement de $\Phi(t)$ est "normal" et l'amplification (1.14) est égale à $\exp(2\text{Re}(\sigma)t)$, où σ est la valeur propre de \mathbf{A} et ceci quel que soit la norme choisie \mathbf{S} . Comme on l'illustre dans la suite de cette section, *la différence essentielle entre vecteurs singuliers et vecteurs normaux provient de la nonorthogonalité des vecteurs normaux. C'est le cas lorsque la matrice \mathbf{A} n'est pas normale ($\mathbf{A}^*\mathbf{A} \neq \mathbf{A}\mathbf{A}^*$).*

Exemple à deux dimensions

Plaçons nous dans le cas simple d'un système à deux dimensions, pour $S = I$ et pour \mathbf{A} indépendant du temps. On note Φ_+, Φ_- les deux vecteurs propres de \mathbf{A} avec les valeurs propres respectives σ_+, σ_- . On suppose que le mode normal Φ_+ est plus instable que le mode normal Φ_- et donc $\text{Re}(\sigma_+) > \text{Re}(\sigma_-)$. On note Φ_{SV} et σ_{SV} , le vecteur singulier le plus instable et sa valeur propre associée, il vérifie donc $e^{\mathbf{A}^*t}e^{\mathbf{A}t}\Phi_{SV} = \sigma_{SV}\Phi_{SV}$. N'importe quelle perturbation peut s'écrire dans la base des vecteurs normaux, $\Phi_0 = \alpha_+\Phi_+ + \alpha_-\Phi_-$, puis de manière générale on a

$$\begin{aligned}\Phi(t)^*\Phi(t) &= \Phi_0^*e^{\mathbf{A}^*t}e^{\mathbf{A}t}\Phi_0 \\ &= (\bar{\alpha}_+\Phi_+^* + \bar{\alpha}_-\Phi_-^*)e^{\mathbf{A}^*t}e^{\mathbf{A}t}(\alpha_+\Phi_+ + \alpha_-\Phi_-) \\ &= |\alpha_+|^2e^{2\text{Re}(\sigma_+)t}\Phi_+^*\Phi_+ + |\alpha_-|^2e^{2\text{Re}(\sigma_-)t}\Phi_-^*\Phi_- + 2\text{Re}(\bar{\alpha}_+\alpha_-e^{(\bar{\sigma}_++\sigma_-)t})\Phi_+^*\Phi_-.\end{aligned}$$

Le premier terme dans le membre de droite est lié à la partie de la perturbation qui croît exponentiellement de la même manière que le mode normal Φ_+ , le deuxième est l'exponentielle de l'autre mode normal Φ_- , et le troisième peut être croissant et est lié à la nonorthogonalité des modes normaux.

Dans le cas où les modes normaux sont orthogonaux, le troisième terme s'annule et l'amplification de la perturbation est majorée par l'amplification du mode normal le plus instable, $e^{2\text{Re}(\sigma_+)t}$:

$$\frac{\Phi(t)^*\Phi(t)}{\Phi(0)^*\Phi(0)} = \frac{|\alpha_+|^2e^{2\text{Re}(\sigma_+)t}\Phi_+^*\Phi_+ + |\alpha_-|^2e^{2\text{Re}(\sigma_-)t}\Phi_-^*\Phi_-}{|\alpha_+|^2\Phi_+^*\Phi_+ + |\alpha_-|^2\Phi_-^*\Phi_-} \leq e^{2\text{Re}(\sigma_+)t}, \quad (1.16)$$

et on a l'égalité entre le mode normal le plus instable et le premier vecteur singulier, $\Phi_{SV} = \Phi_+$ et $\sigma_{SV} = \exp(\sigma_+t)$.

Dans le cas où les modes normaux ne sont pas orthogonaux, le troisième terme fait que l'amplification de la perturbation peut-être supérieure à l'amplification du mode normal le plus instable. Dans le cas simple d'Eady pour les nombres d'onde inférieurs au nombre d'onde de coupure, la croissance peut donc être caractérisée par la somme d'une exponentielle et d'une fonction croissante sinusoidale (le troisième terme) qui fait que la croissance est plus importante que la croissance exponentielle du mode normal instable. Au delà du nombre d'onde de coupure, les deux premiers termes ne sont plus fonction du temps car les parties réelles de σ_+ et σ_- n'existent plus ; par contre, le troisième terme peut mettre en évidence une croissance transitoire de la perturbation de la même façon que dans le mécanisme d'Orr.

La notion de biorthogonal : optimisation pour les temps longs

La présentation suivante provient à la fois de l'article de Farrell et Ioannou (1996a) et à la fois de celui de Moore et Mariano (1999). Elle permet, en reprenant le cas simple à deux dimensions précédent, d'introduire la notion de biorthogonal. On suppose que les deux modes normaux Φ_+, Φ_- sont non orthogonaux. Le schéma de la figure 1.2 permet d'interpréter de manière simple la notion de biorthogonal, on a placé Φ_+ et Φ_- en OA et OB. On note Φ'_+, Φ'_- les vecteurs propres de l'adjointe à la résolvante $\mathbf{M}^*(t) = \exp(\mathbf{A}^*t)$. Les valeurs propres de Φ'_+, Φ'_- sont $e^{\sigma_+t}, e^{\sigma_-t}$ où $\bar{}$ désigne le complexe conjugué. A partir des propriétés $\mathbf{M}(t)\Phi_{\pm} = e^{\sigma_{\pm}t}\Phi_{\pm}$, et $\mathbf{M}^*(t)\Phi'_{\pm} = e^{\bar{\sigma}_{\pm}t}\Phi'_{\pm}$, on aboutit aux égalités suivantes :

$$(\mathbf{M}(t)\Phi_+)^*\Phi'_- = e^{\bar{\sigma}_+t}\Phi_+^*\Phi'_- = \Phi_+^*\mathbf{M}(t)^*\Phi'_- = \Phi_+^*e^{\sigma_-t}\Phi'_-, \quad (1.17)$$

qui amène à la propriété suivante, étant donné que σ_+ et σ_- sont différents,

$$\Phi_+^*\Phi'_- = 0. \quad (1.18)$$

On a donc montré que Φ_+ est orthogonal à Φ'_- . De même, on montre que Φ_- est orthogonal à Φ'_+ . Sur le schéma de la figure 1.2 on a bien placé $OC = \Phi'_+$ perpendiculaire à $OB = \Phi_-$.

Pour les temps longs $t \rightarrow \infty$, le vecteur propre le plus instable de $\mathbf{M}(t)^*$ émerge si on applique à n'importe quel vecteur la matrice $\mathbf{M}(t)^*$, donc $\mathbf{M}(t)^*\mathbf{M}(t)\Phi_{SV}$ a pour limite Φ'_+ , le vecteur propre le plus instable de $\mathbf{M}(t)^*$. Pour les temps longs, le vecteur singulier Φ_{SV} tend donc vers Φ'_+ qui est orthogonal au mode stable Φ_- : on appelle donc Φ'_+ *le biorthogonal au mode le plus instable Φ_+ et est le vecteur singulier pour les temps longs*. Pour essayer de mieux comprendre cette notion de biorthogonal, Farrell et Ioannou (1996a) montre que Φ'_+ , le biorthogonal de Φ_+ est en fait l'excitation la plus efficace de Φ_+ . L'excitation la plus efficace de Φ_+ est définie comme le vecteur unitaire qui a la plus grande projection sur Φ_+ . En effet, la figure 1.2 montre géométriquement que si

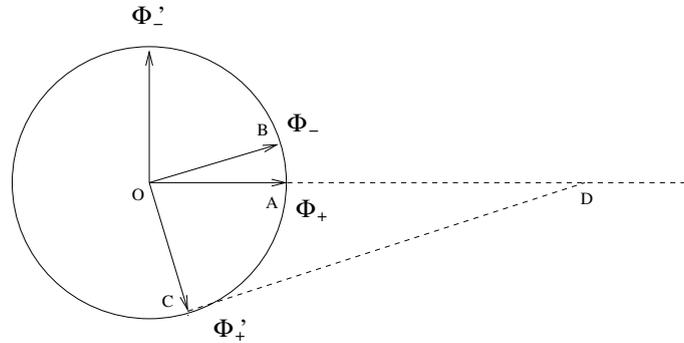


FIG. 1.2 – Démonstration géométrique du fait que l'excitation la plus efficace de Φ_+ , mode le plus instable de $M(t)$ est son biorthogonal Φ_+' , mode le plus instable de $M(t)^*$. tiré de Farrell et Ioannou (1996a).

on considère deux vecteurs non orthogonaux Φ_+ et Φ_- placés respectivement en OA et OB, le vecteur unitaire placé en OC qui est perpendiculaire à OB se projette de façon optimale sur l'axe OA en OD (ce n'est pas la projection orthogonale habituelle, c'est la projection selon la direction OB sur l'axe OA), autrement dit aucun vecteur unitaire a une projection sur l'axe OA supérieur à OD. Le vecteur placé en OC n'est rien d'autre que Φ_+' , le biorthogonal à Φ_+ . On remarque bien que si Φ_+ et Φ_- étaient orthogonaux, OA et OC seraient confondus et l'excitation la plus efficace de Φ_+ serait lui-même, et que donc il n'y aurait pas de différence entre modes singuliers et modes normaux.

1.3 Application à un cas simple : le modèle à deux couches de Phillips

1.3.1 Résumé des résultats de l'article I

Fischer (1998) a fait une comparaison systématique entre vecteurs singuliers et vecteurs normaux dans le cas simple du modèle d'Eady. Il trouve avec cette méthode des modes singuliers des solutions instables au delà du nombre d'onde de coupure du mode normal. A chaque instant du développement il obtient le maximum d'amplification de l'instabilité et les structures associées à ce maximum. Pour les temps courts, il retrouve la structure la plus favorable : l'onde au sommet et l'onde en bas du domaine doivent être en quadrature de phase comme l'avaient analysé Warrenfeltz et Elsberry (1989) et Davies et Bishop (1994). Pour les temps longs c'est à dire pour une perturbation d'au moins trois jours (qui correspond à des temps supérieurs à $2/Re(\sigma_+)_{max}$ où $Re(\sigma_+)_{max}$ est le taux de croissance du mode normal pour le nombre d'onde le plus instable), les nombres d'onde les plus

instables sont ceux pour lesquels le mode normal est instable ; cependant le maximum de l'amplification du mode singulier de la norme de l'énergie cinétique est 1,2 fois plus grande que celui du mode normal.

Dans l'article I, on retrouve les mêmes caractéristiques que Fischer mais dans le cas du modèle à deux couches : pour les temps longs, l'amplification du mode singulier est environ 1,2 fois plus grande que celle du mode normal sans l'effet β , avec des hauteurs de couche égales. L'apport du modèle à deux couches par rapport au modèle d'Eady vient du fait que l'effet β intervient, ainsi que la différence des hauteurs de couche. Nous montrons que β stabilise moins les modes singuliers que les modes normaux : en présence de β , le maximum de l'amplification du mode singulier dépasse alors celui du mode normal d'un facteur 1,5 pour des hauteurs de couches égales. Dans le cas océanique où les hauteurs de couches sont différentes, nous obtenons un facteur 1.8 entre l'amplification du mode singulier et celle du mode normal en présence de β . L'effet de β et des hauteurs de couche peut se rationaliser de la façon suivante : on s'aperçoit en écrivant explicitement l'opérateur linéaire \mathbf{A} décrivant l'évolution des perturbations que β n'intervient que dans la partie antisymétrique de \mathbf{A} . Or cette partie antisymétrique est cruciale pour avoir une différence entre modes normaux et modes singuliers puisque si elle n'existait pas, \mathbf{A} serait symétrique et les vecteurs normaux seraient orthogonaux. Cette partie antisymétrique a pour rôle de faire évoluer les structures verticales des perturbations et est responsable de la différence entre modes normaux et modes singuliers. Comme β intervient dans cette partie de la matrice, il crée une différence supplémentaire significative entre modes normaux et modes singuliers. De plus, en ajoutant une différence de hauteurs de couches à la présence de β , on s'aperçoit que les termes avec β sont multipliés par un facteur faisant apparaitre la différence de hauteurs de couche. La différence de hauteurs de couche a donc tendance à amplifier l'effet de β , ainsi dans le cas océanique, l'amplification du vecteur singulier est 1.8 fois supérieure à celle du mode normal.

1.3.2 article I

Q. J. R. Meteorol. Soc. (2001), **127**, pp. 1375–1388

Influence of the β -effect on non-modal baroclinic instability

By G. RIVIÈRE^{1*}, B. L. HUA^{2,1} and P. KLEIN^{2,1}

¹*Laboratoire de Météorologie Dynamique, France*

²*Laboratoire de Physique des Océans, France*

(Received 7 August 2000; revised 18 December 2000)

SUMMARY

We focus on the influence of the β -effect on the singular modes of baroclinic instability in the Phillips model. An analytical intercomparison between normal and singular modes for the Eady problem on an f -plane has already been performed, showing that the amplification rate of the singular mode for the kinetic-energy norm after a dimensional time of three days is about 1.2 times larger than for the normal mode. We show here that, in the presence of the β -effect, the maximum amplification rate of the singular mode can be 1.5 times larger than for the normal-mode case. This difference is due to the lesser stabilizing effect of β on the singular modes compared with the normal modes. This result is obtained for the case of equal layer depths which is relevant for the atmospheric situation. For the oceanic situation with unequal layer depths the amplification due to β is further increased leading to a factor of 1.8 in amplification rates between the two types of modes after a dimensional time of about 20 days. This behavior is explained by the fact that β only intervenes in the anti-Hermitian part of the linear dynamical operator, the main effect of which is to alter the vertical phase tilt of the perturbations. As a consequence the structure of the bi-orthogonal mode becomes more inclined to the vertical in presence of β while, on the contrary, the structure of the unstable normal mode becomes less inclined.

KEYWORDS: Baroclinic instability β -effect Singular modes

1. INTRODUCTION

The behavior of small disturbances under baroclinic instability is traditionally studied through the normal-modes approach, where the equations of motion are linearized about an appropriate background flow and are then solved for the eigenvectors of the linearized dynamical operator, Λ , which describes the evolution of the state vector, ϕ

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \Lambda \phi. \quad (1)$$

If, initially, $\phi(0)$ is the eigenvector of Λ (i.e. it corresponds to the normal mode) with eigenvalue σ , then $\phi(t) = \phi(0)e^{\sigma t}$, and the time growth is exponential for any inner product. The flow stability is inferred from the behaviour versus spatial wavenumber of the real part of σ . Idealized models like those originally considered by Eady (1949) and Charney (1947) relied on the normal-modes method to explain cyclogenesis. Such an approach has been widely used to study cyclogenesis in mid latitudes because it gives the right order of magnitude for growth rates, phase speeds and spatial scales.

However, when compared with observations, the normal-modes approach failed to explain the initial rapid growth that accompanies explosive cyclogenesis. Specifically, Farrell (1982,1984) showed that over the short time period typical of observed cyclogenesis, transient non-modal growth can dominate normal-mode growth, for the simple setup of the Eady model. Furthermore, he argued that the transient evolution of the structures that occurs during observed cyclogenesis could not be explained by a single, fixed-form normal mode. His main idea consisted of finding the best initial state such that the solutions interact constructively with the basic state. Rotunno and Fantini (1989) expressed the evolution of the perturbation solely in terms of the interactions between the two neutral normal modes of Eady's model for spatial wave numbers beyond the short-wave cut-off. Their results show that, because the neutral modes are

* Corresponding author: Laboratoire de Météorologie Dynamique, ENS, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France.
e-mail: griviere@lmd.ens.fr

not orthogonal for a given norm, they can interact to extract energy from the basic flow for finite time. On the other hand, Farrell (1989), O'Brien (1992) and Davies and Bishop (1994) addressed the more general problem of finding the optimal growth rate for a given physical inner product. Different methods were employed, among which formulations based on a variational principle and/or identification of the bi-orthogonal of the most unstable normal mode. However, the most systematic derivation appeared with the introduction of singular modes. This method was introduced in meteorology by Lorenz (1965). It was further developed by Lacarra and Talagrand (1988) in order to study the initial evolution of error growth and to systematically determine the initial perturbation that optimizes the growth for a given inner product and for a specified finite time, T .

For a given inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$, the aim is to look for a perturbation that maximizes the amplification rate

$$\frac{\langle \phi(t), \phi(t) \rangle_S}{\langle \phi(0), \phi(0) \rangle_S}. \tag{2}$$

If we note, Φ the column vector formed by the canonical components of ϕ (the canonical basis being linked with a norm) ,and \mathbf{A} , the matrix of the dynamical operator Λ in this basis, it leads to the matrix equation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mathbf{A}\Phi, \tag{3}$$

and the associated resolvent $\mathbf{M}(t)$ is

$$\Phi(t) = \mathbf{M}(t)\Phi(0). \tag{4}$$

The amplification rate for the measure $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ is then

$$\frac{\langle \phi(t), \phi(t) \rangle_S}{\langle \phi(0), \phi(0) \rangle_S} = \frac{\Phi(t)^* \mathbf{S} \Phi(t)}{\Phi(0)^* \mathbf{S} \Phi(0)} = \frac{\Phi(0)^* \mathbf{M}(t)^* \mathbf{S} \mathbf{M}(t) \Phi(0)}{\Phi(0)^* \mathbf{S} \Phi(0)}, \tag{5}$$

where \mathbf{S} is the matrix representing the measure $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ and $*$ indicates the conjugate transpose. The optimal solution is obtained when $\Phi(0)$ is the eigenvector of $\mathbf{S}^{-1} \mathbf{M}^*(t) \mathbf{S} \mathbf{M}(t)$ which corresponds to the largest eigenvalue, the so-called singular mode. In most idealized models \mathbf{A} does not depend on time, $\mathbf{M}(t) = \exp(\mathbf{A}t)$, and the singular eigenvalues are those of $\mathbf{S}^{-1} \exp(\mathbf{A}^*t) \mathbf{S} \exp(\mathbf{A}t)$. This method was rapidly adopted for use in conjunction with the tangent-linear formulation of nonlinear models for the study of quite complex situations: Farrell and Moore (1992) and Moore and Farrell (1993) considered the case of quasi-geostrophic oceanic flows, while Borges and Hartmann (1992) and Yoden and Nomura (1993) dealt with a barotropic atmosphere. Joly (1995) studied the finite-time stability of steady atmospheric fronts. Jukes (1995) investigated the stability of shear lines on either the tropopause or the surface boundary. Singular modes are now used operationally for ensemble prediction in several weather-prediction centres in order to assess the spread, in the forecasts, consistent with the analysis errors.

Farrell and Ioannou (1996) have elaborated in depth the usefulness of singular modes for the "Generalized Stability Theory" of several types of flows, which can either be constant or variable in time. The same approach was also applied by Fischer (1998) to the Eady problem with uniform potential vorticity. It is found that the singular modes can depart significantly from the normal modes, though the dynamics of the problem are very simple. In contrast to the behavior of normal modes, singular modes do not

exhibit any short-wave cut-off. Moreover, for the short time limit, the optimal structure for the kinetic-energy norm is such that there is a phase quadrature with height of the stream-function field, thus recovering a result found by Davies and Bishop (1994). For the long time limit (after approximately 3 days for the atmosphere), the wave number at which the most unstable singular mode is maximal (for the kinetic-energy norm) tends toward the optimal normal-mode wave number, but the optimal singular amplification rate still remains 20 – 25% larger than that of the optimal normal mode.

Hereafter, we have opted for the set-up of the Phillips (1954) model to carry out a systematic intercomparison between normal modes (NM hereafter) and singular modes (SM hereafter) for a given inner product (either kinetic-energy norm or potential-entrophy norm) and for a specified finite time, T . Our main motivation for choosing this model is to provide an analytically tractable rationale for the influence of the β -effect which is discarded in Eady's formulation. In section 2, the linearized equations in the Phillips model are recalled. In section 3, analytical expressions for the short and long time limits are derived and the results of the differences in amplification rates and vertical structures between normal modes and singular modes are presented. Section 4 addresses the oceanic case where the two layer depths are unequal. A final discussion of our results is given section 5.

2. THE PHILLIPS MODEL.

The set-up is the two-layer quasi-geostrophic model on the β -plane of Phillips (1954) where U_j, H_j, ρ_j are respectively, the constant zonal velocity of the basic state, depth and density of each layer $j = 1, 2$. Both the upper and lower surfaces are rigid. The linearized non-dimensional equations without friction are (cf Pedlosky 1987):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial x}\right)(\nabla^2 \phi_j - (-1)^j F_j(\phi_2 - \phi_1)) + (\beta - (-1)^j F_j(U_1 - U_2)) \frac{\partial \phi_j}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

$$F_j = \frac{f^2 L^2}{g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_0} H_j}, \quad \beta = \frac{L^2 \beta_{dim}}{U}, \quad U_j = \frac{U_{idim}}{U}, \quad (7)$$

where ϕ_j is the stream-function perturbation in each layer, and the dim subscript denotes dimensional numbers. Without lack of generality, we will choose $U_1 = -U_2$, and the shear will be equal to $U_s = U_1 - U_2 = 2U_1$. In order to use the singular-vectors method we have to write the matrix equation associated with Eq.(6). The column state vector, $\Phi = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2$, is the stream function written in the orthonormal basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ for the L_2 norm (applied to the stream function) with $\mathbf{e}_1 \propto (e^{ikx+ily}, 0)$, $\mathbf{e}_2 \propto (0, e^{ikx+ily})$ and k, l the horizontal wave numbers. Thus the stream-function variance norm (proportional to the geopotential variance norm), for which \mathbf{S} is the identity matrix, is $\Phi^* \Phi$. Then Eq.(6) can be written as:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi = \mathbf{A} \Phi \quad (8)$$

with

$$\mathbf{A} = -iB \begin{bmatrix} \kappa^4 - 2(\kappa^2 + a^{-1})\beta' + \kappa^2(a^{-1} - a) & -2(\kappa^2 + \beta') \\ 2(\kappa^2 - \beta') & -\kappa^4 - 2(\kappa^2 + a)\beta' + \kappa^2(a^{-1} - a) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

We have introduced the following notations:

$$\begin{aligned} \kappa^2 &\equiv \frac{k^2 + l^2}{(F_1 F_2)^{\frac{1}{2}}}, \quad k' \equiv \frac{k}{(F_1 F_2)^{\frac{1}{4}}}, \quad \beta' \equiv \frac{\beta}{2U_1 \sqrt{F_1 F_2}}, \\ a &\equiv \sqrt{\frac{F_1}{F_2}} = \sqrt{\frac{H_2}{H_1}}, \\ B &\equiv \frac{U_1 (F_1 F_2)^{\frac{1}{4}} k'}{\kappa^2 (\kappa^2 + a + a^{-1})}. \end{aligned}$$

Except for the oceanic case considered in section 4, we will choose hereafter $H_1 = H_2 = H$ (i.e. $a = 1$ and, therefore, $F_1 = F_2 = F$). Furthermore, without loss of generality, the velocity and length scales, U and L , are chosen such that $U_1 = (U_{1dim})/U = 1$ and $F = 1$ (i.e. $L = R_d$ with $R_d \equiv \{\sqrt{gH(\rho_2 - \rho_1)}/\rho_0\}/(f)$ the internal Rossby radius of deformation). This leads to the simplified expressions for \mathbf{A} and B shown in appendix A. Classical normal-mode results for this matrix are recalled in appendix A. In what follows, σ_+ and σ_- are the eigenvalues of \mathbf{A} and the associated eigenvectors are, respectively, the unstable normal mode Φ_+ and the stable normal mode Φ_- .

We consider dimensional values corresponding to the atmosphere similar to those of Fischer (1998): Coriolis parameter $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, half-height $H = 4500 \text{ m}$, zonal wind $U_{1dim} = 7.35 \text{ m s}^{-1}$, Brunt-Väisälä frequency $N^2 = g(\rho_2 - \rho_1)/(\rho_0 H) = 1.27 \times 10^{-4} \text{ s}^{-2}$. They yield $R_d = 507 \text{ km}$. Furthermore using $\beta_{dim} = 1.7 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ leads to $\beta' = 0.297$. Then the dimensional e-folding time corresponding to $\max(\text{Re}(\sigma_+))$ is equal to 36 hours.

3. COMPARISON OF THE NORMAL AND SINGULAR MODES.

The kinetic-energy norm is proportional to the stream-function (or geopotential) variance norm since, from the linearized Eq.(6), the perturbation is monochromatic. Consequently the singular modes for the two norms are equal and the associated amplification rates are the eigenvalues of $\mathbf{M}^* \mathbf{M} = \exp(\mathbf{A}^* t) \exp(\mathbf{A} t)$. If the dynamical operator \mathbf{A} is Hermitian, then the normal modes are orthogonal and identical to the singular modes (indeed if $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, the eigenvectors of $\mathbf{M}^* \mathbf{M} = \exp(2\mathbf{A} t)$ are those of \mathbf{A}). The difference between normal and singular modes is due to the anti-Hermitian part $\mathbf{A} - \mathbf{A}^*$, which main effect is to alter the vertical phase tilt of the perturbation structures. An important point to emphasize is that the β -effect only comes into play in that anti-Hermitian part (see Eq. (9)), the other component in $\mathbf{A} - \mathbf{A}^*$ being due to the vertical shear.

The normal-mode amplification rate is proportional to $e^{2\text{Re}(\sigma_+)t}$ where σ_+ is the largest eigenvalue of \mathbf{A} (see appendix A) while the singular mode largest amplification rate is hereafter denoted $\lambda(t)$.

(a) Short time limit.

This limit is obtained for $2\text{Re}(\sigma_+)t \ll 1$ (e.g. $t = \mathcal{O}(6 \text{ hours})$ in dimensional units) and leads to the simplification:

$$\mathbf{M}^* \mathbf{M} = \exp(\mathbf{A}^* t) \exp(\mathbf{A} t) \simeq \mathbf{I} + (\mathbf{A}^* + \mathbf{A})t, \tag{10}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 4iB\kappa^2 t \\ -4iB\kappa^2 t & 1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

For short times, the only part of \mathbf{A} which intervenes comes from the Hermitian part $\mathbf{A} + \mathbf{A}^*$, and β has thus no influence on the initial amplification rate. This result is quite general and can be easily shown to remain valid for all types of norms (in particular for the kinetic-energy and enstrophy norms). The singular modes which are optimal for short times are, therefore, independent of β . The vertical structure of these singular modes is characterized by a phase lag of $\pi/2$ between ϕ_1 and ϕ_2 , with $|\phi_1| = |\phi_2|$. Indeed the maximum eigenvalue of $\mathbf{M}^* \mathbf{M}$ is $1 + 4B\kappa^2 t$ and its associated eigenvector is $(1, -i)$. This result has already been noted by Davies and Bishop (1994) and Warrenfeltz and Elsberry (1989). This property is due to the fact that all the coefficients of \mathbf{A} are pure imaginary.

(b) *Long time limit*

For the long time limit, i.e. for $e^{2Re(\sigma_+)t} \gg 1$ (which corresponds to t equal to or larger than $\mathcal{O}(48 \text{ hours})$ in dimensional units), we can restrict ourselves to the unstable band of wave numbers of normal-mode theory ($\kappa_{1c} < \kappa < \kappa_{2c}$, with κ_{1c} and κ_{2c} the two wave-numbers cut-offs (see appendix A)). Indeed it can be shown that the wave number with the maximum amplification for the kinetic-energy norm lies inside this band for $e^{2Re(\sigma_+)t} \gg 1$. For this long time limit, it is possible to find an analytical relation between $e^{2Re(\sigma_+)t}$ and $\lambda(t)$ (see appendix B):

$$\lambda = \frac{e^{2Re(\sigma_+)t}}{|a_- - a_+|^2} (1 + |a_+|^2)(1 + |a_-|^2) \equiv \alpha e^{2Re(\sigma_+)t}, \quad (12)$$

where a_{\pm} are related to the components of the eigenvectors of \mathbf{A} (see appendix A). For a given wave number, the ratio α of the amplifications of the SM to the NM only depends on parameters of the system. Using the expression of a_{\pm} (given by A.4)), we obtain:

$$\alpha = \frac{\lambda}{e^{2Re(\sigma_+)t}} = \frac{\kappa^4}{\kappa^4 - \frac{\kappa^8}{4} - \beta'^2} \quad (13)$$

For $\kappa = 1$ and with $\beta' = 0.297$ we obtain $\alpha = 1.51$, while with $\beta' = 0$, $\alpha = 1.33$, showing that β has a quantitatively significant influence on the SM.

Let us now examine the vertical structure of the different modes. The eigenvector associated with λ when $e^{2Re(\sigma_+)t} \gg 1$ is the vector Φ_{∞} defined in appendix B. This vector is orthogonal to the stable normal mode Φ_- and is, therefore, the bi-orthogonal to the unstable normal mode Φ_+ (see appendix B, Eq. (B.5)). This is a well-known result of ‘‘Generalized Stability Theory’’ (see Farrell and Ioannou, 1996) that, when the normal modes are not orthogonal, the perturbation for optimal growth in the long time limit is not the unstable normal mode but its bi-orthogonal. If $a_+ = re^{-i\theta}$, the most unstable NM, Φ_+ , presents a vertical westward tilt which is characterized by a phase lag, θ , between ϕ_1 and ϕ_2 , while the bi-orthogonal Φ_{∞} has a phase lag equal to $\pi - \theta$. The main effect of β is concomitantly to decrease the value of θ (see appendix A) and, therefore, to increase the value of the phase lag of the bi-orthogonal, $\pi - \theta$. The efficiency of the bi-orthogonal is linked to its phase lag which increases with β . Thus in presence of β , the westward tilt of Φ_+ becomes less inclined to the vertical whereas the opposite is true for Φ_{∞} . Thus, β will exaggerate the differences between the normal-mode structure and its bi-orthogonal.

(c) *Amplifications*

Let us first consider the results in the absence of β for the kinetic-energy norm. Amplification rates of NMs and SMs (respectively, $e^{2Re(\sigma_+)t}$ and $\lambda(t)$) versus horizontal

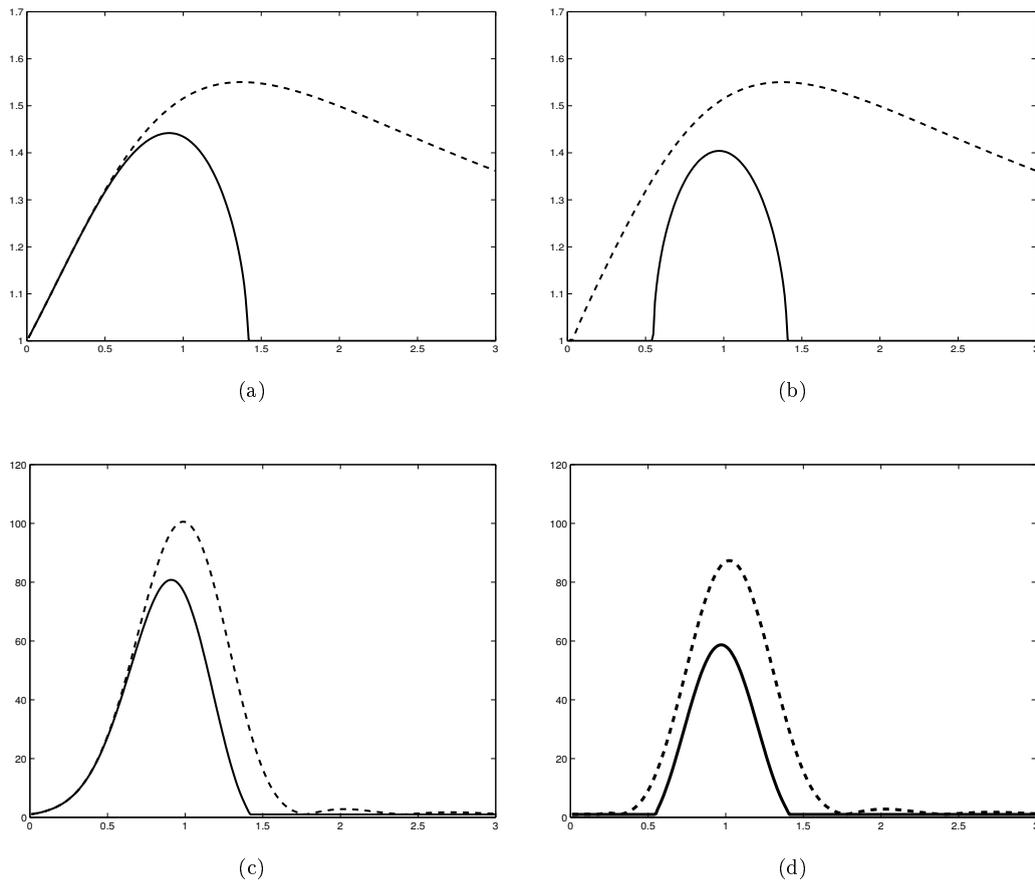


Figure 1. Amplification rates for the kinetic-energy norm versus horizontal wave number, in units of $2 \cdot 10^{-6} m^{-1}$. Normal mode, $exp\{2Re(\sigma_+)t\}$ (continuous line); singular mode, $\lambda(t)$ (dashed line). (a) $t = 6$ hours, $\beta = 0$, (b) $t = 6$ hours, $\beta = 1.7 \cdot 10^{-11} m^{-1} s^{-1}$, (c) $t = 72$ hours, $\beta = 0$, (d) $t = 72$ hours, $\beta = 1.7 \cdot 10^{-11} m^{-1} s^{-1}$. See text for further details.

wave number are compared for two different optimization times: the short time limit (Fig. 1(a)) corresponding to $t = 6$ hours in dimensional units, and the long time limit (Fig. 1(c)) corresponding to $t = 72$ hours. λ reaches a maximum at a finite wave number larger than that corresponding to the radius of deformation. It has no short-wave cut-off and tends to 1 for high wave numbers. At small wave numbers the SM curve is close to the NM curve for all optimization times. Near the cut-off wave number for short times (Fig. 1(a)), the SM is largely amplified, and it is in the vicinity of this wave number that the difference between SM and NM is the largest. For $\kappa > \kappa_{2c}$, interactions between two neutral non-orthogonal waves can be constructive as shown by Rotunno and Fantini (1989). For such wave numbers, no structure can remain stationary and the behaviour for any perturbation is sinusoidal in time (see appendix B). After a long time (Fig. 1(c)), the wave number with maximum λ tends to that of NM, but λ is still 25% larger than NM. The above results corroborate the main results of Fischer (1998) for the Eady problem without β .

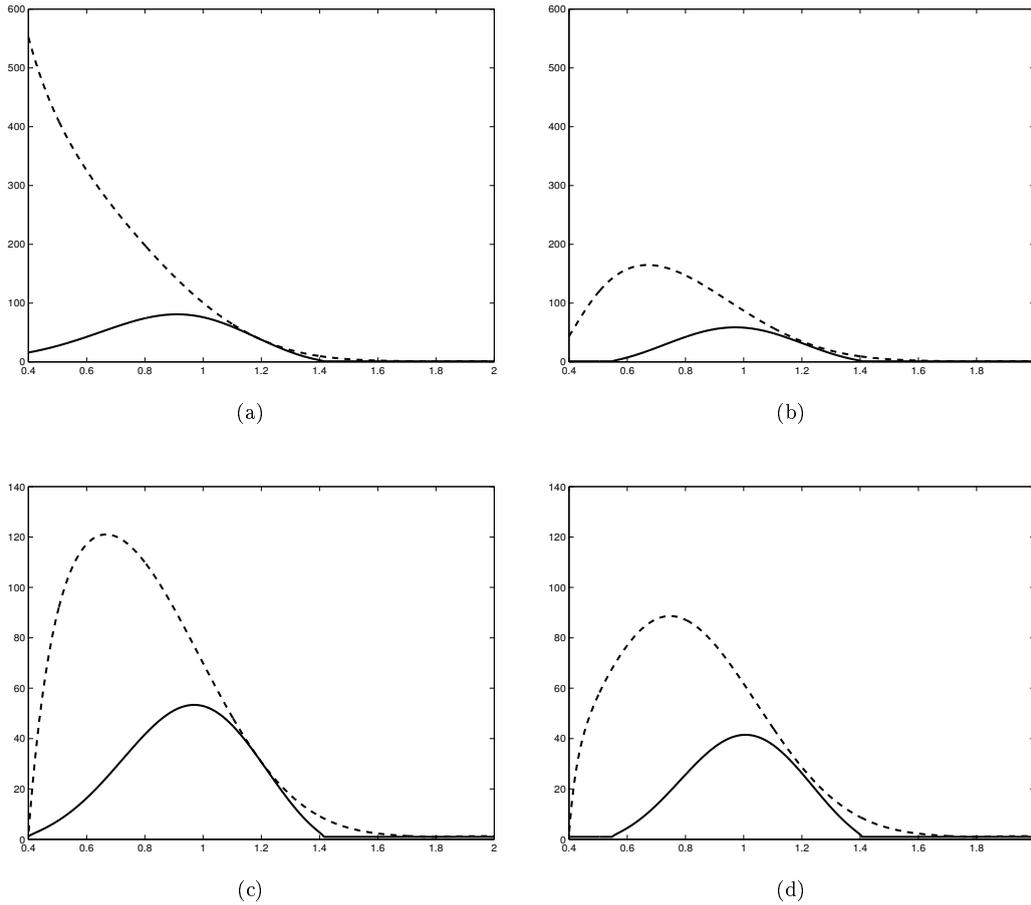


Figure 2. Amplification rates for potential-entropy norm versus horizontal wave number, in units of $2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}$. Normal mode $\exp\{2\text{Re}(\sigma_+)t\}$ (continuous line); singular mode, $\lambda_{E_{ns}}(T)$ (dashed line). (a) $t = 72$ hours, $\beta = 0$, $l = 0$, (b) $t = 72$ hours, $\beta = 1.7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $l = 0$, (c) $t = 72$ hours, $\beta = 0$, $l = 0.4/R_d$, (d) $t = 72$ hours, $\beta = 1.7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $l = 0.4/R_d$. See text for further details.

Let us now consider the influence of the β -effect on NM and SM, still for the case of the kinetic-energy norm. Figures 1(b) and (d) correspond to the same specified finite times as Figs. 1(a) and (c), respectively. After a short time (Fig. 1(b)), we remark that λ is unchanged, proving that β does not influence the growth for short times as already anticipated analytically. We have found that the sensitivity to the β -effect only occurs after a larger time ($t > 24$ hours in dimensional units). At small wave numbers, because of the existence of a wave-number cut-off, κ_{1c} , in the NM in the presence of β , the two types of modes behave very differently. For the long time limit (Fig. 1(d)), the unstable band of wave numbers for SM is approximately equivalent to the unstable normal band. More precisely, the wavenumber which maximizes λ tends to that of the maximum NM. However, the major difference is that the maximum SM is now 50% larger than the maximum NM, while that value only reached 25% for $\beta = 0$. This larger difference in amplification rates is due to the fact that β has a lesser stabilizing influence on the SM than on the NM, as already shown in section 3(b). When taking into account Ekman

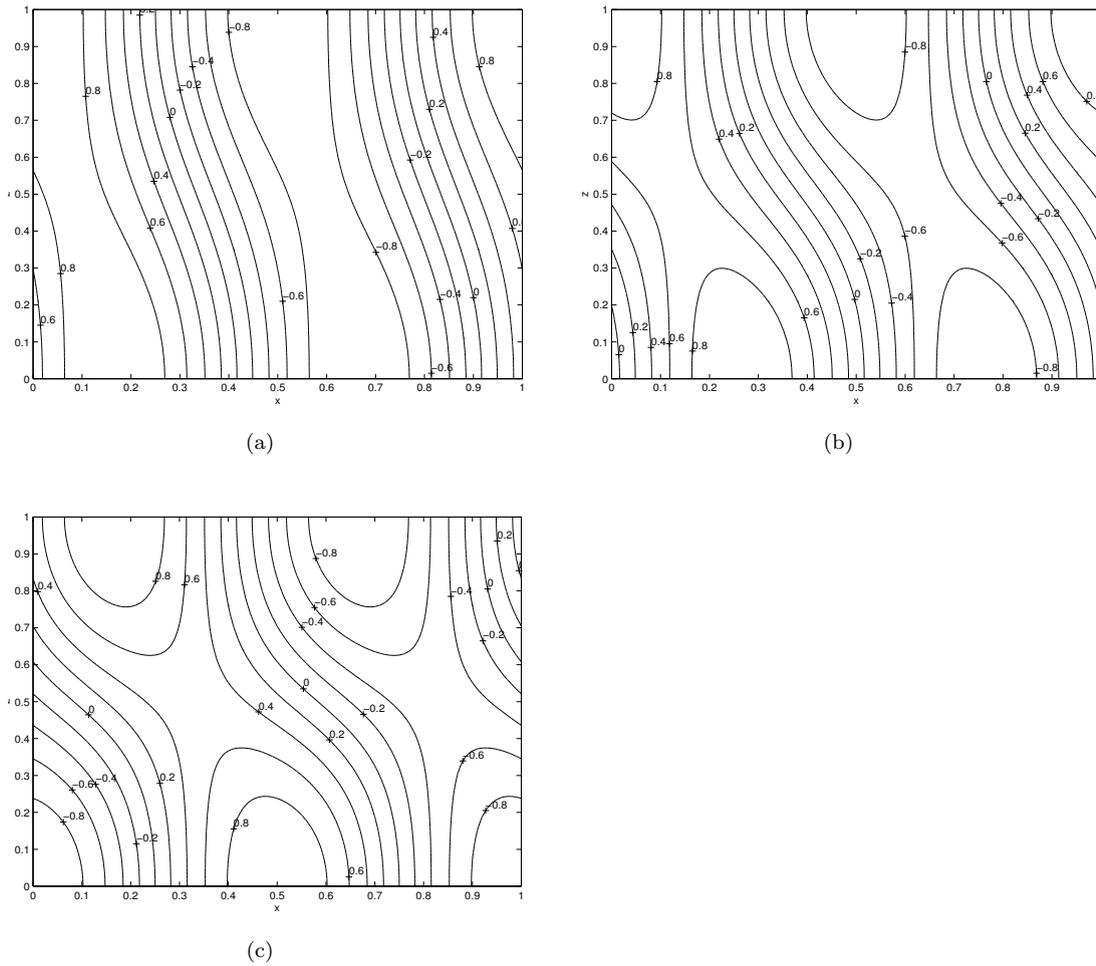


Figure 3. Vertical structure of the stream-function field for $\kappa = 1$. (a) Normal mode, (b) Singular mode for the kinetic-energy norm optimized for $t = 6$ hours, (c) bi-orthogonal for the kinetic-energy norm. See text for further details.

friction (not shown here), we have found that the differences between the SM and NM are not modified quantitatively leading to the conclusion that friction has no influence on the intercomparison SM-NM.

The case of the potential-ensrophy norm was also studied by intercomparing the maximum amplification ($\lambda_{Ens}(t)$) of the SM with the NM amplification $e^{2Re(\sigma_+)t}$. From the discussion of the introduction, $\lambda_{Ens}(t)$ is the largest eigenvalue of the matrix $S^{-1}M^*(t)SM(t)$ with

$$S = \begin{pmatrix} -(\kappa^2 + 1) & 1 \\ 1 & -(\kappa^2 + 1) \end{pmatrix}^2. \tag{14}$$

In the case $l = 0$ and $\beta = 0$ (Fig. 2(a)) $\lambda_{Ens}(t)$ becomes infinite for short wave numbers. With $\beta \neq 0, l = 0$ (Fig. 2(b)), $\beta = 0, l \neq 0$ (Fig. 2(c)) or $\beta \neq 0, l \neq 0$ (Fig. 2(d)), the $\lambda_{Ens}(t)$ -curve is bell shaped and reaches a maximum at a finite wavenumber smaller

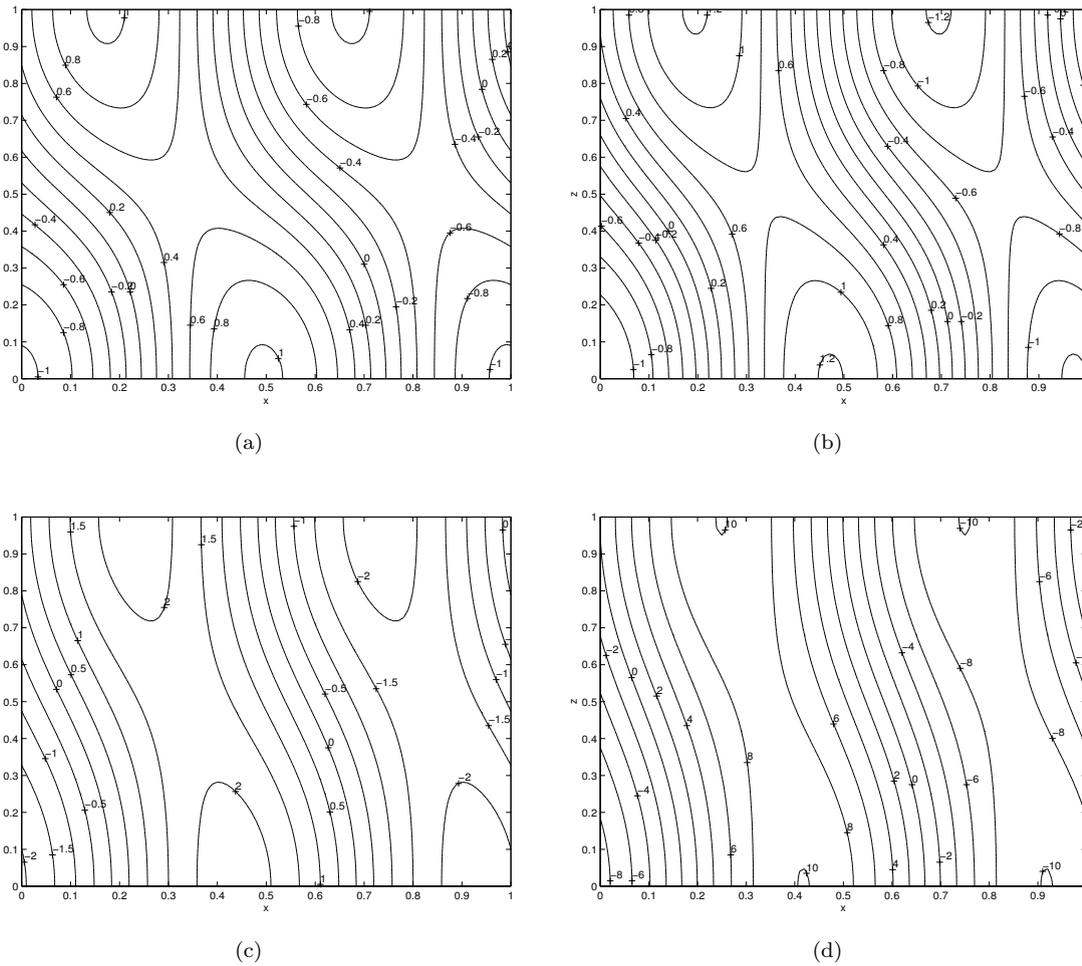


Figure 4. Time evolution of the vertical structure of the stream-function field for an initial perturbation corresponding to the bi-orthogonal for the kinetic-energy norm: $\Phi(0) = \Phi_{\infty}$, for $\kappa = 1$. (a) Φ (1 hour), (b) Φ (6 hours), (c) Φ (24 hours), (d) Φ (72 hours). See text for further explanation.

than the radius of deformation. For the long time limit, this wave number will tend to that of maximum NM but less rapidly than for kinetic-energy norm. In contrast with the kinetic-energy norm for the long time limit, the wave number with the maximum λ_{Ens} in Figs. 2(b)-(d) does not correspond to the wavenumber of maximum NM: the unstable band for potential-entrophy norm is not yet close to the unstable normal band, because of the persistence of the instability of the small wave numbers ($\kappa < \kappa_{1c}$). The main difference between the kinetic-energy and potential-entrophy norms is due to the role of the smallest wave numbers ($k \rightarrow 0$) where the contribution of the potential part (which is proportional to the temperature variance) dominates: the limit $k \rightarrow 0$ is also discussed in Jukes (1995).

If we restrict our study of the β -effect to the unstable normal band, for $e^{2Re(\sigma_+)t} \gg 1$, one can easily find analytically the relation between λ , $\lambda_{E_{ns}}$ and $e^{2Re(\sigma_+)t}$:

$$\lambda_{E_{ns}} = \frac{e^{2Re(\sigma_+)t}}{\kappa^4 - \frac{\kappa^8}{4} - \beta'^2} = \frac{\lambda}{\kappa^4}. \tag{15}$$

We remark that for $\kappa = 1$, the two amplifications λ and $\lambda_{E_{ns}}$ are equal. Furthermore, for a given wave number for $e^{2Re(\sigma_+)t} \gg 1$, $\lambda_{E_{ns}} = \lambda/\kappa^4$ and the factor of proportionality between $\lambda_{E_{ns}}$ and λ does not depend on β . Inside the unstable normal band for a given wave number the β -effect is the same for the two norms.

(d) *Vertical structures*

We shall only consider here wave numbers located in the unstable normal band. It is well known that the NM has a stationary spatial structure and that any perturbation tends to this structure for long times. Indeed, in the limit $e^{2Re(\sigma_+)t} \gg 1$, for any $\Phi(0)$, $\Phi(t) = \mathbf{M}(t)\Phi(0)$ is proportional to Φ_+ (see appendix B). However, the NM does not have the optimal structure (i.e. a phase quadrature) to extract energy from the basic flow most efficiently (the NM vertical structure has a phase lag $\theta < \pi/2$, Fig. 3(a)) †.

This is why the SM differs from the NM. But SM structures which differ from the NM structure are non-stationary because of two effects included in the anti-Hermitian part of \mathbf{A} : firstly the vertical shear and secondly the β -effect. This is why the quadrature is only the optimal structure for short times. For longer times, Warrenfeltz and Elsberry (1989) for the Phillips model, and Davies and Bishop (1994) for the Eady model, noticed that the optimal structure has a slope more inclined to the vertical than the quadrature and this is also clearly seen in the vertical structures of the SM of Fischer (1998). Finally, the initial phase lag of any SM lies between $\pi/2$ (optimization for short times, Fig. 3(b)) and $\pi - \theta$ (optimization for long times corresponding to the bi-orthogonal (Fig. 3(c))). If $\Phi(0) = \Phi_\infty$ (i.e. a system which is initialized with the bi-orthogonal), we see in Figs. 4(a)-(d) that the evolution of the perturbation towards the normal structure is very rapid, particularly so within the short time limit: this is due to the rotation effect of the anti-Hermitian part of \mathbf{A} . After one day, the vertical structures $\Phi(t)$ and Φ_+ are already quite similar.

4. THE OCEANIC CASE

In contrast with the large-scale tropospheric stratification which can be approximated by a constant Brunt-Väisälä profile, the oceanic mid-latitude stratification presents a pronounced peak in its Brunt-Väisälä profile in the vicinity of the main thermocline. This feature can be captured in a two-layer model by choosing quite different values for the depths of the layers: in the case of the Phillips model, this leads to the well known asymmetry between eastward and westward shears when the β -effect is taken into account (Pedlosky 1987).

For different layer depths ($H_1 \neq H_2$), it is also possible to find a relation between the SM and NM in presence of the β -effect:

$$\lambda = \frac{\kappa^4}{\kappa^4 - \frac{\kappa^8}{4} - \beta'^2 - \frac{(a-a^{-1})}{2}\beta'(\kappa^4 + \frac{(a-a^{-1})}{2}\beta')} e^{2Re(\sigma_+)t}. \tag{16}$$

† The vertical structure of the two-layers streamfunction $\Phi = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2$ is defined in Figs 3 and 4 by $\Phi(x, z) = Re(\{(A_1 + A_2)/2\} - \{(A_1 - A_2)/2\} \cos(\pi z)) \exp(2i\pi x)$ for $z \in [0, 1]$ and $x \in [0, 1]$.

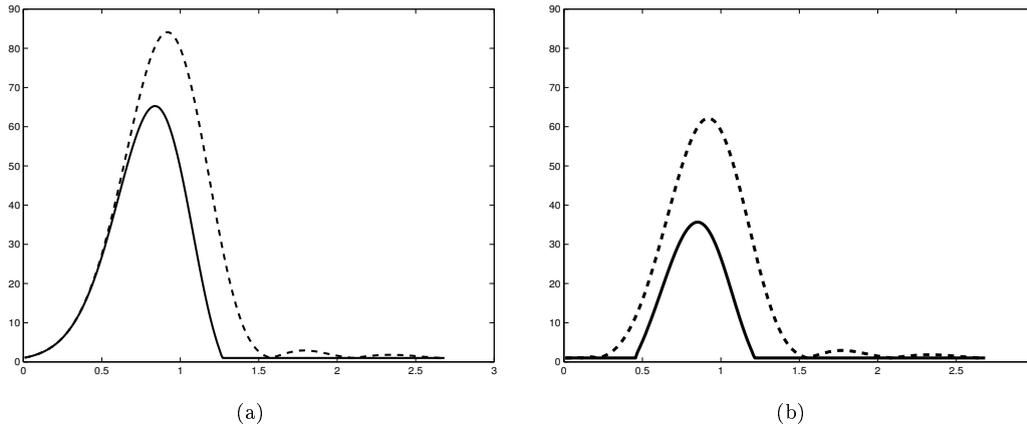


Figure 5. Amplification rates for the kinetic-energy norm in the oceanic case where $H_1 = H_2/4$ versus horizontal wave number, in units of $18 \cdot 10^{-6} m^{-1}$. Normal mode, $\exp\{2Re(\sigma_+)t\}$ (continuous line); singular mode, $\lambda_{E_{ns}}(t)$ (dashed line). (a) $t = 24$ days, $\beta = 0$, (b) $t = 24$ days, $\beta = 1.7 \cdot 10^{-11} m^{-1} s^{-1}$. See text for further details.

This last equation shows that, for $\beta = 0$, there is no difference between equal and unequal layer depths. However, for $\beta \neq 0$, using typical oceanic value as $H_1 = H_2/4$ (which leads to $a = 2$), we find that, for $\kappa = 1$, α reaches 1.8 whereas without β its value is 1.33. The influence of β on the intercomparison SM-NM is, therefore, further accentuated in the oceanic case. Figures 5(a) and (b) are equivalent to Figs. 1(c) and (d) but for the oceanic case. They show that for the long time limit, i.e. $t = 24$ days (corresponding to the oceanic parameter settings), the SM is 1.8 times larger than the NM.

5. CONCLUSION

A systematic analytical study of the β -effect on singular modes for finite time has been carried out for both the kinetic-energy and the potential-entrophy norms. β solely intervenes in the anti-Hermitian part of \mathbf{A} which is the crucial term for the differences in behaviour of the normal and singular modes. This part plays a significant role only after a finite time (for atmospheric parameter settings, the β -effect starts to have a quantitative influence for $t > 24$ hours). This anti-Hermitian part affects the vertical phase tilt of the perturbation structures and it is well known that the energy exchange between the basic flow and perturbations is strongly sensitive to this vertical structure. β is the only parameter that is completely included in the anti-Hermitian part. This rationalizes the effect of β on the singular modes and explains why the amplification rate for these modes is 1.5 times larger than for the normal modes. For a geometry with different layer depths the effect of β on the vertical phase tilt is accentuated and the singular modes' amplification rate is 1.8 times larger than that of the normal modes after 24 days (which corresponds to the long time limit in the oceanic case).

Furthermore we showed that in the normal unstable band, for a given wave number, the β -effect is the same for the kinetic-energy and the potential-entrophy norms: it has a lesser stabilizing influence on the singular modes than on the normal modes. For the potential-entrophy norm singular modes have a maximum for $\beta \neq 0$ or $l \neq 0$. The wave number corresponding to this maximum is smaller than the radius of deformation. The particularity of singular modes for this norm is that after 3 days (for the atmospheric

1386

G. RIVIÈRE *et al.*

parameter settings) the most unstable band is not the normal unstable band: small wave numbers below the wave-number cut-off are still very unstable.

APPENDIX A

Normal modes of the Phillips model

Without friction and with equal layer depths, the linearized operator is:

$$\mathbf{A} = -iB \begin{bmatrix} \kappa^4 - 2(\kappa^2 + 1)\beta' & -2(\kappa^2 + \beta') \\ 2(\kappa^2 - \beta') & -\kappa^4 - 2(\kappa^2 + 1)\beta' \end{bmatrix}. \tag{A.1}$$

with $B = k' / \{\kappa^2(\kappa^2 + 2)\}$.

The eigenvalues of \mathbf{A} are :

$$\sigma_{\pm} = B \{2i(\kappa^2 + 1)\beta' \pm \sqrt{-\kappa^8 + 4\kappa^4 - 4\beta'^2}\}, \tag{A.2}$$

with eigenvectors

$$\Phi_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_{\pm} \end{pmatrix}, \tag{A.3}$$

such as

$$a_{\pm} = \frac{\kappa^4 - \pm i\sqrt{-\kappa^8 + 4\kappa^4 - 4\beta'^2}}{2(\kappa^2 + \beta')}. \tag{A.4}$$

There are two wavenumbers cutoff $\kappa = \kappa_{1c}$ and $\kappa = \kappa_{2c}$ which satisfy the equation

$$-\kappa^8 + 4\kappa^4 - 4\beta'^2 = 0. \tag{A.5}$$

If we note $a_+ = re^{-i\theta}$, then the unstable normal mode Φ_+ has a phase lag θ between ϕ_1 and ϕ_2 (the streamfunction perturbation in layer 1 and 2) such that

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{-\kappa^8 + 4\kappa^4 - 4\beta'^2}}{\kappa^4}. \tag{A.6}$$

As θ decreases with β , the vertical normal mode structure is less inclined to the vertical. If we initialize the system with the unstable normal mode $\Phi(0) = \Phi_+$, the amplification rate for all norms is (using Eqs. (3), (4) and (5)):

$$\frac{\langle \phi(t), \phi(t) \rangle}{\langle \phi(0), \phi(0) \rangle} = \exp\{2Re(\sigma_+)t\}. \tag{A.7}$$

APPENDIX B

Singular modes of the Phillips model

In general, the resolvent $\mathbf{M} = \exp(\mathbf{A}t)$ can be obtained from the eigenvectors and eigenvalues of \mathbf{A} . We have:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \sigma_+ & 0 \\ 0 & \sigma_- \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}, \text{ with } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a_+ & a_- \end{bmatrix}, \tag{A.1}$$

which leads to:

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\sigma_+t} & 0 \\ 0 & e^{\sigma_-t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \frac{-1}{a_+ - a_-} \begin{bmatrix} a_-e^{\sigma_+t} - a_+e^{\sigma_-t} & -e^{\sigma_+t} + e^{\sigma_-t} \\ a_+a_-(e^{\sigma_+t} - e^{\sigma_-t}) & -a_+e^{\sigma_+t} + a_-e^{\sigma_-t} \end{bmatrix}, \tag{A.2}$$

and the eigenvalues of $\mathbf{M}^* \mathbf{M}$ are easily computed ‡ (see appendix in Fischer (1998)).

In the long time limit, for the unstable normal band ($e^{2Re(\sigma_+)t} \gg 1$), \mathbf{M} and, therefore, $\mathbf{M}^* \mathbf{M}$ can be simplified :

$$\mathbf{M}^* \mathbf{M} \simeq \frac{e^{2Re(\sigma_+)t}}{|a_- - a_+|^2} (1 + |a_+|^2) \begin{bmatrix} |a_-|^2 & -a_+ \\ -a_- & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

The largest eigenvalue, λ , of $\mathbf{M}^* \mathbf{M}$ is:

$$\lambda = \frac{e^{2Re(\sigma_+)t}}{|a_- - a_+|^2} (1 + |a_+|^2)(1 + |a_-|^2), \quad (\text{A.4})$$

and its associated eigenvector is the bi-orthogonal of Φ_+ :

$$\Phi_\infty = \begin{pmatrix} a_+ \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

In the stable normal bands ($\kappa < \kappa_{1c}$ or $\kappa > \kappa_{2c}$), the two neutral normal modes in these bands are not orthogonal and can, therefore, interact to extract energy from the basic flow (Held 1985; Rotunno and Fantini 1989). Each perturbation can be expressed as a linear combination of the normal modes

$$\Phi(0) = c_+ \Phi_+ + c_- \Phi_-, \quad (\text{A.6})$$

so that

$$\Phi(t) = \mathbf{M} \Phi(0) = c_+ e^{\sigma_+ t} \Phi_+ + c_- e^{\sigma_- t} \Phi_-. \quad (\text{A.7})$$

In the stable normal bands σ_+ and σ_- are pure imaginary and

$$\sigma_\pm = B \{ 2i(\kappa^2 + 1)\beta' \pm i\sqrt{\kappa^8 - 4\kappa^4 + 4\beta'^2} \}. \quad (\text{A.8})$$

In $\langle \phi(t), \phi(t) \rangle$, only coefficients of $\Phi_+^* \Phi_-$ are function of time, t . Denoting $\bar{\cdot}$ the complex conjugate, we find:

$$\begin{aligned} \langle \phi(t), \phi(t) \rangle &= |c_+|^2 \Phi_+^* \Phi_+ + |c_-|^2 \Phi_-^* \Phi_- \\ &+ \bar{c}_+ c_- e^{\bar{\sigma}_+ t} e^{\sigma_- t} \Phi_+^* \Phi_- \\ &+ \bar{c}_- c_+ e^{\bar{\sigma}_- t} e^{\sigma_+ t} \Phi_-^* \Phi_+, \end{aligned}$$

so that

$$\begin{aligned} \langle \phi(t), \phi(t) \rangle &= |c_+|^2 \Phi_+^* \Phi_+ + |c_-|^2 \Phi_-^* \Phi_- \\ &+ 2Re(\bar{c}_+ c_- e^{\bar{\sigma}_+ t} e^{\sigma_- t} \Phi_+^* \Phi_-). \end{aligned}$$

$\langle \phi(t), \phi(t) \rangle$ is sinusoidal with time and its period is proportional to:

$$\left| \frac{1}{\sigma_+ + \sigma_-} \right| = \frac{1}{2B\sqrt{\kappa^8 - 4\kappa^4 + 4\beta'^2}}.$$

This period is thus infinite for wavenumbers close to the wave-number cut-offs (κ_{1c} , κ_{2c}). This is why a perturbation with a wave number located in the stable normal band can be very unstable at finite time and be quite comparable to the exponential growth of the unstable normal band.

‡ For the sake of simplicity, the analysis is restricted to the norms for which $\mathbf{S} = \gamma \mathbf{I}$ with \mathbf{I} the identity matrix and γ a scalar.

1388

G. RIVIÈRE *et al.*

REFERENCES

- Borges, M. D. and Hartmann, D. L. 1992 Barotropic instability and optimal perturbations of observed nonzonal flows. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 335–354
- Charney, J. G. 1947 The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J. Meteor.*, **4**, 135–162
- Davies, H. and Bishop C. 1994 Eady edge waves and rapid development. *J. Atmos. Sci.*, **51**, 1930–1946
- Eady, E. T. 1949 Long waves and cyclone waves. *Tellus*, **1**, 33–52
- Farrell, B. F. 1982 The initial growth of disturbances in a baroclinic flow. *J. Atmos. Sci.*, **39**, 1663–1686
- Farrell, B. F. 1984 Modal and non-modal baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **41**, 668–673
- Farrell, B. F. 1989 Optimal excitation of baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 1193–1206
- Farrell, B. F. and Moore A. M. 1992 An adjoint method for obtaining the most rapidly growing perturbation to oceanic flows. *J. Phys. Oceanogr.*, **22**, 338–349
- Farrell, B. F. and Ioannou P. J. 1996 Generalized stability theory. part I: autonomous operators. *J. Atmos. Sci.*, **53**, 2025–2040
- Fischer, C. 1998 Linear amplification and error growth in the 2D Eady problem with uniform potential vorticity. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 3363–3380
- Held, I. 1985 Pseudomomentum and the orthogonality of modes in shear flow. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 2280–2288
- Joly, A. 1995 The stability of steady fronts and the adjoint method: Non-modal frontal waves. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 3082–3108
- Juckes, M. 1995 Instability of surface and upper-tropospheric shear lines. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 3247–3262
- Lacarra, J. F. and Talagrand O. 1988 Short-range evolution of small perturbations in a barotropic model. *Tellus*, **40A**, 81–95
- Lorenz, E. N. 1965 A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model. *J. Atmos. Sci.*, **17**, 321–333
- Moore, A. M. and Farrell, B. F. 1993 Rapid perturbation growth on spatially and temporally varying oceanic flows determined using an adjoint method: Application to the Gulf Stream. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1682–1702
- O'Brien, E. 1992 Optimal growth rates in the quasi geostrophic initial value problem. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 1557–1570
- Pedlosky, J. 1987 *Geophysical fluid dynamics*. Springer-Verlag
- Phillips, N. A. 1954 Energy transformations and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-level, quasi-geostrophic model. *Tellus*, **6**, 273–286
- Rotunno, R. and Fantini, M. 1989 Peterssen's "Type B" cyclogenesis in terms of discrete, neutral Eady modes. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 3599–3604
- Yoden, S., and Nomura, M. 1993 Finite-time Lyapunov stability analysis and its application to atmospheric predictability. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 1531–1543
- Warrenfeltz, L. L. and Elsberry, R. L. 1989 Superposition effects in rapid cyclogenesis-Linear model studies. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 789–802

Chapitre 2

Croissance locale des perturbations dans les écoulements quasigéostrophiques barotropes

2.1 Introduction

L'étude de l'instabilité modale et non modale dans les écoulements parallèles, stationnaires et cisailés permet de mieux comprendre les mécanismes de croissance des perturbations ou de l'erreur initiale. L'instabilité modale a d'abord permis de rendre compte de manière simple des ordres de grandeur des phénomènes synoptiques des moyennes latitudes (échelle spatiale et taux de croissance). L'instabilité non modale a elle permis de rationaliser la croissance parfois explosive de la cyclogénèse et à la fois l'évolution temporelle des structures spatiales des perturbations. Cependant ces écoulements ne peuvent pas rendre compte du caractère zonalement inhomogène des écoulements atmosphériques ou océaniques qui est un paramètre fondamental pour essayer de comprendre les régions préférentielles de formation des cyclones (Tupaz et al. 1978, Frederiksen 1983). C'est pourquoi à partir des années 70-80, de nombreuses études théoriques ont étudié les instabilités pour des écoulements zonnellement inhomogènes (Lorenz 1972, Tupaz et al. 1978, Pierrehumbert 1984, Peng et Williams 1986, Mak et Cai 1989, Pedlosky 1989). Ce caractère local est aussi déterminant pour comprendre la dynamique des rails des dépressions ("Storm-Tracks") et des phénomènes de plus longues périodes (Hoskins et al. 1983, Simmons et al. 1983, Pierrehumbert 1984, Whitaker et Dole 1995, Lee 1995). Un autre point important pour se rapprocher des écoulements réalistes, est qu'on doit prendre en compte la dépendance par rapport au temps de l'écoulement de base (Joly et Thorpe 1991).

Ce chapitre se consacre à la croissance des perturbations dans des écoulements de référence qui ont ce double caractère, *local et dépendant du temps*. On met en place un certain nombre d'indices locaux de croissance des perturbations à partir d'une méthode analytique se focalisant sur l'équation du mouvement linéarisée. Cette équation fait apparaître un terme complexe à étudier : *c'est le gradient de la pression agéostrophique perturbée* dont l'approximation est l'aspect original du travail. A partir de cette approximation, on étudie la dynamique d'alignement du vecteur vitesse des perturbations. Notre approche n'aboutit pas à des critères d'instabilité ; elle permet d'obtenir des indices locaux de croissance des perturbations. Ces indices de croissance sont obtenus à partir de l'analyse du terme d'extraction d'énergie barotrope (cf (Mak et Cai 1989)) et de la détermination des orientations privilégiées du vecteur vitesse perturbée.

Enfin, ces indices de croissance sont validés par les simulations numériques effectuées dans un modèle simulant la situation océanique classique d'un double gyre forcé par le vent. Cette situation physique simule le comportement des jets océaniques comme le Gulf Stream. L'intérêt de l'étude de ce type de jet vient de son caractère fortement localisé car il possède des méandres de grande amplitude qui par occlusion peuvent conduire à la formation de tourbillons isolés : cette phénoménologie est générique pour la formation de tourbillons isolés dans l'océan (cf la revue de Carton (2001)).

2.2 Contexte et discussion sur l'approche suivie

2.2.1 Equation du mouvement linéarisée sous la forme lagrangienne

Dans le cadre général des écoulements quasigéostrophiques, l'équation du mouvement prend la forme suivante

$$\frac{\bar{D}\vec{u}_g}{Dt} = -f_0\vec{k} \wedge \vec{u}_a - \vec{\nabla}\bar{p}_a, \quad (2.1)$$

où les indices g et a désignent respectivement les composantes géostrophique et agéostrophiques, et $\frac{\bar{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}$ désigne la dérivée lagrangienne. Dans le cas barotrope, la divergence du vecteur \vec{u}_a est nulle, donc le vecteur $-f_0\vec{k} \wedge \vec{u}_a$ est un gradient et le vecteur $-f_0\vec{k} \wedge \vec{u}_a - \vec{\nabla}\bar{p}_a$ aussi, c'est pourquoi on peut définir \bar{p} tel que $-\vec{\nabla}\bar{p} \equiv -f_0\vec{k} \wedge \vec{u}_a - \vec{\nabla}\bar{p}_a$. On obtient ainsi la forme suivante de l'équation du mouvement dans le cas barotrope

$$\frac{\bar{D}\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}\bar{p}, \quad (2.2)$$

où par souci de simplicité on a enlevé les indices g dans la notation du vecteur horizontal géostrophique. En appliquant l'opérateur rotationnel à cette équation, on aboutit à la

conservation de la vorticité relative

$$\frac{\bar{D}\bar{\omega}}{Dt} = 0, \quad (2.3)$$

où $\omega \equiv \partial_x v - \partial_y u$ désigne la vorticité relative.

Dans le contexte de la dynamique de l'atmosphère et de l'océan, la théorie conventionnelle sur les instabilités barotropes et baroclines a mis l'accent sur le rôle déterminant que joue le gradient de la vorticité potentielle de l'écoulement de base et notamment le gradient méridien comme c'est le cas dans l'instabilité barocline décrite dans le modèle à deux couches du chapitre 1. Ainsi dans le cadre quasigéostrophique barotrope de ce chapitre, l'équation traditionnelle utilisée est l'équation linéarisée de la conservation de la vorticité relative déduite de l'équation (2.3)

$$\frac{\bar{D}\omega'}{Dt} = -\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}\bar{\omega}, \quad (2.4)$$

où les primes désignent les variables appartenant à la perturbation et les barres à celles de l'écoulement de base. Le terme source d'instabilité est le terme de droite qui fait intervenir le gradient de la vorticité de l'écoulement de base. L'équation du mouvement (2.2) se linéarise en

$$\frac{\bar{D}\vec{u}'}{Dt} = -\nabla\bar{\mathbf{u}} \cdot \vec{u}' - \vec{\nabla}p', \quad (2.5)$$

avec p' la pression agéostrophique perturbée et $\nabla\bar{\mathbf{u}}$ le tenseur du gradient de vitesse de l'écoulement de base. Dans le cadre de la dynamique des fluides géophysiques, les instabilités ont été étudiées à partir de l'équation (2.4) (le théorème de Charney et Stern (1962) repose sur les propriétés de $\vec{\nabla}\bar{\omega}$) plutôt qu'avec l'équation (2.5). Une des raisons est que l'équation du mouvement linéarisée fait intervenir un terme en plus qui est complexe à calculer, c'est *le gradient de la pression agéostrophique perturbée $\vec{\nabla}p'$: il intervient pour faire en sorte que le fluide reste incompressible au cours du mouvement.* L'équation diagnostique pour calculer la pression s'obtient en prenant la divergence de l'équation (2.5) alors qu'en prenant le rotationnel de (2.5), on obtient l'équation (2.4). Dans le contexte plus général de la mécanique des fluides, pour les équations d'Euler linéarisées, la forme lagrangienne de l'équation (2.5) a cependant été utile pour obtenir des critères d'instabilité pour des écoulements complexes non homogènes spatialement et dépendant du temps (Lifschitz et Hameiri 1991, Lifschitz 1994). Lifschitz et Hameiri (1991) obtiennent des critères d'instabilité simplement en utilisant l'expression lagrangienne de l'équation (2.5) et en effectuant une approximation WKB : ils montrent que l'écoulement de base est instable si en suivant l'onde advectée par l'écoulement, son amplitude croît sans limite. Leur idée est qu'au lieu d'estimer les taux de croissance de solutions d'équations aux dérivées

partielles (cadre eulérien) on peut plus facilement estimer les taux de croissance de solutions d'équations différentielles ordinaires (cadre lagrangien). Leblanc et Cambon (1997) montrent qu'il est possible de retrouver des critères exacts d'instabilité en considérant des situations physiques simples dans lesquelles la pression ne joue pas de rôle et ainsi ils peuvent simplifier l'étude de l'équation (2.5) en ne considérant pas le gradient de pression. En introduisant un paramètre de stabilité dépendant du tenseur inertiel, ils aboutissent facilement à des critères connus d'instabilité. Straub (2002) s'est lui aussi placé dans des situations physiques où la pression n'avait pas de rôle : dans le cas de perturbations tridimensionnelles dans un écoulement de référence 2D, dans la limite sans rotation et sans stratification, il remarque que l'équation (2.5) s'écrit exactement ainsi

$$\frac{\bar{D}\vec{u}'}{Dt} = -\nabla\vec{u} \cdot \vec{u}'. \quad (2.6)$$

De plus, il note que (2.6) est similaire à l'équation de gradient de traceur

$$\frac{\bar{D}\vec{\nabla}q}{Dt} = -\nabla\vec{u}^T \vec{\nabla}q, \quad (2.7)$$

où q désigne le traceur et qui fait intervenir simplement le transposé du tenseur du gradient de vitesse $\nabla\vec{u}^T$. Le point important est que si on se place dans une situation physique où l'équation (2.6) est exacte, alors un système fermé pour \vec{u}' est obtenu, c'est à dire l'évolution du vecteur vitesse perturbée \vec{u}' est simplement déterminée par son étirement par le champ de déformation $\nabla\vec{u}$ qui est une quantité connue. On remarque en appliquant le rotationnel à l'équation approximée (2.6), qu'on retrouve aussi l'équation exacte pour la vorticité perturb e (2.4) qui n'est pas un système fermé pour la vorticité ω' puisque l'équation (2.4) dépend aussi de \vec{u}' . L'étude de l'équation approxim e (2.6) revient à étudier l'étirement d'un champ de vecteur par un tenseur donné. A partir des résultats de Lapeyre et al. (1999) et de Klein et al. (2000) qui obtiennent des diagnostics analytiques sur la formation de gradient de traceur à partir de l'équation (2.7), Straub (2002) de la même manière a appliqué leur méthode mais pour la croissance de l'énergie cinétique des perturbations. Il a généralisé l'approche de Leblanc et Cambon (1997) et fait intervenir des critères d'instabilité qui ne dépendent pas des coordonnées choisies. Il retrouve de cette manière exactement le critère de l'instabilité centrifuge.

Notre démarche consiste en s'inspirant des méthodes de Lapeyre et al. (1999) et de Straub (2002)   analyser l'équation (2.5) en prenant en compte la pression. Cette équation est li e à la notion d'instabilité localis e telle qu'elle est abord e dans les articles de Mak et Cai (1989) et Cai et Mak (1990) et qu'on décrit dans la section suivante.

2.2.2 Notion d'instabilité localisée

Pour essayer de comprendre le problème de la cyclogénèse régionale et son aspect local, un premier pas a été fait d'un point de vue numérique par Frederiksen (1983) en analysant la localisation des modes normaux instables pour des écoulements zonalement inhomogènes. Il montre que la localisation spatiale de ces modes correspond à la localisation des flux de chaleur des tourbillons synoptiques ce qui représente un progrès important pour déterminer les régions préférentielles de croissance de ces tourbillons. Malgré l'importance de ces évidences numériques, elles n'expliquent cependant pas quelles sont les caractéristiques de l'écoulement de base qui amènent à cette distribution spatiale et n'expliquent donc pas les mécanismes physiques responsables de cette localisation. Le premier effort théorique pour expliquer ce phénomène a été présenté par Pierrehumbert (1984). Il met en place dans un contexte atmosphérique le formalisme mathématique mis au point par Merkin (1977) en dynamique des fluides géophysiques qui expose le concept de l'instabilité absolue et de l'instabilité convective pour pouvoir distinguer les modes "locaux" des modes "globaux". Un mode local est un mode pour lequel en un point donné de l'espace il y a croissance de la perturbation même après que le paquet d'onde soit passé sur la zone instable alors qu'un mode global est un mode qui croît dans un domaine périodique à chaque fois que le paquet d'onde repasse sur la zone instable ; le mode local est donc plus à même d'expliquer la cyclogénèse régionale. Cette théorie fait intervenir des hypothèses sur l'échelle spatiale et fait donc intervenir l'approximation WKB. Cette méthode permet à Pierrehumbert (1984) de distinguer parmi les modes normaux instables de son écoulement zonalement inhomogène quels sont les modes locaux et quels sont les modes globaux et quelles sont les caractéristiques dans l'écoulement qui font que les modes locaux émergent. Le mode local croît autour du point de baroclinicité maximum ; son taux de croissance dépend simplement des propriétés locales de l'écoulement de base autour de ce point. L'émergence de modes locaux est favorisée par une forte différence entre le minimum et le maximum de baroclinicité dans le champ de l'écoulement de référence. Un autre pas important dans la compréhension de la cyclogénèse régionale a été obtenu par les articles de Mak et Cai (1989) et Cai et Mak (1990). Sans faire intervenir d'approximation WKB, ces travaux permettent de mieux rendre compte du sens et des propriétés de l'instabilité locale en étudiant scrupuleusement chacun des termes qui interviennent dans l'équation locale de l'énergie. Dans le cas d'écoulements quasigéostrophiques barotropes, Mak et Cai (1989) (noté MC ci-après) étudient l'équation locale en énergie cinétique sous la forme eulérienne qu'on obtient à partir de (2.5) en projetant le vecteur \vec{u}' selon cette équation

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u'^2}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{u'^2}{2} \right) - \vec{u}' \cdot (\nabla \vec{u} \cdot \vec{u}') - \vec{u}' \cdot \vec{\nabla} p'. \quad (2.8)$$

L'interprétation physique des trois termes du membre de droite de (2.8) est développée dans MC. Le second terme est par la suite appelé le taux local d'extraction d'énergie car il représente le terme par lequel la perturbation peut extraire de l'énergie à l'écoulement de référence. Les deux autres termes sont appelés des termes de redistribution puisqu'ils redistribuent spatialement l'énergie de la perturbation ; le premier terme est le terme d'advection tandis que le troisième correspond au travail de la force de pression. La perturbation ne peut croître globalement que par le second terme qui a été analysé par MC. En étudiant une sortie de jet, ils montrent que les trois termes tendent à se compenser mutuellement aboutissant à un gain net d'énergie en aval du jet et donc une croissance locale de l'énergie à la sortie du jet. Il faut noter que la notion d'instabilité locale vue à partir de cette équation en énergie est moins abstraite que le formalisme de l'instabilité absolue et les résultats peuvent être plus facilement comparés aux données. Elle a en plus l'avantage de s'appliquer sans l'approximation WKB. Dans l'article de Cai et Mak (1990), les mêmes auteurs ont généralisé leur approche dans le cas d'un écoulement à la fois barotrope et barocline. En étudiant cette fois-ci l'équation locale pour l'énergie totale, ils retrouvent les propriétés des modes "locaux" et "globaux" introduits par Pierrehumbert (1984), tout en apportant des concepts plus commodes à utiliser.

2.2.3 Approche suivie : analyse de l'équation d'orientation du vecteur vitesse perturbée

Notre but dans ce chapitre n'est ni d'obtenir des critères d'instabilité ni d'étudier l'instabilité locale telle qu'elle a été mise en place dans les travaux cités mais de parvenir à des indices de croissance des perturbations. On se place donc dans le cadre quasigéostrophique, où la pression agéostrophique perturbée a un rôle important et où donc l'équation (2.5) ne peut pas se simplifier sous la forme (2.6). L'idée de Straub (2002) de reprendre la méthode de Lapeyre et al. (1999) mise au point pour les gradients de traceur est poursuivie mais en paramétrisant la pression. *Cette approximation de la pression est l'aspect original du travail.* Notre méthode consiste à étudier la dynamique d'alignement du vecteur vitesse perturbée à partir de cette approximation de la pression et de montrer que les informations tirées de cette dynamique permettent d'obtenir des diagnostics du terme d'extraction d'énergie cinétique, $-\vec{u}' \cdot (\nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \vec{u}')$. La question qu'on pose s'exprime dans les termes suivants : *Existe-t-il des orientations privilégiées du vecteur vitesse perturbée conduisant à une croissance de l'énergie cinétique des perturbations ? Si oui, quelles sont-elles et quels sont les indices de croissance qui en découlent ?*

2.3 Interprétation du terme d'extraction barotrope

2.3.1 L'alignement du vecteur vitesse perturbée comme mécanisme d'extraction

Comme le montrent Mak et Cai (1989), le terme d'extraction barotrope peut s'exprimer comme le produit scalaire de 2 vecteurs \vec{E} et \vec{D}

$$-\vec{u}' \cdot (\nabla \vec{u} \cdot \vec{u}') = \vec{E} \cdot \vec{D}, \quad (2.9)$$

où

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \left(\frac{1}{2}(v'^2 - u'^2), -u'v' \right), \\ \vec{D} &= (\partial_x \bar{u} - \partial_y \bar{v}, \partial_x \bar{v} + \partial_y \bar{u}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

\vec{E} dépend de la structure spatiale de la perturbation et \vec{D} du champ de déformation de l'écoulement de référence dont les composantes sont l'étirement $\bar{\sigma}_n \equiv \partial_x \bar{u} - \partial_y \bar{v}$ et le cisaillement $\bar{\sigma}_s \equiv \partial_x \bar{v} + \partial_y \bar{u}$. Le point très important que mettent en évidence Mak et Cai (1989), est que *la quantité $\vec{E} \cdot \vec{D}$ est intrinsèque à l'interaction entre la perturbation et l'écoulement de référence et ne dépend pas du repère choisi*. En effet, si on se place dans un repère en rotation solide par rapport au repère du laboratoire, les vecteurs \vec{E} et \vec{D} tournent de telle façon que l'angle relatif entre les deux vecteurs ne change pas et la quantité $\vec{E} \cdot \vec{D}$ est la même dans les deux repères. Si le produit scalaire entre \vec{E} et \vec{D} est positif (resp. négatif), cela signifie que la structure spatiale de la perturbation est telle par rapport au champ de déformation qu'elle peut extraire de l'énergie à (resp. perdre de l'énergie au profit de) l'écoulement de référence. L'angle entre les deux vecteurs est donc crucial pour savoir si localement à un instant donné la perturbation va prendre de l'énergie à l'écoulement de référence. Cet angle comme on l'a dit précédemment est indépendant du repère, il est l'objet du travail qui suit dans lequel on montre qu'il a tendance à prendre des valeurs privilégiés : cette analyse consiste donc à *l'étude de la dynamique d'alignement du vecteur vitesse perturbée (ou du vecteur \vec{E}) par rapport à la structure de l'écoulement de base*. Comme notre étude se consacre à la dynamique de l'angle entre les deux vecteurs, un certain nombre de notations sont nécessaires pour la suite des développements. On décompose le vecteur vitesse de la perturbation en sa norme $\rho' = |\vec{u}'|$ et son angle θ' par rapport à l'axe Ox

$$\vec{u}' = \rho'(\cos \theta', \sin \theta') \equiv \rho' \vec{e}', \quad (2.11)$$

\vec{e}' désignant le vecteur unité qui a le même sens que \vec{u}' . La décomposition du vecteur \vec{E}

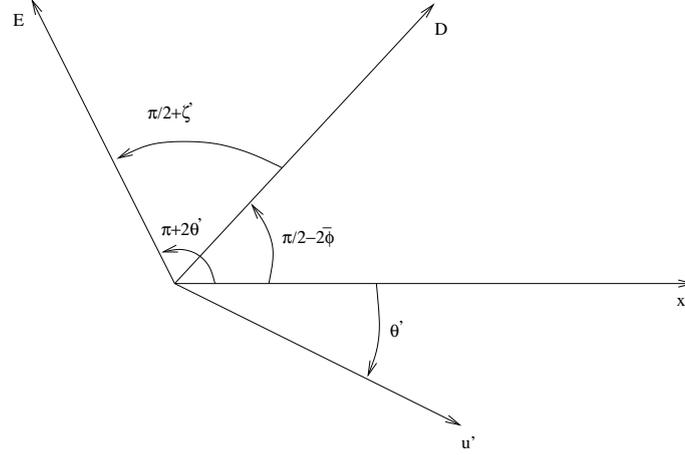


FIG. 2.1 – Angles définissant les orientations des vecteurs \vec{E} et \vec{D}

s'en déduit de celle du vecteur \vec{u}'

$$\vec{E} = \frac{\rho'^2}{2} (\cos(\pi + 2\theta'), \sin(\pi + 2\theta')), \quad (2.12)$$

où on remarque que la norme du vecteur \vec{E} est l'énergie cinétique de la perturbation $\rho'^2/2$ en chaque point de l'espace. On définit aussi l'angle $\bar{\phi}$ tel que

$$(\partial_x \bar{v} + \partial_y \bar{u}, \partial_x \bar{u} - \partial_y \bar{v}) \equiv (\bar{\sigma}_s, \bar{\sigma}_n) = \bar{\sigma} (\cos 2\bar{\phi}, \sin 2\bar{\phi}), \quad (2.13)$$

où $\bar{\sigma} = |\vec{D}| \geq 0$ est le taux de déformation. Avec de telles notations, l'angle que forme le vecteur \vec{D} avec l'axe Ox est $\pi/2 - 2\bar{\phi}$. Ainsi comme on le voit sur la figure 2.1, l'angle entre \vec{E} et \vec{D} est égal à $\pi/2 + \zeta'$ où $\zeta' \equiv 2\theta' + 2\bar{\phi}$.

2.3.2 Exemple du champ de déformation pur

Considérons le champ de déformation simple de la figure 2.2.a et la fonction de courant associée est $\bar{\psi} = \frac{S}{2}(x^2 - y^2)$. A partir des vitesses associées $\bar{u} = Sy$ et $\bar{v} = Sx$, on obtient le coefficient d'étirement $\bar{\sigma}_n = 0$ qui est nul et le coefficient de cisaillement qui vaut $\bar{\sigma}_s = 2S$ ¹. Le vecteur \vec{D} est donc orienté selon l'axe Oy dans le sens des y positifs. La structure de la perturbation qui va extraire de façon optimale l'énergie à l'écoulement de base est telle que le vecteur \vec{E} soit colinéaire au vecteur \vec{D} . Pour cela, il faut et il suffit que les isolignes de la fonction de courant perturbée soient parallèles à l'axe de contraction Oy' ; en effet, si tel est le cas, soit $\theta' = -\pi/4$, soit $\theta' = 3\pi/4$, ce qui implique dans tous les cas que l'angle selon Ox du vecteur \vec{E} vaut $2\theta' + \pi = \pi/2$; ce vecteur est noté \vec{E}_{opt} car il correspond à

¹Si on se place dans un autre repère, les quantités $\bar{\sigma}_n$ et $\bar{\sigma}_s$ changent de valeurs

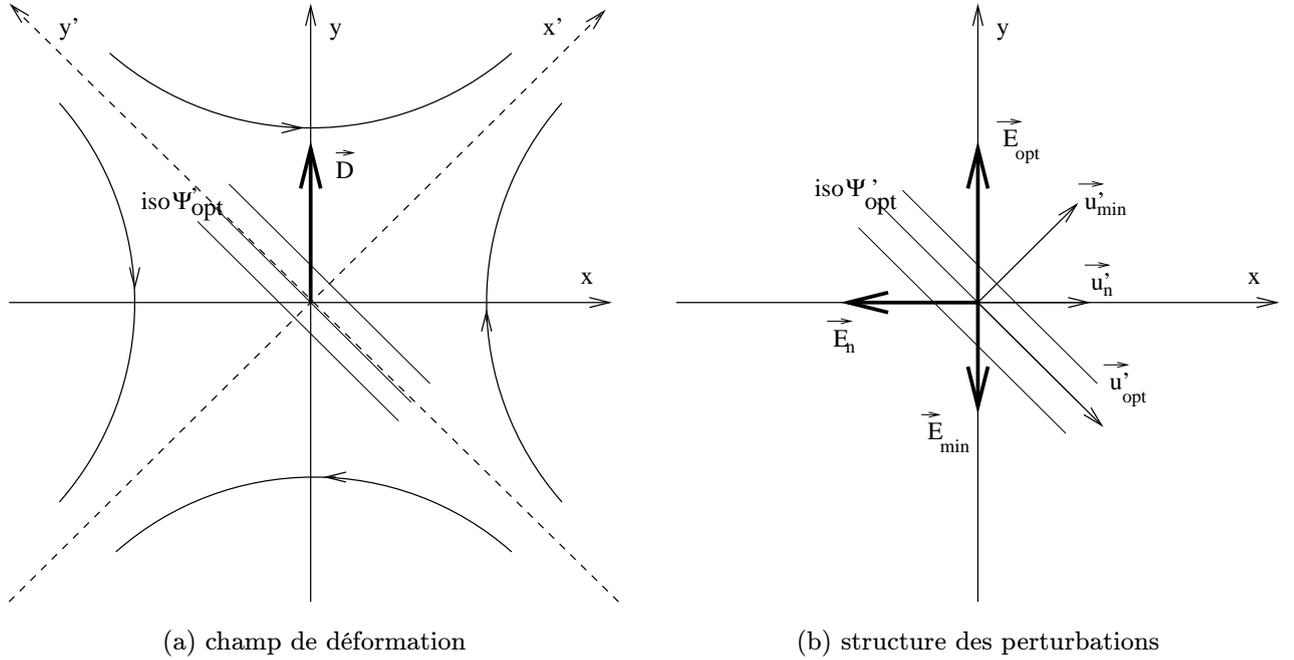


FIG. 2.2 – Illustration de l'importance de l'angle relatif entre les vecteurs \vec{E} et \vec{D} dans un champ de déformation cisailé. (a) représentation de l'écoulement de base et du vecteur \vec{D} associé; (b) représentation de différentes structures de perturbation, \vec{E}_{opt} désigne la structure optimale pour extraire de l'énergie, \vec{E}_n est perpendiculaire à \vec{D} et représente une structure neutre pour laquelle il n'y a ni extraction ni perte d'énergie, \vec{E}_{min} est la structure pour laquelle la perte d'énergie de la perturbation est maximale. (tiré de la figure 1 de Mak et Cai, 1989).

l'extraction optimale. De la même manière, on note que si les isolignes de la perturbation sont selon l'axe Ox, alors il n'y a ni extraction ni perte d'énergie de la perturbation; un tel exemple est donné par \vec{E}_n . Si les isolignes de la perturbation sont parallèles à l'axe de dilatation, il y a alors perte d'énergie, la perturbation redonne de l'énergie à l'écoulement de base : la perte maximale est obtenue avec le vecteur \vec{E}_{min} . En analysant de cette manière l'extraction locale barotrope, Mak et Cai (1989) énonce la règle suivante : *pour extraire de façon optimale l'énergie à l'écoulement de base, une perturbation doit être allongée localement selon l'axe de contraction du champ de déformation de l'écoulement de base. Si elle est allongée selon l'axe de dilatation, la perturbation cède de l'énergie à l'écoulement de base.*

Si on prend l'exemple d'un cisaillement de vitesse tel que celui du mécanisme d'Orr alors $\vec{E} \cdot \vec{D} = -u'v' \partial_y \bar{u} = \partial_x \psi' \partial_y \psi' \partial_y \bar{u}$, et étudier le signe de $\vec{E} \cdot \vec{D}$ revient à étudier l'incli-

raison des perturbations par rapport au profil du cisaillement. Finalement le critère local et instantané d'extraction développé par Mak et Cai reposant sur le produit scalaire $\vec{E} \cdot \vec{D}$ est une généralisation locale du critère d'extraction des écoulements parallèles.

2.3.3 Introduction du taux d'extraction exponentiel

Avec nos notations, le terme d'extraction peut s'écrire ainsi

$$\vec{E} \cdot \vec{D} = -\vec{u}' \cdot (\nabla \vec{u} \cdot \vec{u}') = -\frac{\rho'^2}{2} \bar{\sigma} \sin \zeta'. \quad (2.14)$$

Ce terme d'extraction dépend de trois quantités, l'énergie cinétique déjà redistribuée $\rho'^2/2 = u'^2/2$, le taux de déformation $\bar{\sigma}$ et l'angle ζ' dont la dynamique est étudiée dans les sections suivantes. En divisant l'équation (2.8) par l'énergie cinétique $\rho'^2/2$, on obtient l'équation pour le taux de croissance exponentiel eulérien de l'énergie cinétique et le terme d'extraction associée à cette équation est

$$\delta \equiv \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{\rho'^2/2} = -\bar{\sigma} \sin \zeta', \quad (2.15)$$

qui sera appelé par la suite le taux d'extraction exponentiel d'énergie cinétique. C'est ce terme qu'on est capable de diagnostiquer avec la méthode décrite dans la section suivante.

2.4 Dynamique d'alignement du vecteur vitesse perturbée

Dans cette section, la dynamique d'alignement du vecteur vitesse perturbée est étudiée à partir de l'équation (2.5). Un premier diagnostic sans considérer la pression agéostrophique permet de faire un lien avec les équations de gradients de traceur et d'en tirer une méthode pour analyser l'équation (2.5). Un deuxième diagnostic plus précis en paramétrisant la pression permet de déterminer analytiquement différentes orientations privilégiées pour le vecteur vitesse perturbée.

2.4.1 Analogie avec les gradients de traceur

Considérons d'abord l'influence de $\nabla \vec{u}$ sur l'orientation du vecteur vitesse perturbée, l'influence de la pression agéostrophique sera considérée dans la section suivante. Le point important qu'on remarque est que si le gradient de la pression agéostrophique perturbée n'est plus considéré dans l'équation (2.5), alors un système fermé pour \vec{u}' est obtenu comme

on l'a dit précédemment. C'est ce qui a motivé l'étude de Straub (2002) dans un cas physique où effectivement la pression ne joue pas de rôle. On introduit ici pour l'équation simplifiée (2.6), la méthode que Lapeyre et al. (1999) ont appliqué à l'équation exacte des gradients de traceur (2.7). Il faut ici noter deux grandes différences entre l'équation (2.6) et l'équation (2.7) : (i) l'équation (2.7) pour le gradient de traceur fait intervenir le transposé du gradient de vitesse, et donc le transposé du tenseur qui intervient dans l'évolution de la vitesse perturbée et (ii) l'équation (2.7) s'applique à un gradient alors que l'équation (2.6) à un champ de vecteur non divergent. Lapeyre et al. (1999) ont montré que le gradient de traceur s'aligne préférentiellement avec une certaine direction et que son amplitude croît exponentiellement avec le temps. Cette direction peut-être déterminée analytiquement en développant les équations pour la norme et l'angle du gradient de traceur. Effectuons le même type de décomposition mais pour la vitesse perturbée. Dans un contexte quasigéostrophique, l'incompressibilité $\partial_x \bar{u} + \partial_y \bar{v} = 0$ nous amène à

$$\nabla \bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \partial_x \bar{u} & \partial_y \bar{u} \\ \partial_x \bar{v} & \partial_y \bar{v} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_n & \bar{\sigma}_s \\ \bar{\sigma}_s & -\bar{\sigma}_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\bar{\omega} \\ \bar{\omega} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

Si on considère les projections de l'équation (2.6) sur \vec{e}' et sur $\vec{e}'_{\perp} \equiv (-\sin \theta', \cos \theta')$, cela nous donne deux équations, une pour la norme ρ' et l'autre pour l'angle θ' du vecteur vitesse perturbée

$$\frac{1}{\rho'^2} \frac{\bar{D}\rho'^2}{Dt} = -\bar{\sigma} \sin(2\theta' + 2\bar{\phi}), \quad (2.17a)$$

$$2 \frac{\bar{D}\theta'}{Dt} = \bar{\sigma} (-r_{ow} - \cos(2\theta' + 2\bar{\phi})), \quad (2.17b)$$

avec

$$r_{ow} \equiv \frac{\bar{\omega}}{\bar{\sigma}}. \quad (2.18)$$

Le paramètre sans dimension r_{ow} est la fraction entre la vorticité $\bar{\omega}$ et le taux de déformation $\bar{\sigma}$. L'évolution dans le temps de ρ' et θ' dépend de l'angle ζ' qui permet de déterminer l'orientation du vecteur vitesse perturbée dans les coordonnées des axes du champ de déformation. Pour $|r_{ow}| < 1$, les vecteurs propres de $\nabla \bar{\mathbf{u}}$ correspondent aux solutions de l'équation $\frac{\bar{D}\theta'}{Dt} = 0$; en effet, pour l'équation simplifiée (2.6), si \vec{u}' est vecteur propre de $\nabla \bar{\mathbf{u}}$ alors $(\nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \vec{u}') \cdot \vec{e}'_{\perp} = 0$, le membre de droite de l'équation (2.6) n'a donc aucune projection selon l'équation d'orientation, et on aboutit à $\frac{\bar{D}\theta'}{Dt} = 0$. Les expressions analytiques des orientations des vecteurs propres sont donc données par $\zeta' = \zeta'_{\pm}{}^{r_{ow}} \equiv \pm \arccos(-r_{ow})$ à l'aide de l'équation (2.17b). Le vecteur propre de $\nabla \bar{\mathbf{u}}$ avec la valeur propre négative a une orientation stable $\zeta' = \zeta'_{-}{}^{r_{ow}}$ induisant une croissance de l'énergie cinétique de la

perturbation tandis que le vecteur propre avec la valeur propre positive a une orientation instable $\zeta' = \zeta_+^{r_{ow}}$ entraînant une décroissance de l'énergie cinétique de la perturbation.

Une expression plus fine de l'équation d'orientation peut s'écrire dans les coordonnées du champ de déformation (Lapeyre et al. 1999, Straub 2002)

$$\frac{1}{\rho'^2} \frac{\bar{D}\rho'^2}{Dt} = -\bar{\sigma} \sin \zeta', \quad (2.19a)$$

$$\frac{\bar{D}\zeta'}{Dt} = \bar{\sigma}(-r' - \cos \zeta'), \quad (2.19b)$$

avec

$$r' \equiv \frac{\bar{\omega} - 2\frac{\bar{D}\bar{\phi}}{Dt}}{\bar{\sigma}}. \quad (2.20)$$

Le paramètre sans dimension r' est la fraction entre $\bar{\omega} - 2\frac{\bar{D}\bar{\phi}}{Dt}$ (qui est la vorticité plus le taux de rotation du vecteur de déformation \vec{D}) et le taux de déformation $\bar{\sigma}$. Le calcul de la quantité $\frac{\bar{D}\bar{\phi}}{Dt}$ est explicité dans l'article de Lapeyre et al. (1999). Si $|r'| < 1$, l'équation (2.19b) a deux points fixes $\zeta_{\pm}^{r'} = \pm \arccos(-r')$, un stable $\zeta' = \zeta_-^{r'}$ qui induit une croissance exponentielle de la norme ρ' , et un autre instable $\zeta_+^{r'}$ qui correspond à une décroissance exponentielle de cette norme.

Pour le système du gradient de traceur, nous avons des propriétés similaires, c'est à dire deux points fixes $\zeta_{\pm} \equiv \pm \arccos(r)$ dépendant d'un paramètre $r \equiv \frac{\bar{\omega} + 2\frac{\bar{D}\bar{\phi}}{Dt}}{\bar{\sigma}}$. Pour passer de $\zeta_{\pm}^{r'}$ à ζ_{\pm} , il faut changer $-\bar{\omega}$ en $\bar{\omega}$ qui est d  du fait que le tenseur dans l'équation (2.7) est le transposé de celui qui est impliqué dans l'équation (2.6). Les simulations numériques en turbulence 2D dans Lapeyre et al. (1999) montrent que l'orientation du gradient de traceur est statistiquement bien align e avec la direction stable ζ_- qui induit une croissance du gradient. Cette orientation est significativement plus probable que celle d termin e par le vecteur propre stable de $\nabla\bar{\mathbf{u}}^T$ (critère d'Okubo (1970) et Weiss (1991)). Ce dernier critère dérive de l'hypothèse que le tenseur de gradient de vitesse varie lentement le long d'une trajectoire lagrangienne mais ce n'est généralement pas le cas en raison de la rotation des axes du strain ($2\bar{\phi}$ varie le long d'une trajectoire lagrangienne). Par contre, le paramètre r prend en compte cette rotation.

Des équations pour la vitesse perturb e, deux systèmes emergent naturellement. Un est lié aux vecteurs propres de la matrice de $\nabla\bar{\mathbf{u}}$, il est donc l'équivalent du critère d'Okubo-Weiss et ses orientations privil gi es sont donn es par $\zeta' = \zeta_{\pm}^{r_{ow}}$. L'autre est l'analogue du système de Lapeyre et al. (1999) et les orientations privil gi es sont $\zeta' = \zeta_{\pm}^{r'}$.

Straub (2002) montre que la condition $|r'| < 1$ implique exactement le critère de l'instabilité centrifuge alors que l'équivalent du critère d'Okubo-Weiss $|r_{ow}| < 1$ n'implique pas la bonne condition d'instabilité. En nous appuyant sur la simplicité du système (2.19),

sur les simulations numériques de Lapeyre et al. (1999) et sur le travail récent de Straub (2002), le résultat attendu si l'équation (2.6) était exacte serait que ζ' prendrait plus souvent la valeur $\zeta_-^{r'}$ que $\zeta_-^{r_{ow}}$. Cependant, on verra dans la section suivante que l'influence de la pression agéostrophique n'est pas du tout négligeable et qu'un autre terme doit s'ajouter dans les équations d'orientation (2.17b) et (2.19b) à cause de ce terme de pression.

2.4.2 Approximation de l'équation d'orientation

Examinons maintenant l'équation complète (2.5) en prenant en compte à la fois le tenseur du gradient de vitesse $\nabla\bar{\mathbf{u}}$ et à la fois le gradient de la pression agéostrophique perturbée.

Approximation de la pression

Comme on l'a déjà dit précédemment, on s'intéresse à un champ de vecteur \vec{u}' non divergent, ainsi en prenant la divergence de l'équation (2.5), nous obtenons l'équation diagnostique reliant la pression agéostrophique perturbée à \vec{u}' et aux caractéristiques de l'écoulement de base

$$\Delta p' = 2(J(\bar{\mathbf{u}}, v') + J(u', \bar{v})) \quad (2.21a)$$

$$= 2(\bar{\sigma}_n \partial_{xy} \psi' - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_s - \bar{\omega}) \partial_x^2 \psi' + \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_s + \bar{\omega}) \partial_y^2 \psi'), \quad (2.21b)$$

où J est l'opérateur Jacobien, ψ' est la fonction de courant perturbée et (u, v) désigne le vecteur vitesse dans les coordonnées Cartésiennes (Ox, Oy) . Pour obtenir la pression agéostrophique perturbée p' , il faut inverser l'opérateur laplacien. Une formule analytique n'étant pas possible sans approximation, nous allons considérer une perturbation monochromatique pour déterminer l'influence locale du gradient de pression (caveat : même si une fonction monochromatique est non locale, cette approximation est un premier pas pour diagnostiquer l'influence du gradient de pression)

$$\psi'(x, y) = \text{Re}(A \exp(i(kx + ly))). \quad (2.22)$$

Cette forme particulière de perturbation amène à une nouvelle expression de l'équation (2.21a)

$$\Delta p' = 2(-\bar{\sigma}_n kl + \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_s - \bar{\omega})k^2 - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_s + \bar{\omega})l^2)\psi'. \quad (2.23)$$

Si on suppose de plus que $\bar{\sigma}_n$, $\bar{\sigma}_s$ et $\bar{\omega}$ varient lentement par rapport aux variations de la perturbation (hypothèse WKB), la pression agéostrophique est du coup monochromatique

et son gradient est colinéaire au gradient de la fonction de courant $\vec{\nabla}\psi'$ et est donc perpendiculaire à \vec{u}'

$$-\vec{\nabla}p' = \frac{2}{k^2 + l^2}(-\bar{\sigma}_n kl + \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_s - \bar{\omega})k^2 - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_s + \bar{\omega})l^2)\vec{\nabla}\psi'. \quad (2.24)$$

Avec la forme particulière (2.22), \vec{u}' s'écrit ainsi

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \sin(kx + ly) \begin{pmatrix} l \\ -k \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

et l'angle θ' a alors la forme suivante

$$\begin{pmatrix} \cos \theta' \\ \sin \theta' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \frac{l}{\sqrt{k^2 + l^2}} \\ \frac{-k}{\sqrt{k^2 + l^2}} \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Cela nous amène aux calculs suivants

$$-\vec{\nabla}p' = 2(\bar{\sigma}_n \cos \theta' \sin \theta' + \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_s - \bar{\omega}) \sin^2 \theta' - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_s + \bar{\omega}) \cos^2 \theta')\vec{\nabla}\psi' \quad (2.27a)$$

$$= (\bar{\sigma}_n \sin 2\theta' - \bar{\sigma}_s \cos 2\theta' - \bar{\omega})\vec{\nabla}\psi' \quad (2.27b)$$

$$= \bar{\sigma} (r_{ow} + \cos \zeta') \rho' e_{\perp}'^{\vec{}}. \quad (2.27c)$$

Comme le gradient de pression a la même direction que le vecteur $e_{\perp}'^{\vec{}}$, l'influence locale de $\vec{\nabla}p'$ sous nos hypothèses est simplement de modifier l'équation d'orientation ((2.17b) ou (2.19b)) et pas l'équation pour la norme ((2.17a) ou (2.19a)). On définit la projection du gradient de pression agéostrophique perturbé sur l'équation d'orientation : $P_{\theta}(p') \equiv -\vec{\nabla}p' \cdot e_{\perp}'^{\vec{}}/\rho'$. Ce terme qui s'ajoute dans l'équation d'orientation a la forme suivante avec les approximations sous-jacentes écrites plus haut

$$P_{\theta}(p') = \bar{\sigma} (r_{ow} + \cos \zeta'), \quad (2.28)$$

ce qui donne l'équation d'orientation complète suivante

$$\frac{\bar{D}\theta'}{Dt} = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}(r_{ow} + \cos \zeta') + P_{\theta}(p') = \frac{1}{2}\bar{\sigma}(r_{ow} + \cos \zeta'). \quad (2.29)$$

$\frac{\bar{D}\theta'}{Dt}$ est la somme de deux termes : le premier terme est la projection de $-\nabla\bar{u} \cdot \vec{u}'$ tandis que le second terme est la projection du gradient de pression qui vaut deux fois la valeur opposée du premier terme. Le gradient de pression dans cette équation n'est donc pas du tout négligeable. Les deux termes valent zero si \vec{u}' s'aligne avec les vecteurs propres de $\nabla\bar{u}$ et donc on a encore $\frac{\bar{D}\theta'}{Dt} = 0$ pour ces directions en considérant la pression. Si les coefficients de $\nabla\bar{u}$ étaient lentement variables le long d'une trajectoire lagrangienne, les directions des vecteurs propres seraient les directions privilégiées pour \vec{u}' en considérant le système complet (2.5).

Discussion sur l'approximation de la pression

Afin d'obtenir une expression analytique approchée du gradient de pression, nous avons considéré deux hypothèses, la monochromaticité de la perturbation et l'hypothèse WKB. L'idée de la présente sous-section est de discuter autour de ces deux hypothèses.

Notons d'abord que le membre de droite de l'équation (2.21a) fait intervenir les composantes de la vitesse perturbée qui sont des inconnues dans notre problème et que donc l'inconnue pression ne peut pas se déduire d'une résolution numérique de l'inverse du laplacien. Le but est donc d'exprimer analytiquement la pression en fonction des autres inconnues que sont les composantes de la vitesse perturbée. Etant donné que l'opérateur inverse du laplacien est un opérateur non local dont la solution analytique s'écrit à l'aide d'intégrales de fonctions de Green, cette dernière ne peut pas être facilement manipulée analytiquement sauf pour un certain choix de formes mathématiques, dont la forme monochromatique est la plus simple. L'avantage de la perturbation monochromatique est qu'elle permet au bout du compte une formulation explicite du gradient de pression (sans intégrales), et ce dernier peut s'écrire en fonction de la perturbation de vitesse et de quantités appartenant à l'écoulement de base. D'autres essais analytiques avec différentes formes de perturbation simples ont été testés, notamment la forme $\cos(kx)\cos(ly)$, et n'ont pas donné de résultats.

L'autre hypothèse est l'hypothèse WKB ; les variations spatiales de la perturbation sont considérées fortes par rapport aux variations spatiales de l'écoulement de base. Cette approximation est parfaitement vérifiée dans des cas limites analytiques bien connus comme le mécanisme d'Orr ou le cas d'un champ de déformation pur comme on va le voir dans la section suivante. On peut interpréter cette hypothèse à l'aide de l'équation de vortacité (2.4) qui peut aussi s'écrire $\frac{\partial \omega'}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \omega' - \vec{u}' \cdot \vec{\nabla} \bar{\omega}$. Si on note L' l'échelle spatiale de la perturbation et \bar{L} l'échelle spatiale de l'écoulement de base et qu'on compare les ordres de grandeur des deux termes du second membre de l'équation précédente, on obtient en ordre de grandeur $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \omega' \simeq \bar{u} u' / L'^2$ et $\vec{u}' \cdot \vec{\nabla} \bar{\omega} \simeq u' \bar{u} / \bar{L}^2$. Notre hypothèse qui correspond à $L' \ll \bar{L}$ amène à négliger l'advection de la vortacité de l'écoulement de base par la perturbation, $\vec{u}' \cdot \vec{\nabla} \bar{\omega}$, devant l'advection de la vortacité perturbée par l'écoulement de base, $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \omega'$. L'équation de vortacité à laquelle on aboutit s'interprète simplement comme la conservation de la vortacité perturbée le long d'une trajectoire Lagrangienne : $\frac{D\omega'}{Dt} = 0$. Cette hypothèse est utilisée par Lee (1995) pour étudier, à l'aide d'un modèle simple barotrope sur le plan f, la dynamique des "Storm-Tracks". Elle montre que l'hypothèse WKB qui aboutit à la conservation de la vortacité perturbée est relativement en accord avec les observations.

Enfin, l'approximation du gradient de pression provient de deux hypothèses fortes

mais les résultats numériques effectués dans notre modèle (cf section suivante) montrent que cette approximation au niveau de la projection sur l'équation d'orientation $P_\theta(p')$ est significative.

Points fixes de l'équation d'orientation complète

Les études de Lapeyre et al. (1999) et de Straub (2002) ont montré l'importance des variations de $\nabla \bar{\mathbf{u}}$ et plus précisément de la rotation des axes principaux du tenseur de déformation (rotation du vecteur \vec{D}). Reprenons leur idée en écrivant cette fois l'équation d'orientation complète dans le repère du champ de déformation. On obtient ainsi

$$\frac{\bar{D}\zeta'}{Dt} = \bar{\sigma}(r + \cos \zeta'), \quad (2.30)$$

où le paramètre r a déjà été défini dans la section précédente pour les gradients de traqueur et dont on redonne l'expression car il intervient aussi pour l'équation d'orientation complète des perturbations

$$r = \frac{\bar{\omega} + 2\frac{\bar{D}\bar{\phi}}{Dt}}{\bar{\sigma}}. \quad (2.31)$$

Comme $\frac{\bar{D}\zeta'}{Dt}(\zeta_{\pm}^{r'}) = 4\frac{\bar{D}\bar{\phi}}{Dt} \neq 0$, les points fixes de l'équation (2.19b), $\zeta_{\pm}^{r'}$, ne sont plus des points fixes de l'équation complète (2.30). L'équation complète (2.30) a deux points fixes déterminés par $\zeta_{\pm}^r \equiv \pm \arccos(-r)$. Notre approximation de la pression nous amène donc à deux couples de directions privilégiées $(\zeta_{-}^{r_{ow}}, \zeta_{+}^{r_{ow}})$ et $(\zeta_{-}^r, \zeta_{+}^r)$. Ces deux couples semblent être les plus appropriés pour représenter les valeurs les plus probables de ζ' et celui associé au paramètre r semble encore plus pertinent par analogie avec les résultats de Lapeyre et al. (1999) et Straub (2002). Un point important à noter est que les structures privilégiées productives c'est à dire $\zeta_{-}^{r_{ow}}$ et ζ_{-}^r , sont instables lorsqu'on considère l'équation d'orientation complète (cf appendix A de l'article II en annexe A), alors que lorsqu'on considère simplement l'équation d'orientation sans la pression, les directions productives $\zeta_{-}^{r_{ow}}$ et ζ_{-}^r , sont stables. Cet aspect sur la stabilité est important et est mis en relief dans les études analytiques de la section 2.5.

On remarque que le paramètre r_{ow} est inclus dans l'intervalle $[r', r]$ et que l'angle associé à ce paramètre est compris entre les valeurs des deux autres directions $\zeta_{-}^{r'}$ et ζ_{-}^r .

Dans l'appendice B de l'article II, on montre en prenant en compte le terme avec β , et en utilisant encore une perturbation monochromatique que la présence de β ne modifie pas l'équation d'orientation et donc les directions privilégiées restent les mêmes que sans β .

Remarques par rapport aux gradients de traceur

Dans cette section, nous décrivons les points communs et les différences entre la dynamique des perturbations de vitesse et celle des gradients de traceur.

La différence entre les deux dynamiques provient d'une raison plus complexe que la simple différence entre un champ non divergent et un gradient. En effet, on aurait pu écrire l'équation vérifiée par le gradient de la fonction de courant perturbée et la comparer à l'équation du gradient de traceur. L'équation pour $\vec{\nabla}\psi'$ fait intervenir deux inconnues, $\vec{\nabla}\psi'$ et $\vec{\nabla}p'$, tandis que celle des gradients de traceur ne fait intervenir qu'une seule inconnue $\vec{\nabla}\bar{\omega}$. Cela montre le caractère plus complexe de la dynamique des perturbations de vitesse.

Nos résultats sur l'équation d'orientation de la vitesse perturbée utilisent le même paramètre r qui intervient pour les gradients de traceur mais un changement de signe de r à $-r$ est nécessaire pour passer d'une physique à l'autre. Les points fixes des gradients de traceur sont déterminés par $2\theta_{\pm} + 2\bar{\phi} = \zeta_{\pm} = \pm \arccos(r)$ où θ_{\pm} désigne l'orientation du gradient de traceur associée aux deux points fixes dans le repère cartésien (Ox,Oy) alors que les points fixes des vitesses perturbées sont donnés par $2\theta'_{\pm} + 2\bar{\phi} = \zeta' = \zeta_{\pm}^r = \pm \arccos(-r)$ où θ'_{\pm} est l'orientation des points fixes des vitesses perturbées. Comme $\arccos(-r) = \pi - \arccos(r)$, il est facile de voir que les orientations θ_+, θ_- sont respectivement perpendiculaires aux orientations θ'_-, θ'_+ , c'est à dire que les points fixes destructif instable et productif stable des gradients de traceur sont respectivement perpendiculaires aux points fixes productif instable et destructif stable des vitesses perturbées. Ce résultat est finalement assez intuitif comme on le verra dans les cas simples de la section suivante 2.5.

Par ailleurs, il est bien connu que la dynamique des gradients de vorticité est invariante en effectuant un changement de repère par rotation solide et comme l'expliquent Lapeyre et al. (1999), le paramètre r l'est aussi, ce qui met en relief la pertinence du paramètre r . Dans le cas des perturbations de vitesse, on constate que notre méthode, en raison de l'approximation de la pression, aboutit au même paramètre r qui reste invariant.

2.4.3 Résumé des indices de croissance

L'analyse de l'équation d'orientation de la vitesse perturb e complète avec prise en compte de la pression a mis en évidence deux types d'orientations privil gi es ζ_{\pm}^{row} et ζ_{\pm}^r . Les deux orientations associ es à ces deux couples qui induisent une croissance de la perturbation (ζ_-^r et ζ_-^{row}) permettent de définir deux estimations analytiques du taux

d'extraction exponentiel d'énergie cinétique

$$\delta_{ow} \equiv -\bar{\sigma} \cdot \sin(\zeta_-^{r_{ow}}) = \sqrt{\bar{\sigma}^2 - \bar{\omega}^2}, \quad |r_{ow}| < 1, \quad (2.32a)$$

$$\delta_r \equiv -\bar{\sigma} \cdot \sin(\zeta_-^r) = \sqrt{\bar{\sigma}^2 - (\bar{\omega} + 2\frac{\bar{D}\bar{\phi}}{Dt})^2}, \quad |r| < 1. \quad (2.32b)$$

Par la suite, ces indices de croissance seront testés numériquement pour identifier quels sont les plus pertinents. On remarque que le maximum de δ est égal au taux de déformation $\bar{\sigma}$, il correspond à l'orientation instantanée optimale $\zeta' = -\pi/2$ et sera noté δ_{opt} .

2.5 Interprétation de nos résultats analytiques dans deux cas simples

Deux cas simples d'écoulements de référence, le cisaillement linéaire du mécanisme d'Orr puis un champ de déformation pur permettent d'interpréter en termes simples les résultats généraux trouvés dans la section précédente. *L'approximation de la pression faite dans la section précédente est totalement justifiée et rationalisée à l'aide de ces deux cas simples.*

2.5.1 Le mécanisme d'Orr

Dans le chapitre 1, on a mis en évidence la possibilité de croissance transitoire importante des perturbations sans présence d'instabilité modale à l'aide du mécanisme d'Orr. Dans ce cas simple de cisaillement linéaire du vent zonal, on a abouti au chapitre 1 (équation 1.10) pour une perturbation monochromatique à l'expression de l'amplification de l'énergie cinétique en fonction des nombres d'onde et du temps. Cette expression peut-être retrouvée avec notre approche, en intégrant d'abord l'équation d'orientation complète avec pression (2.30) puis l'équation pour la norme (2.19a). Cette méthode de résolution en intégrant d'abord l'équation d'orientation puis l'équation pour la norme a été mise au point par Lapeyre et al. (1999) pour les gradients de traceur. Appliquons cette méthode dans le cas des vitesses perturbées. Dans le cas de l'écoulement d'Orr, on a : $\bar{\sigma}_s = S > 0$, $\bar{\sigma}_n = 0$, et donc $\bar{\sigma} = S$, $2\bar{\phi} = 0$. De plus, la vorticit   vaut $\bar{\omega} = -S < 0$. Ceci implique que les deux param  tres r et r_{ow} sont   gaux et valent -1. On utilise l'  quation d'orientation calculé avec la pression qui dans le cas pr  sent s'  crit :

$$\frac{\bar{D}\zeta'}{Dt} = \bar{\sigma}(-1 + \cos \zeta'), \quad (2.33)$$

avec $\bar{\sigma} = S$, et l'équation pour la norme ρ' vaut :

$$\frac{1}{\rho'^2} \frac{\bar{D}\rho'^2}{Dt} = -\bar{\sigma} \sin \zeta'. \quad (2.34)$$

On écrit d'abord l'équation (2.33) de la façon suivante

$$\frac{\bar{D}\zeta'}{-1 + \cos \zeta'} = \bar{\sigma} Dt,$$

ce qui amène à l'expression

$$-\frac{\bar{D}(\zeta'/2 + \pi/2)}{\cos^2(\zeta'/2 + \pi/2)} = \bar{\sigma} Dt,$$

qui se résout ainsi

$$A_0 - \tan(\zeta'/2 + \pi/2) = \bar{\sigma} t,$$

où $A_0 = \tan(\zeta'_0/2 + \pi/2)$ est déterminée par la structure de la perturbation à l'instant initial. L'angle ζ' a donc l'expression suivante en suivant une trajectoire lagrangienne

$$\zeta' = \pi + 2 \arctan(A_0 - \bar{\sigma} t), \quad (2.35)$$

où A_0 désigne la structure de la perturbation au point où se trouvait la particule lagrangienne à l'instant initial. Cette formule peut s'introduire maintenant dans l'équation pour la norme (2.34) et on obtient

$$\frac{1}{\rho'^2} \frac{\bar{D}\rho'^2}{Dt} = 2\bar{\sigma} \frac{A_0 - \bar{\sigma} t}{1 + (A_0 - \bar{\sigma} t)^2},$$

ce qui se résout ainsi :

$$\frac{D}{Dt} \ln \rho'^2 = -\frac{D}{Dt} \ln(1 + (A_0 - \bar{\sigma} t)^2),$$

et on aboutit à la solution

$$\rho'^2 = \rho_0'^2 \frac{1 + A_0^2}{1 + (A_0 - \bar{\sigma} t)^2}. \quad (2.36)$$

On peut calculer A_0 en fonction des nombres d'onde de la perturbation monochromatique : $A_0 = \tan(\theta'_0 + \pi/2) = l/k$. Ainsi en suivant une trajectoire lagrangienne, en résolvant les équations avec notre approche dans le cas de l'écoulement d'Orr et d'une perturbation monochromatique, on obtient la solution

$$\rho'^2 = \rho_0'^2 \frac{k^2 + l^2}{k^2 + (Stk - l)^2}, \quad (2.37)$$

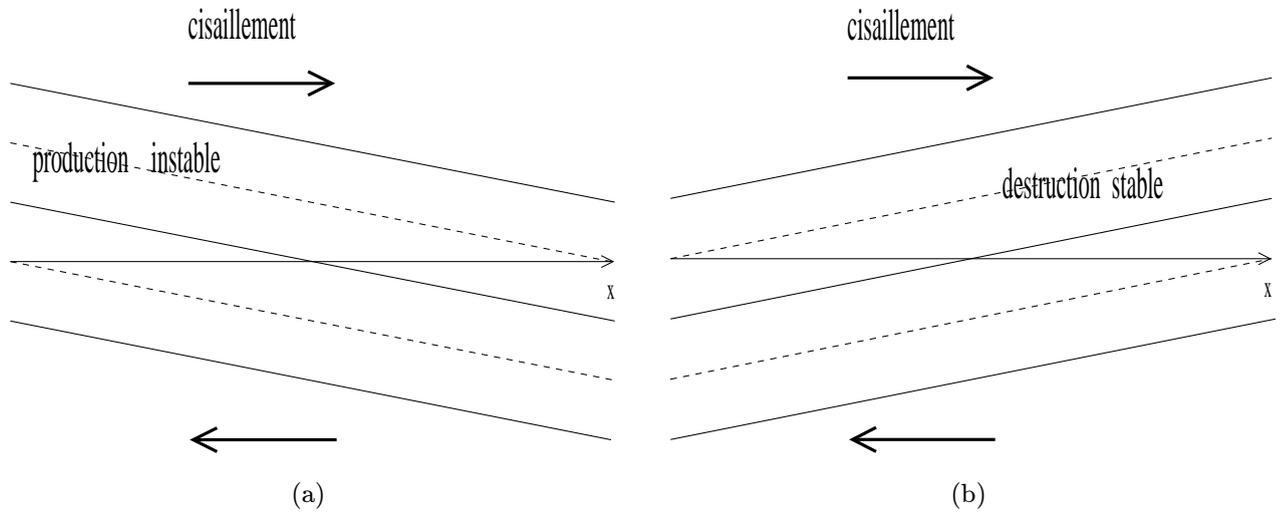


FIG. 2.3 – Schéma explicatif montrant comment dans le cas de l'écoulement d'Orr, l'axe Ox est à la fois la structure productive instable (a) et la structure destructive stable des perturbations (b). Le profil de vitesse est représenté par les flèches en gras et les isolignes de vorticité perturbée par la succession des lignes continues et des lignes en tirets.

qui en intégrant sur toutes les particules, nous permet de retrouver exactement l'équation (1.10).

Dans le cas précis de l'écoulement d'Orr et d'une perturbation monochromatique, il est logique de retrouver exactement les mêmes résultats que la section 1.2.2 du chapitre 1 par notre méthode d'intégration lagrangienne car *dans ce cas précis, notre calcul de la pression agéostrophique perturbée est parfaitement exact*. En effet, les hypothèses du calcul sous jacentes (variations spatiales faibles du tenseur du gradient de vitesse par rapport aux variations de la perturbation) sont exactes car $\bar{\sigma}_s$, $\bar{\sigma}_n$ et $\bar{\omega}$ sont des constantes. La résolution de nos équations de l'angle et de la norme est parfaitement exacte aussi car $r = -1$ est une constante ainsi que $\bar{\sigma}$.

Le cas simple du mécanisme d'Orr a le mérite non seulement de vérifier nos calculs mais aussi d'interpréter physiquement les diagnostics de production et de destruction établis précédemment dans le cas général complexe. Comme $\zeta_-^{r_{ow}} = \zeta_-^r = 0$ et $\zeta_+^{r_{ow}} = \zeta_+^r = 0$, les structures productives et destructives se confondent avec l'axe Ox. L'axe Ox est à la fois productif instable et destructif stable comme cela se voit facilement avec la figure 2.3 : la figure 2.3.a montre que l'axe Ox est productif instable puisque si on prend des isolignes de la perturbation de pente légèrement négatives, qui ont donc une structure productive, alors la structure de la perturbation s'éloigne de l'axe Ox par l'effet du cisaillement. L'inverse se produit (cf figure 2.3.b) pour des isolignes de la perturbation de pente légèrement positives

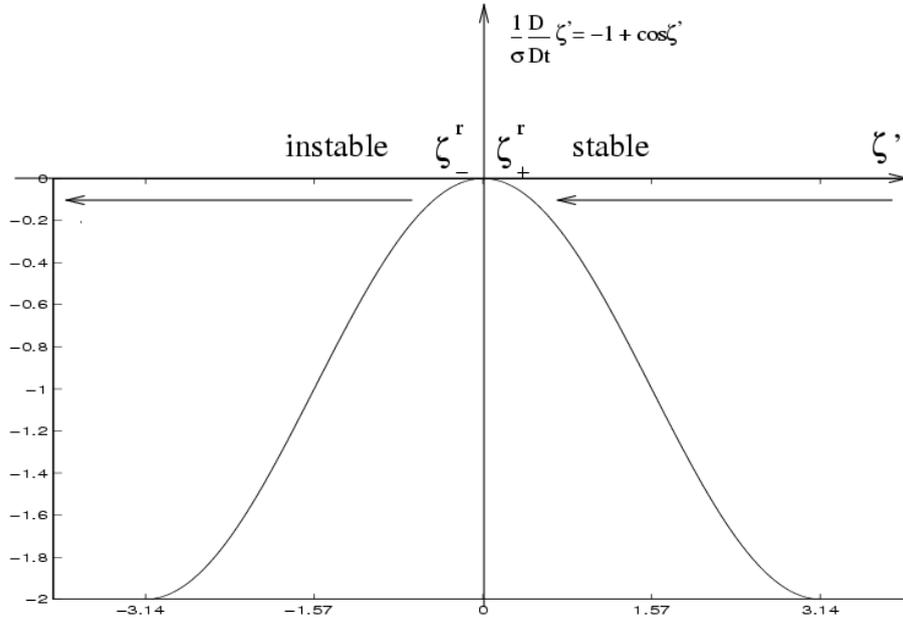


FIG. 2.4 – Schéma décrivant la stabilité des deux structures ζ_-^r et ζ_+^r dans le cas du mécanisme d’Orr ($r = -1$). La vitesse de l’angle ζ' , $\frac{D\zeta'}{Dt}$, est dessinée en fonction de l’angle ζ' d’après l’équation (2.33). La flèche horizontale du côté des ζ' négatifs, montre que pour les ζ' négatifs, on s’écarte de la valeur $\zeta' = \zeta_-^r = 0$ (région productive instable) alors que la flèche horizontale du côté des ζ' positifs, montre qu’au contraire on se rapproche de ce point $\zeta' = \zeta_+^r = 0$ (région destructive stable).

dont la structure est destructive mais stable. Cette vision qualitative peut s’exprimer d’un point de vue mathématique par le diagramme de stabilité montré sur la figure 2.4 qui se repose sur l’équation (2.33) pour l’angle ζ' . On aboutit au même résultat, c’est à dire que même si les deux points fixes productif et destructif sont confondus en un seul point, il y a une partie qui est instable productive pour $\zeta' < 0$ et une partie stable destructive pour $\zeta' > 0$. Cette situation simple met bien en relief le résultat général que *la pression joue un rôle déstabilisateur pour les structures productives et stabilisateur pour les structures destructives*.

Faisons un aparté sur les gradients de traceur qui se ramènent dans le cas présent aux gradients de vorticité perturbée. Le point fixe stable est productif pour les gradients de traceur alors qu’il est destructif pour les perturbations. Cela s’interprète physiquement dans les termes suivants : les isolignes de vorticité perturbée se resserrent au bout d’un certain temps (lorsqu’elles commencent à avoir une pente positive comme sur la figure 2.3.b), donc les gradients de vorticité perturbée croissent. Par contre comme la vorticité est faite de dérivées spatiales de la vitesse, que la vorticité est conservée, et que les isolignes

de vorticité se resserrent les amplitudes des vitesses doivent décroître. Une autre manière de comprendre ce résultat est la suivante ; l'amplitude des gradients de vorticité et des vitesses s'écrivent simplement en fonction de l'amplitude de la vorticité à l'aide du nombre d'onde totale K , $|\vec{\nabla}\omega'|_{max} = K|\omega'|_{max}$ et $|\vec{u}'|_{max} = |\omega'|_{max}/K$. Comme K croît au bout d'un certain temps, et que $|\omega'|_{max}$ est une constante, on en déduit que $|\vec{\nabla}\omega'|_{max}$ croît, tandis que $|\vec{u}'|_{max}$ décroît, ce qui explique simplement pourquoi les structures stables sont productives pour les gradients de traceur et destructives pour les perturbations de vitesse.

Finalement, notre approche dans le cas du mécanisme d'Orr montre que les structures privil gi es qu'on a mises en évidence ne sont pas des modes normaux et qu'on étudie un type d'instabilité non modale.

Pourquoi ne retrouve-t-on pas le critère de Rayleigh avec notre approche ? C'est une question qu'on se pose naturellement. Si on étudie un écoulement de référence du type $\vec{u} = U(y)\vec{e}_x$, notre calcul précédent est inchangé quel que soit la forme $U(y)$ et on n'aboutit donc jamais à des modes normaux. Plusieurs raisons font qu'on ne peut aboutir au critère de Rayleigh. La première est li e aux conditions aux limites : la perturbation monochromatique qui permet de calculer l'effet de la pression agéostrophique dans notre approche ne s'annule pas à l'infini par définition ; or c'est une des conditions pour obtenir le critère de Rayleigh et notre approche lagrangienne ne fait pas non plus intervenir les conditions limites, ce qui est un aspect très important pour faire apparaître les modes normaux. La deuxième est qu'on utilise l'hypothèse que les coefficients du tenseur du gradient de vitesse de l'écoulement de référence ont une structure spatiale lentement variable par rapport aux perturbations (toujours pour calculer la pression agéostrophique perturb e) : ceci est parfaitement vrai lorsque $U(y)$ est linéaire en y car les coefficients sont constants dans ce cas précis mais en général ce n'est pas vrai strictement.

2.5.2 Le champ de déformation pur

On étudie maintenant le cas du champ de déformation pur décrit dans la section 2.3.2. Dans les coordonnées (x', y') de la première et de la deuxième bissectrice (cf figure 2.1), la fonction de courant de l'écoulement de base a la forme suivante $\bar{\psi} = -Sx'y'$. La linéarisation de l'équation de conservation de la vorticité s'écrit ainsi dans ces coordonnées

$$\frac{\partial\omega'}{\partial t} + Sx'\frac{\partial\omega'}{\partial x'} - Sy'\frac{\partial\omega'}{\partial y'} = 0, \quad (2.38)$$

où la vorticité de la perturbation est conserv e. Si   l'instant initial, la perturbation a la forme suivante :

$$\omega'(x', y', t = 0) = F(x', y'), \quad (2.39)$$

alors l'évolution future est simplement déterminée par

$$\omega'(x', y', t) = F(x'e^{-St}, y'e^{+St}). \quad (2.40)$$

Considérons à l'instant initial, $t = 0$, une perturbation de la forme suivante

$$F(x, y) = A \cos(kx + ly) = A \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}((k+l)x' + (l-k)y')\right), \quad (2.41)$$

avec $k > 0$, et où on a effectué le changement de variable $x = (x' - y')/\sqrt{2}$, $y = (x' + y')/\sqrt{2}$ pour se placer dans le repère des axes de dilatation et de contraction. Alors la vorticité perturbée évolue selon l'équation

$$\omega'(x', y', t) = A \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}((k+l)x'e^{-St} + (l-k)y'e^{+St})\right), \quad (2.42)$$

et la fonction de courant vaut donc

$$\psi' = \frac{-A \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}((k+l)x'e^{-St} + (l-k)y'e^{+St})\right)}{2((k+l)^2e^{-2St} + (l-k)^2e^{+2St})}. \quad (2.43)$$

L'énergie cinétique de la perturbation a ainsi la forme suivante :

$$K' = \frac{A^2 \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}((k+l)x'e^{-St} + (l-k)y'e^{+St})\right)}{2((k+l)^2e^{-2St} + (l-k)^2e^{+2St})}, \quad (2.44)$$

ce qui moyennée sur une longueur d'onde vaut

$$\langle K' \rangle = \frac{A^2}{4((k+l)^2e^{-2St} + (l-k)^2e^{+2St})}. \quad (2.45)$$

Le rapport entre l'énergie cinétique à l'instant t et l'énergie cinétique à l'instant initial vaut :

$$\frac{\langle K' \rangle}{\langle K'_0 \rangle} = \frac{2(k^2 + l^2)}{(k+l)^2e^{-2St} + (l-k)^2e^{+2St}}. \quad (2.46)$$

Les conclusions sur le mécanisme de croissance dans ce champ de déformation pur sont similaires à celles du problème d'Orr même si dans le cas présent les termes temporels sont exponentiels et non pas algébriques. Si kl est négatif, c'est à dire si les isolignes de la perturbation ont une pente positive et ont donc la même inclinaison que l'axe de dilatation Ox' à l'instant initial (cf figure 2.2.a), alors l'énergie cinétique de la perturbation va en permanence décroître exponentiellement. Par contre, si kl est positif, c'est à dire si les isolignes de la perturbation ont une pente négative et ont donc la même inclinaison que l'axe de contraction Oy' à l'instant initial (cf figure 2.2.a), alors l'énergie cinétique de la perturbation va d'abord croître exponentiellement puis décroître exponentiellement. Ce

résultat pour le champ de déformation pur a été mis en évidence par Farrell (1989b). Il montre que la croissance exponentielle dans ce champ de déformation pur est du même ordre de grandeur que celle qu'on peut trouver avec les instabilités classiques barotropes et baroclines des écoulements parallèles cisailés.

Ce résultat se retrouve exactement à partir de notre méthode analytique lagrangienne comme le montrent les calculs suivants. Dans le cas du champ de déformation pur, on a : $2\bar{\phi} = 0$, $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_s = 2S$, $\bar{\omega} = 0$ et $\bar{\sigma}_n = 0$. Ceci implique que $r' = r = r_{ow} = 0$. On utilise l'équation d'orientation calculée avec la pression qui dans le cas présent s'écrit :

$$\frac{\bar{D}\zeta'}{Dt} = \bar{\sigma} \cos \zeta', \quad (2.47)$$

avec $\bar{\sigma} = 2S$. et l'équation pour la norme ρ' ne change pas :

$$\frac{1}{\rho'^2} \frac{\bar{D}\rho'^2}{Dt} = -\bar{\sigma} \sin \zeta'. \quad (2.48)$$

On résout l'équation (2.47) ainsi

$$\frac{\bar{D}\zeta'}{\cos \zeta'} = \bar{\sigma} Dt,$$

ce qui amène à la solution suivante

$$\ln(\tan(\zeta'/2 + \pi/4)) = A_0 + \bar{\sigma}t,$$

où $A_0 = \ln(\tan(\zeta'_0/2 + \pi/4))$ est déterminée par la structure de la perturbation à l'instant initial. L'angle ζ' a donc l'expression suivante en suivant une trajectoire lagrangienne

$$\zeta' = -\pi/2 + 2 \arctan(e^{A_0 + \bar{\sigma}t}). \quad (2.49)$$

Cette formule peut s'introduire maintenant dans l'équation pour la norme (2.48) et on obtient

$$\frac{1}{\rho'^2} \frac{\bar{D}\rho'^2}{Dt} = -\bar{\sigma} \tanh(A_0 + \bar{\sigma}t).$$

On résout l'équation de la façon suivante :

$$\frac{D}{Dt} \ln \rho'^2 = -\frac{D}{Dt} \ln(\cosh(A_0 + \bar{\sigma}t)),$$

qui aboutit à la solution

$$\rho'^2 = \rho_0'^2 \frac{\cosh(A_0)}{\cosh(A_0 + \bar{\sigma}t)}. \quad (2.50)$$

On peut calculer A_0 en fonction des nombres d'onde de la perturbation monochromatique : $e^{A_0} = \tan(\theta'_0 + \pi/4) = (l - k)/(l + k)$. Ainsi en suivant une trajectoire lagrangienne, en

résolvant les équations avec notre approche dans le cas du champ de déformation pur et d'une perturbation monochromatique, on obtient la solution

$$\rho^2 = \rho_0^2 \frac{2(k^2 + l^2)}{(k + l)^2 e^{-2St} + (l - k)^2 e^{+2St}}, \quad (2.51)$$

qui en intégrant sur toutes les particules, nous permet de retrouver exactement l'équation (2.46). Finalement, dans les deux cas simples analytiques, on retrouve exactement les croissances des perturbations : en fait, ceci est logique puisque toutes les hypothèses qui amènent à l'expression analytique de la pression agéostrophique perturbée (2.28) sont vérifiées. L'équation d'orientation est exacte à chaque instant : en effet, d'une part les coefficients du tenseur de gradient de vitesse sont constants et ce quel que soit le temps t . D'autre part la perturbation qui initialement est de la forme $\cos(kx + ly)$ évolue en prenant la forme $A(t) \cos(k(t)x + l(t)y + B(t))$ et donc la perturbation lors de son évolution garde la forme spatiale monochromatique. Le calcul de la pression agéostrophique à chaque instant est juste et l'équation d'orientation est du coup juste aussi dans les deux cas particuliers étudiés.

Il y a deux différences importantes entre l'écoulement cisailé d'Orr et le champ de déformation pur. La première différence est que dans l'un, les taux sont algébriques tandis que dans l'autre ils sont exponentiels. La deuxième différence est que dans le cas d'Orr, les points fixes ne sont associés à aucune croissance, \vec{E} et \vec{D} sont perpendiculaires ($\zeta_{\pm}^r = 0$) car la rotation et l'étirement se compensent ($|\bar{\omega}| = \bar{\sigma}$), alors que dans le cas de la déformation pure, la structure des points fixes est optimale, \vec{E} et \vec{D} sont colinéaires ($\zeta_{\pm}^r = \pm\pi/2$) car la rotation est nulle ($\bar{\omega} = 0$).

Ces deux exemples simples nous ont permis de rationaliser nos calculs faits dans la section 2.4 : *la pression est effectivement à l'origine de la déstabilisation des points fixes productifs. La croissance des perturbations repérée par nos points fixes est liée à de l'instabilité non modale.*

La figure 2.5 tirée de l'article de Farrell (1989b) illustre nos conclusions. Elle expose à l'aide de 4 sous-figures l'évolution temporelle d'une perturbation dans un champ de déformation pur qui initialement est orientée selon l'axe de contraction donc va croître pendant un certain temps tout en changeant son orientation pour tendre vers l'axe de dilatation. Les 4 instants choisis caractérisent la phase de croissance mais on s'aperçoit pour le dernier instant (quatrième figure) que la perturbation est plutôt orientée selon l'axe de dilatation et donc la phase de décroissance va commencer. La configuration initiale de la perturbation selon l'axe de contraction ne doit pas être interprétée comme la meilleure configuration pour optimiser la croissance, mais comme le processus logique de l'évolution passée de la perturbation. En effet, si on imagine que la perturbation passe d'un point selle

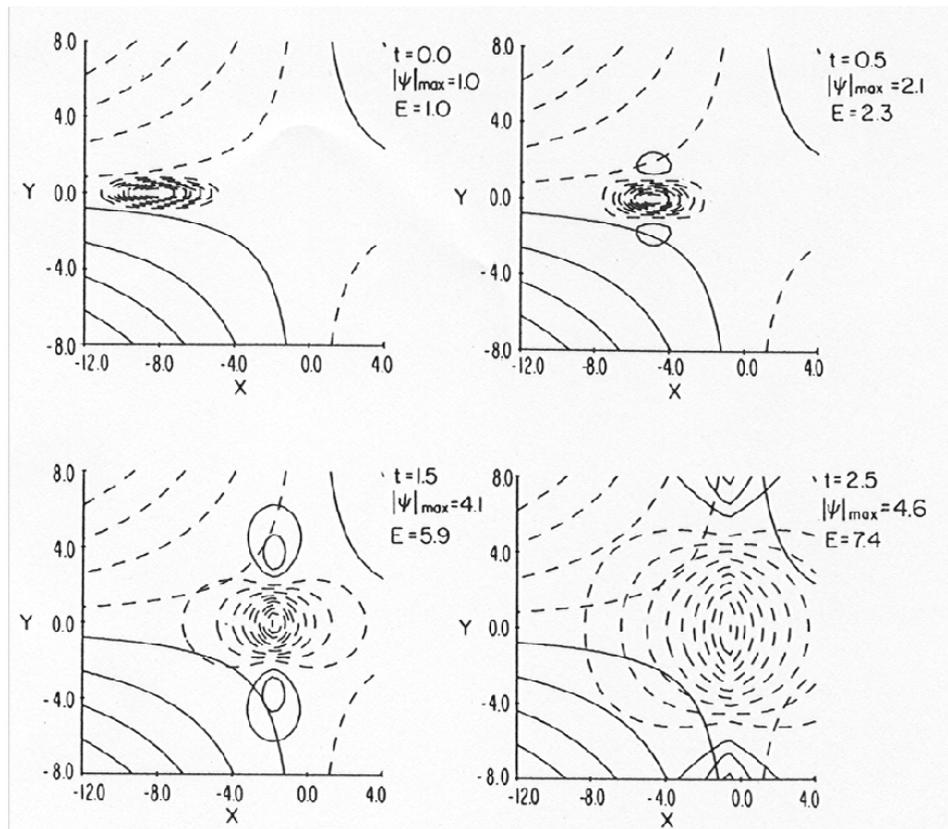


FIG. 2.5 – Evolution temporelle d'une perturbation dans un champ de déformation pur qui à l'instant initial est orientée selon l'axe de contraction et est caractérisée par une croissance transitoire lors de la phase initiale. Tiré de Farrell (1989b).

à un autre, lorsqu'elle sort du premier point selle, elle est orientée selon l'axe de dilatation de ce premier point selle puisque c'est l'axe stable. Cependant en entrant dans la deuxième région, l'axe selon lequel elle est orientée (l'axe de dilatation pour le premier point selle) est l'axe de contraction du deuxième. Ainsi la configuration de la perturbation sur la première sous-figure de la figure 2.5 doit être vue comme la structure la plus probable de l'évolution passée de la perturbation. On obtient donc *des séquences de croissance et de décroissance transitoire des perturbations*. Comment expliquer que globalement il va y avoir croissance des perturbations? Une réponse à cette question est donnée dans la discussion à la fin du chapitre.

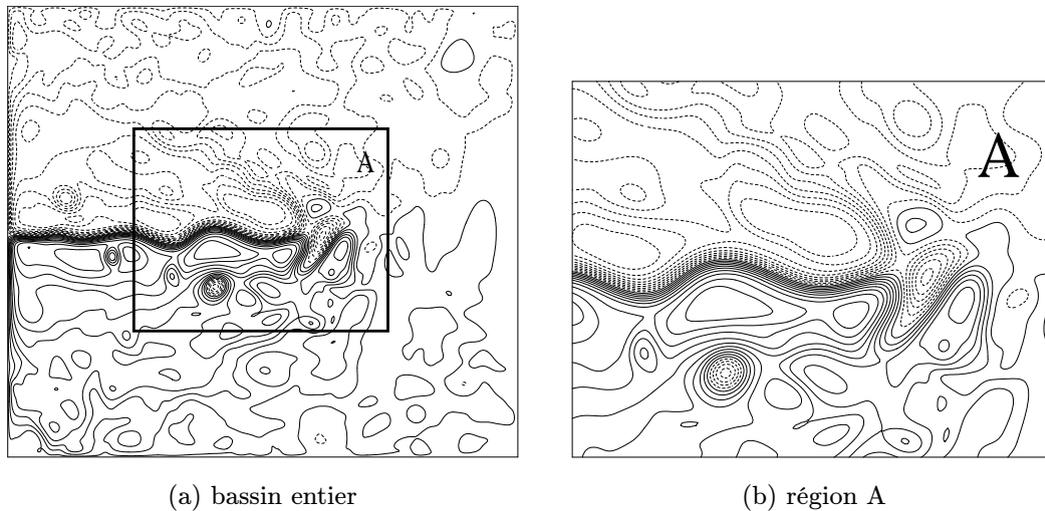


FIG. 2.6 – Fonction de courant de l'écoulement de référence $\bar{\psi}$ (T=10 jours) dans la première couche ; (a) bassin entier, (b) zoom sur la partie en bout de jet : région A

2.6 Résultats numériques

2.6.1 Le modèle quasigéostrophique à bassin fermé

Le modèle quasigéostrophique utilisé dans ce chapitre est un modèle à six couches dans un bassin fermé rectangulaire. L'écoulement de référence correspond à une situation océanique académique d'un double gyre (boucle de courant) forcé par le vent aux latitudes moyennes. Un jet fortement énergétique sépare la gyre anticyclonique au sud de celle cyclonique au nord : ce jet simule l'évolution de courants comme le Gulf Stream. Le jet a des méandres qui peuvent se détacher et former des tourbillons qui se dirigent ensuite vers l'ouest. Un exemple d'un tel écoulement est montré sur la figure 2.6 qui représente la fonction de courant $\bar{\psi}$ dans la première couche. Par la suite, on s'intéresse uniquement à une étude dans la région notée A qui se trouve au bout du jet (Figure 2.6.b) en raison de ses structures dynamiques plus variées et plus turbulentes. L'appendice C de l'article II placé en annexe A décrit précisément les caractéristiques du modèle. Des informations supplémentaires se trouvent dans les articles de Schmitz et Holland (1986) et de Barnier et al. (1991).

Les résultats sont établis pour un ensemble particulier de perturbations aléatoires. Cette technique de Monte-Carlo est développée dans l'appendice D de l'article II (annexe A). On considère par la suite des perturbations qui ont évolué pendant 10 jours ce qui correspond environ à 5 fois l'échelle de temps du taux de déformation. Même si

nos résultats analytiques sont développés à partir des équations linéarisées, *les résultats numériques montrés dans cette section sont effectués après de multiples simulations du code non linéaire*, c'est à dire chaque perturbation à $T=10$ jours est définie comme la différence de deux simulations du code non linéaire : une correspond au cas perturbé et l'autre à la simulation de référence. La taille initiale des perturbations correspond à 10% de la taille de l'écoulement de base pour la norme $L2$ de la fonction de courant. 100 perturbations aléatoires suffisent pour obtenir une convergence des statistiques montrées dans cette section.

2.6.2 Dynamique d'alignement

Régions où δ est grand

Le but de cette section est de vérifier si les orientations analytiques déterminées dans la section précédente sont effectivement les plus probables au regard des simulations numériques. La figure 2.7 représente les densités de probabilité des trois angles $(\zeta' - \zeta_-^r)$, $(\zeta' - \zeta_-^r)$ et $(\zeta' - \zeta_-^{r_{ow}})$ calculées avec 100 perturbations aléatoires dans les régions où $|r'| < 1$, $|r_{ow}| < 1$, $|r| < 1$ et $|\delta| > \frac{|\delta|_{max}}{10}$. Ces régions représentent seulement 10 % de l'espace physique ce qui est un faible pourcentage mais cependant logique puisque les perturbations ont tendance à grossir dans des régions bien localisées, comme on le verra par la suite, autour du jet et des tourbillons les plus énergétiques. Un autre point à noter est qu'on considère l'intersection des régions où les trois orientations analytiques existent, c'est à dire là où $|r'| < 1$, $|r_{ow}| < 1$, $|r| < 1$ pour pouvoir les comparer entre elles. Une comparaison deux à deux aboutit aux mêmes conclusions. Les régions de fortes valeurs de δ représentent à la fois des régions où le taux de déformation est important et à la fois des régions où les perturbations ont des structures proches de l'optimalité (ζ' proche de la valeur optimale $-\pi/2$).

Dans ces régions de fort δ , la structure la plus probable est liée au vecteur propre de $\nabla \bar{u}$ qui entraîne une croissance de la perturbation puisque la densité de probabilité de $\zeta' - \zeta_-^{r_{ow}}$ a un pic plus élevé que les deux autres densités de probabilité. Cette orientation dépend du paramètre r_{ow} c'est à dire de la fraction entre la vorticité et le taux de déformation de l'écoulement de réference. Elle est non triviale et est nettement plus probable que l'orientation optimale $-\pi/2$ dont la densité de probabilité n'est pas montrée ici car elle est insignifiante par rapport aux trois autres. Les deux vecteurs \vec{E} et \vec{D} sont donc statistiquement non colinéaires et forme un angle non trivial qui vaut en général $\pi/2 + \zeta_-^{r_{ow}}$. L'orientation $\zeta_-^{r_{ow}}$ est significative d'un point de vue quantitatif puisque les régions de fort δ où l'orientation existe ($|r_{ow}| < 1$ et $|\delta| > \frac{|\delta|_{max}}{10}$) correspond à 64 % des

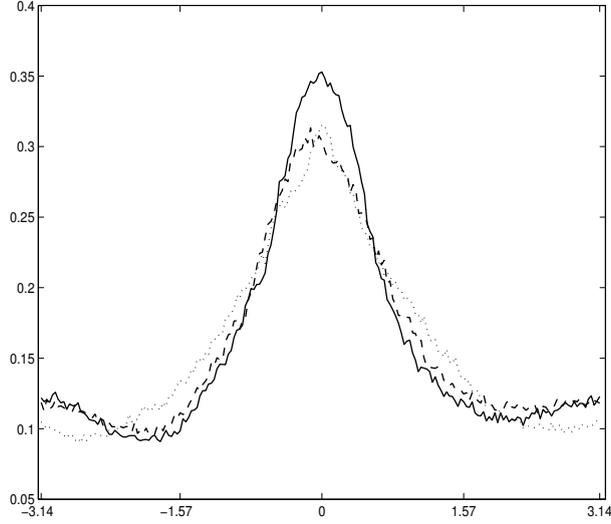


FIG. 2.7 – Densité de probabilité à $T=10$ jours de $\zeta' - \zeta_-^{r'}$ (ligne en tirets), de $\zeta' - \zeta_-^r$ (ligne en pointillés) et de $\zeta' - \zeta_-^{r_{ow}}$ (ligne continue) dans les régions où $|r'| < 1$, $|r_{ow}| < 1$, $|r| < 1$ et $|\delta| > \frac{|\delta|_{max}}{10}$. Cette statistique est obtenue avec un ensemble de 100 perturbations.

régions de fort δ ($|\delta| > \frac{|\delta|_{max}}{10}$). D'après les résultats analytiques, on s'attendait à ce que ζ_-^r soit le plus probable puisqu'il prend en compte l'effet de la pression agéostrophique perturbée et la rotation du vecteur \vec{D} le long d'une trajectoire lagrangienne. Le fait que l'orientation $\zeta_-^{r_{ow}}$ soit plus probable que $\zeta_-^{r'}$ ou que ζ_-^r est un résultat non prédit par nos résultats théoriques. Ce n'est pas a posteriori étonnant puisque notre approximation de la pression même si elle est significative (cf section sur la pression), n'est cependant pas très fine. On remarque que l'orientation qui émerge $\zeta_-^{r_{ow}}$ est finalement celle qui se trouve entre les deux autres : $\zeta_-^{r_{ow}}$ est inclus dans l'intervalle $[\zeta_-^{r'}, \zeta_-^r]$ puisque r_{ow} est dans l'intervalle $[r', r]$. Malgré le terme de stretching et les termes dissipatifs présents dans le modèle, on peut diagnostiquer analytiquement l'orientation qui émerge pour le vecteur vitesse perturbée qui provient à la fois de l'effet d'étirement du tenseur du gradient de vitesse et à la fois de l'effet de la pression agéostrophique perturbée.

Examinons maintenant la localisation spatiale du taux d'extraction exponentiel d'énergie cinétique δ . La moyenne d'ensemble de la valeur absolue de ce taux calculée avec les 100 réalisations est notée $\delta_{MC} \equiv \langle |\bar{\sigma} \sin \zeta'| \rangle$ et est comparée à deux estimations analytiques : l'une est le taux optimal, c'est à dire le taux de déformation $\delta_{opt} = \bar{\sigma}$, l'autre est le taux obtenu avec la direction du vecteur propre δ_{ow} défini en 2.4.3. Les trois quantités δ_{MC} , δ_{opt} et δ_{ow} sont représentées sur la figure 2.8. L'importance de l'angle ζ' sur le taux de Monte-Carlo δ_{MC} est net lorsqu'on compare les sous-figures de la figure 2.8. Si on se focalise sur la région à la sortie du jet (région a sur la figure 2.8.a), on remarque que

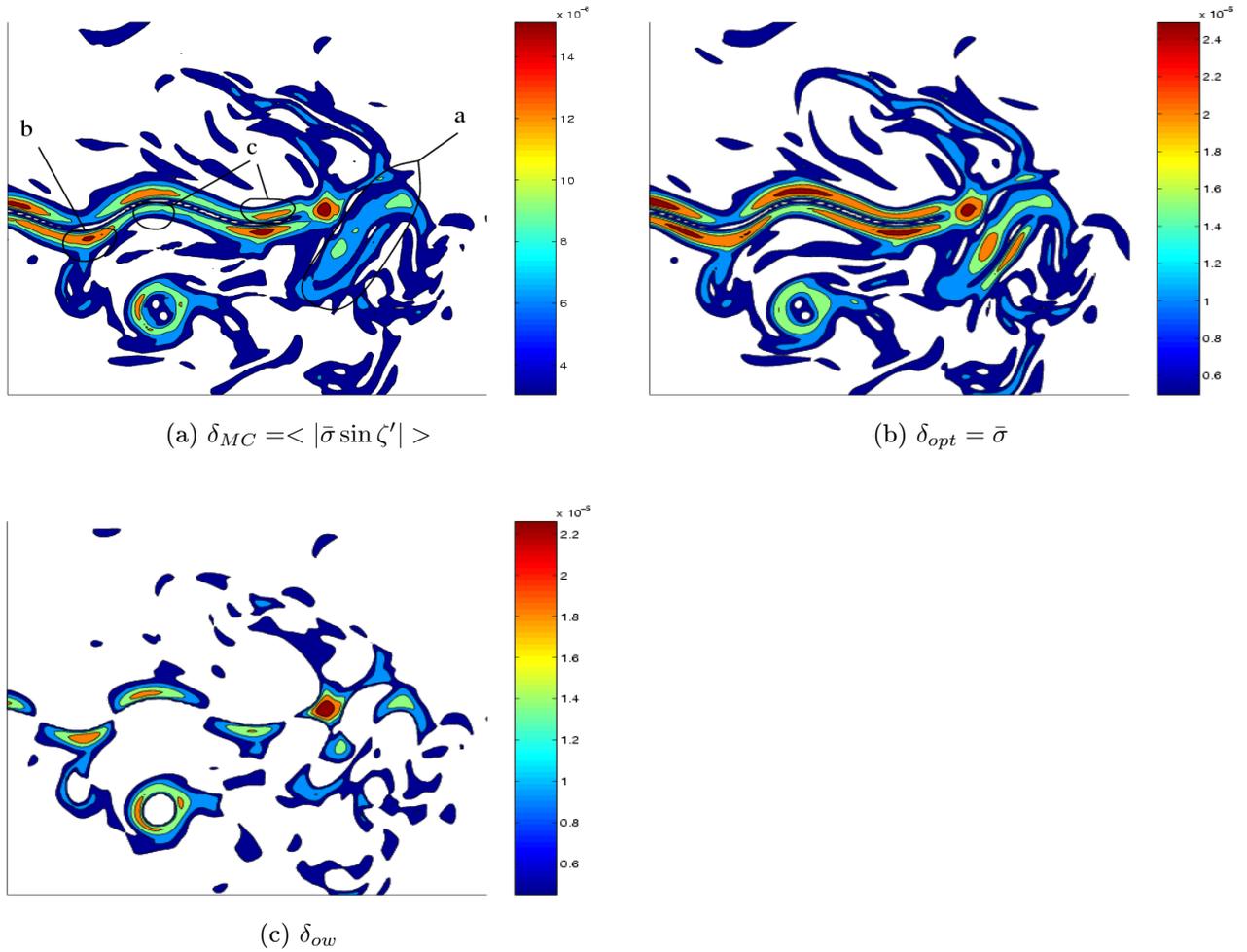


FIG. 2.8 – Localisation spatiale du taux d'extraction exponentiel à $T=10$ jours à l'intérieur de l'aire A ; (a) moyenne de la valeur absolue du taux d'extraction exponentiel pour les 200 réalisations, (b) taux de déformation $\delta_{max} = \bar{\sigma}$ et (c) estimation analytique du taux d'extraction exponentiel δ_{ow} . Les échelles de couleur en (a),(b) et (c) ne sont pas les mêmes.

le taux optimal $\bar{\sigma}$ (figure 2.8.b) a deux forts maxima qui ne sont pas représentés sur le taux de Monte-Carlo δ_{MC} (figure 2.8.a) car $|\sin \zeta'|$ est proche de 0 dans ces régions. Par contre, la trace de δ_{MC} dans la région a est clairement bien représentée par l'estimation analytique δ_{ow} (figure 2.8.c). Les régions telles que la région a sont telles que les maxima de $\bar{\sigma}$ ne correspondent pas aux maxima du taux d'extraction exponentiel car ils sont aussi des maxima de vorticité et donc on a à peu près $\delta_{ow} = \sqrt{\bar{\sigma}^2 - \bar{\omega}^2} \simeq 0$. D'autres régions révèlent de bonnes corrélations entre δ_{ow} et δ_{MC} , comme par exemple le sous-domaine b au sommet d'un méandre du jet qui est un maximum local des champs δ_{MC} et δ_{ow} mais pas du champ $\bar{\sigma}$. Ces 2 régions a et b montrent bien l'influence de l'angle ζ' sur le taux δ dont le comportement est bien capturé par $\zeta_-^{r_{ow}}$. Cependant, l'estimation analytique δ_{ow} n'existe pas dans les régions où $|r_{ow}| > 1$ qui sont présentes autour du jet dans les régions de forte courbure comme par exemple le sous-domaine c pour lequel aucune orientation privilégiée est obtenue par notre méthode. Dans ces régions où la valeur propre n'est pas réelle et où le taux d'extraction δ_{MC} est ni faible ni très fort, notre approche ne donne aucune orientation particulière et donc aucun taux d'extraction particulier.

Régions de forte extraction d'énergie cinétique

Sur la figure 2.9, les mêmes densités de probabilité que sur la figure 2.7 sont montrées mais dans une région où le produit scalaire entre \vec{E} et \vec{D} prend de fortes valeurs en valeur absolue. Ces régions sont donc des régions de forte extraction ou des régions de forte perte d'énergie cinétique. Comme $\vec{E} \cdot \vec{D} = \delta \cdot K'$, ces régions sont des régions qui ont beaucoup d'énergie cinétique et des régions où les perturbations ont des structures pas forcément proches de l'optimalité mais qui sont encore efficaces. Dans ces régions de forte extraction ou de forte perte d'énergie cinétique, la structure la plus probable est le point fixe calculé avec la pression ζ_-^r qui entraîne une extraction d'énergie. Il est légèrement plus représentatif que $\zeta_-^{r_{ow}}$ et nettement plus que $\zeta_-^{r'}$ le point fixe calculé sans la pression. Ce résultat est robuste puisqu'il a été vérifié pour d'autres types de perturbations aléatoires et dans un modèle QG double périodique. Il est cependant difficile de trancher entre ζ_-^r et $\zeta_-^{r_{ow}}$ pour savoir quel est le plus pertinent dans ces régions car d'un côté la densité de probabilité de $\zeta' - \zeta_-^r$ a un plus haut pic que celle de $\zeta' - \zeta_-^{r_{ow}}$ mais d'un autre côté les régions où l'orientation $\zeta_-^{r_{ow}}$ existe couvrent une plus grande partie des régions de forte activité que celles où l'orientation ζ_-^r existe. En effet, les régions où $|r_{ow}| < 1$ et $|\vec{E} \cdot \vec{D}| > |\vec{E} \cdot \vec{D}|_{max}/200$ représente 56 % des régions déterminées par $|\vec{E} \cdot \vec{D}| > |\vec{E} \cdot \vec{D}|_{max}/200$ alors que celles où $|r| < 1$ et $|\vec{E} \cdot \vec{D}| > |\vec{E} \cdot \vec{D}|_{max}/200$ représente seulement 45 % de ces régions.

En ce qui concerne l'ensemble utilisé précédemment, les régions de production remplissent plus d'espace que les régions de destruction et un fort alignement pour les orien-

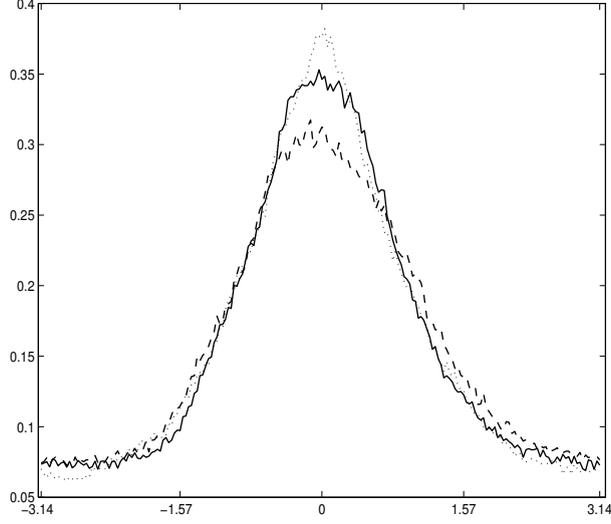


FIG. 2.9 – Densité de probabilité à $T=10$ jours de $\zeta' - \zeta_-^{r'}$ (ligne en tirets), de $\zeta' - \zeta_-^r$ (ligne en pointillés) et de $\zeta' - \zeta_-^{r_{ow}}$ (ligne continue) dans les régions où $|r'| < 1$, $|r_{ow}| < 1$, $|r| < 1$ and $|\vec{E} \cdot \vec{D}| > \frac{|\vec{E} \cdot \vec{D}|_{max}}{200}$. Cette statistique est obtenue avec un ensemble de 100 perturbations.

tations productives, ζ_-^r ou $\zeta_-^{r_{ow}}$, a été remarqué précédemment en prenant en compte à la fois les régions productives et les régions destructives.

La densité de probabilité jointe entre le taux d'extraction exponentiel de Monte-Carlo δ et le taux d'extraction analytique δ_{ow} (cf figure 2.10) permet de distinguer les propriétés liées aux régions de production à celles des régions de destruction. L'estimation analytique δ_{ow} correspond à une bonne approximation des δ des perturbations aléatoires car la plupart des points se trouvent autour de la première bissectrice c'est à dire qu'ils correspondent à une corrélation +1 entre δ et δ_{ow} . On retrouve donc le résultat obtenu précédemment. Mais un certain nombre de points sont sur la seconde bissectrice ce qui correspond à une corrélation -1 entre les deux taux. En fait, cette seconde branche correspond à des régions destructives où l'orientation privilégiée est $\zeta_+^{r_{ow}}$. Pour l'ensemble particulier de perturbations aléatoires choisi ici, les régions de destruction remplissent nettement moins l'espace que les régions de production. Mais au vu de résultats effectués sur plusieurs ensembles de perturbations aléatoires, la proportion entre les régions de production et les régions de destruction d'énergie cinétique dépend de l'échelle spatiale des perturbations aléatoires. Si on avait calculé séparément des densités de probabilité pour les régions de production et de destruction, on remarquerait que dans les régions de production, on a un fort alignement pour les directions ζ_-^r ou $\zeta_-^{r_{ow}}$ mais que pour les régions de destruction, ζ_+^r ou $\zeta_+^{r_{ow}}$ sont les orientations les plus probables. Ces propriétés ont été vérifiées pour plusieurs ensembles de perturbations et semblent être génériques même si la proportion

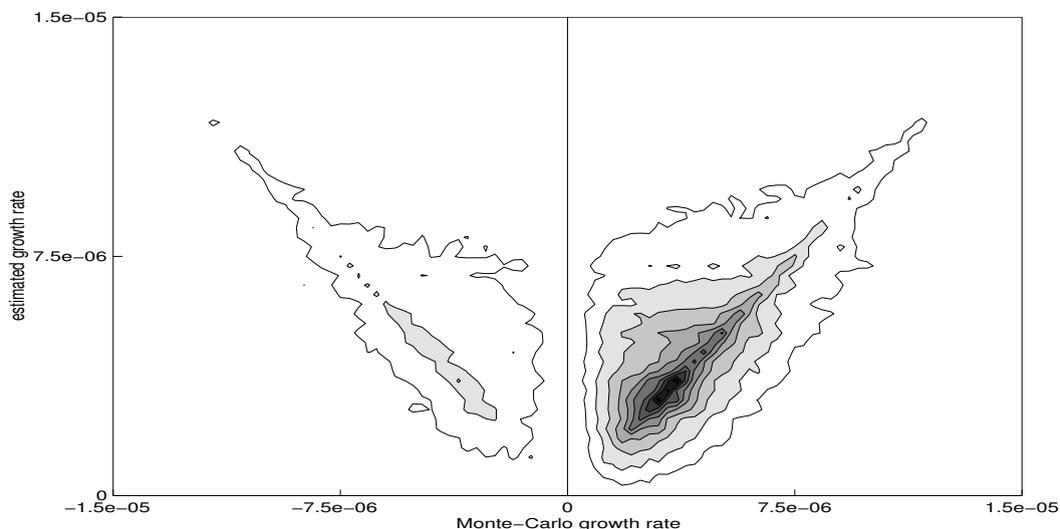


FIG. 2.10 – Densité de probabilité jointe à $T=10$ jours du taux d'extraction exponentiel de Monte-Carlo δ (en abscisse) et de l'estimation analytique δ_{ow} (en ordonnée) dans les régions où $|r_{ow}| < 1$ et $|\vec{E} \cdot \vec{D}| > \frac{|\vec{E} \cdot \vec{D}|_{max}}{200}$.

entre régions de production et régions de destruction est une quantité qui dépend des perturbations.

Pour conclure avec les structures des perturbations les plus probables dans les régions d'extraction ou de perte en énergie cinétique, les figures 2.7, 2.9 et 2.10 montrent que les structures les plus probables sont celles liées aux couples $\zeta_{\pm}^{r_{ow}}$ et ζ_{\pm}^r qui sont déterminées en prenant en compte la pression agéostrophique perturbée alors que le couple $\zeta_{\pm}^{r'}$ calculé sans prendre en compte cette pression n'est pas pertinent.

Régions de forte énergie cinétique

Dans Mak et Cai (1989), les auteurs insistent sur le fait que les régions d'extraction d'énergie sont bien distinctes des régions où l'énergie cinétique est déjà redistribuée. Et donc la question qu'on pose dans cette section est quel est l'alignement le plus probable pour le vecteur vitesse perturbée dans les régions de forte énergie cinétique ? Pour répondre à cette question, on définit l'angle suivant

$$\zeta'_0 \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } r_{ow} > 0 \\ -\pi & \text{si } r_{ow} < 0 \end{cases} . \quad (2.52)$$

Cet angle n'induit aucune extraction puisque si $\zeta' = \zeta'_0$, le taux d'extraction associé δ est nul et les deux vecteurs \vec{E} et \vec{D} sont perpendiculaires. Cet angle a aussi la propriété d'être continu avec l'angle $\zeta_-^{r_{ow}}$ pour $r_{ow} = \pm 1$. La densité de probabilité de $\zeta' - \zeta'_0$ est comparée

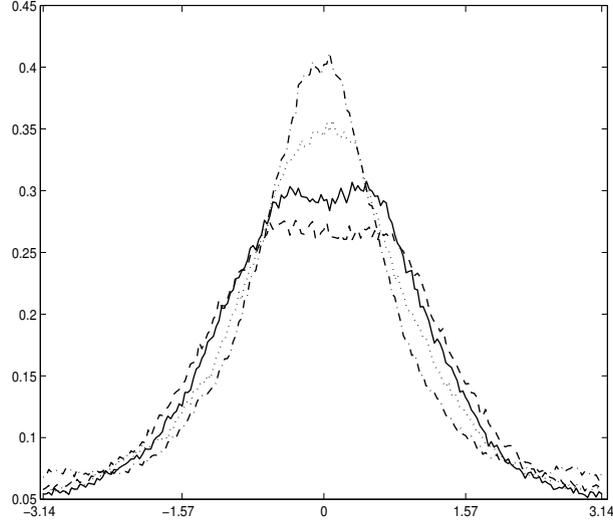


FIG. 2.11 – Densité de probabilité à $T=10$ jours de $\zeta' - \zeta'_0$ (ligne en tirets et pointillés), $\zeta' - \zeta'^r$ (ligne en tirets), $\zeta' - \zeta^r$ (ligne en pointillés) et $\zeta' - \zeta'^{row}$ (ligne continue) dans les régions où $|r'| < 1$, $|r_{ow}| < 1$, $|r| < 1$ et $|u'| > \frac{|u'_{max}|}{10}$.

avec celles des trois autres orientations analytiques sur la figure 2.11 dans les régions de forte énergie cinétique. L'angle le plus probable est clairement ζ'_0 qui induit aucune extraction. Ce résultat montre que les régions où l'énergie cinétique est déjà redistribuée sont des régions en équilibre où ni production ni destruction ne se produit et où les deux vecteurs \vec{E} et \vec{D} sont statistiquement perpendiculaires. La séparation spatiale entre les régions d'extraction d'énergie et celles de forte énergie cinétique peut être vue maintenant en termes de structures pour les perturbations : les régions d'extraction sont caractérisées par un angle non trivial entre \vec{E} et \vec{D} qui est soit $\pi/2 + \zeta'^{row}$, soit $\pi/2 + \zeta^r$ et les régions de forte énergie cinétique sont caractérisées par la perpendicularité entre \vec{E} et \vec{D} . Pour la dynamique des gradients de traceurs, on remarque qu'il n'y a pas de telle distinction (cf figure 5.a de Lapeyre et al., 1999), les régions de forts gradients sont des régions où la croissance des gradients est très forte aussi.

Vérification de la consistance de l'approximation du gradient de pression agéostrophique perturbé

Dans cette section, on veut vérifier numériquement que l'expression analytique trouvée en 2.4.2 pour paramétrer la projection du gradient de pression agéostrophique perturbé sur l'équation d'orientation est pertinente. La figure 2.12 est la densité de probabilité jointe entre la projection du gradient de pression sur l'équation d'orientation $P_\theta(p')$ (en

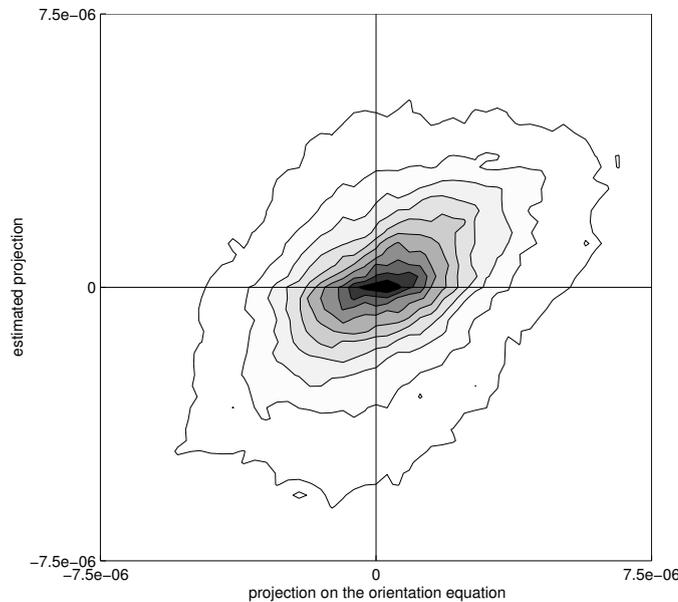


FIG. 2.12 – Densité de probabilité jointe à $T=10$ jours de la projection du gradient de pression sur l'équation d'orientation $P_\theta(p')$ et de son estimation analytique $\bar{\sigma}(r_{ow} + \cos \zeta')$ dans les mêmes régions que pour la figure 2.10.

abscisse) et son estimation analytique $\bar{\sigma}(r_{ow} + \cos \zeta')$ (en ordonnée). La figure montre un ellipsoïde centré autour du point $(0, 0)$ dont l'axe principal est proche de la première bissectrice. Le rapport entre le grand axe et le petit axe est environ 1.5. Cela signifie que la formule analytique est significative et permet de capturer à peu près le comportement du gradient de pression. La plupart des points sont localisés autour du point $(0, 0)$: le fait que la projection du gradient de pression soit proche de 0 ($x=0$) pour les directions des vecteurs propres ($y=0$) est donc confirmé numériquement. L'approximation analytique de $P_\theta(p')$, même si elle provient d'une forte hypothèse, est donc significative et représente plutôt bien l'influence du gradient de pression.

Résumé des résultats

Les résultats précédents concernant les orientations relatives entre \vec{E} et \vec{D} sont résumés sur le schéma de la figure 2.13. Le schéma est obtenu pour une perturbation typique qui initialement est grande échelle. Après 10 jours, la perturbation évolue de telle manière qu'elle reste autour des méandres du jet et a une échelle spatiale typique qui est comparable à celle des méandres. On remarque que les caractéristiques des différentes régions peuvent être déduites de l'orientation des isolignes de la perturbation par rapport au cisaillement du jet. Les régions entre la ligne a et la ligne d sont des régions de production : la

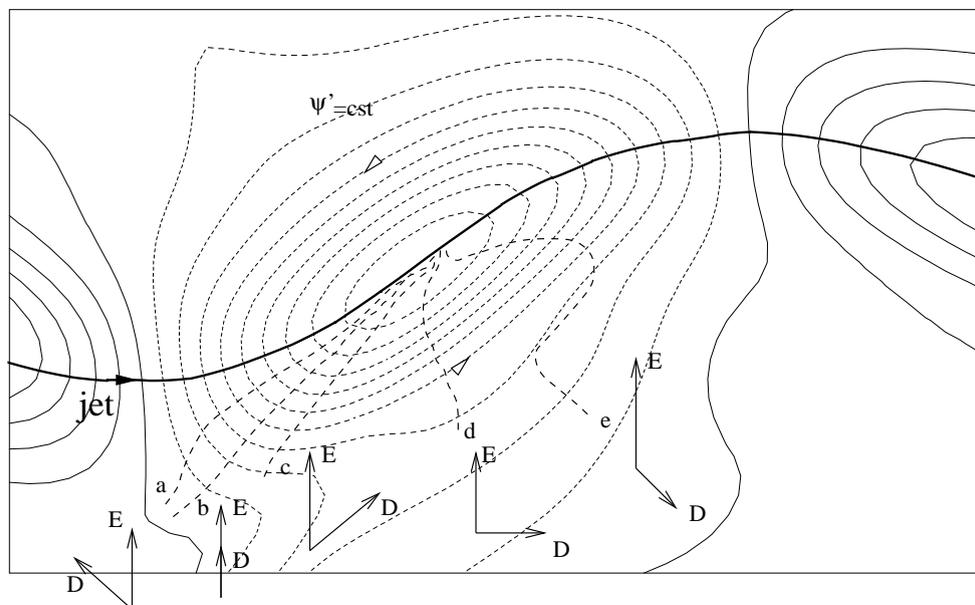


FIG. 2.13 – Schéma résumant les différents résultats sur la dynamique d'alignement avec une représentation spatiale d'une perturbation grande échelle typique autour du jet à $T=10$ jours. L'axe du jet correspond à la ligne continue en gras, les isolignes de la fonction de courant de la perturbation sont les fines lignes en traits pleins et en tirets. Les isolignes de $\pi/2 + \zeta'$ pour cette perturbation particulière correspondent aux lignes en tirets en gras : $-\pi/4$ (ligne a), 0 (ligne b), $\pi/4$ (ligne c), $\pi/2$ (ligne d), $3\pi/4$ (ligne e).

perturbation peut extraire de l'énergie à l'écoulement de référence puisque ses isolignes ont une inclinaison opposée à celle du cisaillement. Entre la ligne a et la ligne c, la structure de la perturbation est efficace puisque les vecteurs \vec{E} et \vec{D} sont proches de la colinéarité : dans ces régions, δ est grand, et l'orientation la plus probable est ζ_{-}^{row} . Entre la ligne c et la ligne d, la structure de la perturbation est moins efficace mais l'énergie cinétique est importante (les iso- ψ' sont plus resserrées qu'entre la ligne a et c) : c'est une région de forte extraction ($\vec{E} \cdot \vec{D} > 0$) où les orientations les plus probables sont ζ_{-}^{row} et ζ_{-}^r . La ligne d est une ligne où \vec{E} et \vec{D} sont perpendiculaires et correspond à peu près à une ligne de maximum d'énergie cinétique (ligne où les iso- ψ' sont les plus resserrées). Les régions se trouvant entre les lignes d et e sont destructives puisque les isolignes de la perturbation ont une inclinaison dans le même sens que celle du cisaillement : les structures les plus probables dans ces régions sont ζ_{+}^{row} et ζ_{+}^r .

2.7 Discussion

2.7.1 Par rapport à nos résultats

Les résultats de ce chapitre correspondent uniquement à *des diagnostics instantanés et locaux* de l'extraction d'énergie cinétique des perturbations à l'écoulement de base. Le dernier chapitre de la thèse aura pour but d'établir un pont entre ces diagnostics instantanés de l'extraction et la dynamique de croissance *globale* des perturbations *pendant un temps fini*.

Revenons maintenant aux conclusions proprement dites du présent chapitre. L'analyse d'alignement du vecteur vitesse perturbée a permis de mettre en place des diagnostics de croissance de l'énergie cinétique des perturbations, en particulier au bout d'un temps fini, on a obtenu deux diagnostics analytiques pour le taux d'extraction exponentiel $\delta \simeq \delta_{ow} = \sqrt{\bar{\sigma}^2 - \bar{\omega}^2}$ et $\delta \simeq \delta_r = \sqrt{\bar{\sigma}^2 - (\bar{\omega} + 2\frac{D\bar{\phi}}{Dt})^2}$ qui sont associés à deux angles particulier entre \vec{E} et \vec{D} : $\zeta_{\pm}^r + \pi/2$ et $\zeta_{\pm}^{r_{ow}} + \pi/2$. Ils font intervenir le taux de déformation $\bar{\sigma}$, la vorticité relative et la rotation du vecteur \vec{D} . *Ces indices analytiques de croissance se sont révélés pertinents au vu des résultats numériques effectués.*

On a montré que l'effet de la pression agéostrophique perturb e était clairement non négligeable et qu'en plus sa projection selon l'équation d'orientation valait deux fois l'opposé de la projection du terme faisant intervenir le tenseur $\nabla\vec{u}$. Ce résultat est issu d'une approximation de la pression qui a été valid e numériquement. Du coup, *la pression est responsable du caractère instable des structures productives (structures qui engendrent une croissance des perturbations)*. Cet effet a clairement été mis en évidence dans deux cas simples (Orr et "strain pur") *ce qui permet d'interpréter nos indices de croissance comme la conséquence d'un type d'instabilité non modale.*

L'approximation de la pression est la seule quantité approch e intervenant dans l'équation d'orientation du vecteur vitesse perturb e. L'analyse analytique de cette équation approch e nous a amené à l'orientation privil gi e ζ_{\pm}^r associ e au paramètre r . Le fait que, finalement, les résultats numériques aboutissent à deux orientations privil gi es, ζ_{\pm}^r et $\zeta_{\pm}^{r_{ow}}$ peut s'expliquer par le caractère non exact de l'approximation de la pression. Une approximation plus fine que celle faite dans le présent chapitre conduirait peut être à expliquer pourquoi r est pertinent dans certaines régions et r_{ow} l'est dans d'autres.

Un résultat sur la croissance globale des perturbations qui n'a pas encore été évoqué est le suivant : si on calcule l'amplification entre 0 jour et 10 jours de la moyenne spatiale de l'énergie cinétique de chaque perturbation de l'ensemble de Monte-Carlo, on peut montrer que cette amplification est supérieure à un, quelle que soit la perturbation. La question qui vient à l'esprit est donc la suivante : comment peut-on expliquer le fait que globalement

les perturbations croissent malgré le constat précédent que la structure productive est instable et la structure destructive stable ? On peut répondre à cette question à partir du caractère exponentiel du terme d'extraction $\vec{E} \cdot \vec{D}$. Supposons qu'il existe à l'instant $t = 0$, deux régions A et B de même surface. La région A est productive, dans cette région le taux exponentiel d'extraction est $\delta = d > 0$ et l'énergie cinétique vaut K'_0 à l'instant initial. La région B est destructive, le taux d'extraction est l'opposé du précédent $\delta = -d < 0$ et l'énergie cinétique vaut aussi K'_0 à l'instant initial. Cette situation est sensée représenter deux régions dynamiquement similaires avec la différence que dans la région A la structure perturbée a la structure privilégiée productive et dans la région B elle a la structure destructive. Après un instant $T > 0$, la région A a accumulé plus d'énergie que la région B n'en a perdu : en effet, l'énergie accumulée entre $t = 0$ et $t = T$ dans la région A vaut $K'_0(e^{dT} - 1)$ et celle perdue dans la région B vaut $K'_0(1 - e^{-dT})$, or comme $e^{dT} + e^{-dT} > 2$ quel que soit d et T , on a $K'_0(e^{dT} - 1) > K'_0(1 - e^{-dT})$. Les résultats numériques montrent que globalement les perturbations croissent et cela peut se comprendre de la façon suivante : *Le caractère exponentiel de l'extraction qui favorise la production a un effet plus important que le caractère stable-instable qui favorise la destruction.*

2.7.2 Par rapport aux méthodes existantes

Une première remarque, essentiellement mathématique, est de constater un certain nombre d'analogies entre les résultats des modes normaux des modèles classiques d'Eady et de Phillips du chapitre 1 et les résultats des modes les plus probables (ζ_{\pm}^r et ζ_{\pm}^{row}) du présent chapitre. L'analogie est liée aux similitudes entre l'équation (1.12) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mathbf{A}\Phi,$$

où Φ est le vecteur d'état perturbé à deux dimensions dans les modèles d'Eady et de Phillips et l'équation (2.5) :

$$\frac{\bar{D}\vec{u}'}{Dt} = -\nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \vec{u}' - \vec{\nabla} p',$$

qui régit localement l'évolution du vecteur vitesse \vec{u}' . Ces deux équations ont des similarités telles que les propriétés des modes normaux dans les modèles d'Eady et de Phillips ont des points communs avec celles des modes les plus probables (ζ_{\pm}^r et ζ_{\pm}^{row}). La première similarité est que le mode normal instable pour l'équation (1.12) est la structure productive la plus probable dans les modèles simples d'Eady et de Phillips vers laquelle les autres structures perturbatives tendent au bout d'un certain temps ; ceci est comparable aux structures ζ_{\pm}^r et ζ_{\pm}^{row} vers lesquelles tendent les perturbations au bout d'un temps fini comme on l'a montré dans ce chapitre. La deuxième similarité concerne la notion de

nombre d'onde de coupure : en effet, les modes normaux dans les deux modèles classiques n'existent plus lorsque le nombre d'onde k est supérieur à un nombre d'onde de coupure k_c . Cela se traduit par le fait qu'au-delà de ce nombre d'onde de coupure, la partie antisymétrique de l'opérateur linéaire \mathbf{A} est plus forte que la partie symétrique (cf article I). De même, dans le cadre de notre étude locale, les structures $\zeta_{\pm}^{r_{ow}}$ n'existent plus lorsque la partie antisymétrique de l'opérateur $\nabla\bar{\mathbf{u}}$, déterminée par la vorticité $\bar{\omega}$, est plus importante que sa partie symétrique caractérisée par le taux de déformation $\bar{\sigma}$. Ainsi, de même qu'il existe dans les modèles simples d'Eady et de Phillips des nombres d'onde de coupure au delà desquels il n'y a pas de modes normaux ($k > k_c$), de même il existe des endroits dans l'espace physique où notre approche ne donne pas de structures privilégiées ($|r_{ow}| = |\bar{\omega}/\bar{\sigma}| > 1$). Maintenant qu'on a décrit les analogies entre les 2 systèmes, décrivons leurs différences. Outre la différence entre le caractère lagrangien de l'équation (2.5) et eulérien de l'équation (1.12) qui est bien évidemment cruciale pour le comportement des deux dynamiques, il existe deux autres différences. La première est liée au fait que le tenseur $\nabla\bar{\mathbf{u}}$ varie au cours du temps le long d'une trajectoire lagrangienne ; c'est cet aspect qui a été clairement mis en évidence dans la thèse de Lapeyre (2000) pour les gradients de traceur lorsqu'il étudie l'équation (2.7) :

$$\frac{\bar{D}\vec{\nabla}\bar{q}}{Dt} = -\nabla\bar{\mathbf{u}}^T\vec{\nabla}\bar{q},$$

et le paramètre r prend en compte cette variation au cours du temps. La deuxième grande différence est liée à l'influence de la pression agéostrophique perturbée qui déstabilise les structures productives et qui a été mis en évidence dans ce chapitre et qui n'intervient que pour le système local (2.5). Les différentes considérations ci-dessus permettent de mieux comprendre les analogies et les différences entre les 3 systèmes d'évolution (1.12), (2.7) et (2.5).

Dans la deuxième remarque qui suit, on se place d'un point de vue global pour essayer de clarifier notre approche par rapport aux méthodes perturbatives déjà existantes dans la littérature pour les écoulements spatialement complexes. Pour être plus explicite, la question qu'on se pose est la suivante : est ce que les structures associées aux angles ζ_{\pm}^r et $\zeta_{\pm}^{r_{ow}}$, sont des structures caractéristiques des modes normaux, des vecteurs singuliers ou des "bred modes" (perturbations utilisées au centre américain de prévision m eteorologique (NCEP)) ? Pour une définition plus précise de ces vecteurs, se reporter au chapitre 4. Les arguments qui suivent ne sont pas forcément rigoureux, ils permettent simplement de situer notre approche par rapport à la littérature. Dans le cas simple du mécanisme d'Orr, il n'existe pas de mode normal car on ne considère pas de conditions limites, notre méthode met par contre en évidence un type d'interaction non modale avec une phase

de croissance transitoire. Cependant, il ne faut pas en conclure que dans le cas d'écoulements stationnaires plus complexes spatialement, les structures mises en évidence par notre méthode sont distinctes des structures des modes normaux. En effet, les structures perturbatives mises en évidence par notre méthode appartiennent à la catégorie des perturbations qui ont évolué jusqu'à un temps fini. Or si l'écoulement est stationnaire mais spatialement complexe, les perturbations vont tendre vers la structure du mode normal le plus instable. On en déduit donc que les structures les plus probables mises en évidence par notre approche sont celles des modes normaux instables dans le cas des écoulements stationnaires. Où se trouve l'apparente contradiction avec le cas simple d'Orr ? En fait cela vient du caractère local ou non local de l'écoulement. Si l'écoulement de base est non local (type Orr), les conditions limites jouent un rôle prépondérant sur la structure des perturbations dans tout le domaine et la structure des modes normaux dépend fortement des conditions limites partout dans le domaine. Par contre *si l'écoulement a un caractère localisé à l'intérieur du domaine, la perturbation est elle aussi locale et est peu influencée par les conditions limites ; la perturbation croît en raison de la structure spatialement inhomogène de l'écoulement de base par les mécanismes décrits dans notre approche*. Notre approche est ainsi valide et la structure des modes normaux instables a de forte chance d'avoir en chaque point suffisamment loin des bords du domaine la structure mise en évidence par notre méthode.

Dans le présent paragraphe, une discussion sur l'intercomparaison entre notre approche et les méthodes classiques des vecteurs singuliers et des "bred modes" est amorcée et sera poursuivie de manière plus approfondie au chapitre 4. Si l'écoulement est à la fois spatialement complexe et dépendant du temps (ce qui est le cas de notre modèle), les structures perturbatives lorsqu'elles évoluent jusqu'à un temps fini ont de fortes chances d'avoir les mêmes structures que les bred modes. Cette similitude est approximative puisque les structures des "bred modes" sont liées au cycle d'analyse des observations qui n'intervient pas ici. Cependant, elle permet de distinguer d'un côté les "bred modes" et les structures les plus probables définies par ζ_{\pm}^r et $\zeta_{\pm}^{r_{ow}}$ et de l'autre côté les vecteurs singuliers. En effet, la structure des vecteurs singuliers est une structure qui va permettre à la perturbation de croître de façon optimale dans le futur. Elle est donc complètement distincte de la structure des "bred modes" qui eux ont crû dans le passé (voir l'article de Legras et Vautard (1995) pour la distinction entre "bred modes" et vecteurs singuliers). Les vecteurs singuliers n'ont donc pas de raison d'avoir la structure associée aux angles ζ_{\pm}^r ou $\zeta_{\pm}^{r_{ow}}$. De la même façon, dans le cadre de la dynamique des gradients de traceur, Lapeyre (2002) montre qu'on peut distinguer la structure des gradients qui ont crû dans le passé de ceux qui vont croître dans le futur en termes d'angles déterminés analytiquement à partir de

la structure des tenseurs de gradient de vitesse et d'accélération. Pour conclure sur ce paragraphe, loin des bords, les structures des perturbations mises en évidence dans ce chapitre devraient être plus proches des modes normaux (écoulements stationnaires) et "bred modes" (écoulements temporellement complexes) que des vecteurs singuliers.

Chapitre 3

Croissance locale des perturbations dans les écoulements quasigéostrophiques quelconques

3.1 Introduction

L'étude énergétique locale développée par Mak et Cai (1989) dans le cadre des écoulements barotropes se généralise pour le cas des écoulements quasigéostrophiques quelconques où à la fois les interactions barotrope et barocline interviennent ; ainsi, les mêmes auteurs ont effectué une étude locale des énergies, cinétique, potentielle et totale pour les écoulements quasigéostrophiques quelconques (Cai et Mak, 1990). On montre dans le présent chapitre que notre approche peut aussi se généraliser dans les écoulements quasigéostrophiques quelconques. La question posée est de savoir s'il existe aussi une structure locale tridimensionnelle privilégiée qui implique une croissance de la perturbation par instabilité barotrope et/ou barocline. L'analogie entre l'équation d'évolution des gradients de traceur horizontaux et celle de la vitesse perturbée (ou du gradient de la fonction de courant perturbée) a permis d'obtenir les résultats du chapitre précédent. On est donc tenté de faire une comparaison entre l'évolution des gradients tridimensionnels des traceurs avec l'évolution des gradients tridimensionnels de la fonction de courant perturbée. Les articles de Haynes et Anglade (1997) et Hua et al. (1998) montrent que la structure verticale du gradient de traceur dépend de sa structure horizontale et de l'interaction entre la déformation horizontale et le cisaillement vertical. Donc une des questions posées est : *comment la structure verticale de la fonction de courant perturbée dépend-elle de sa structure horizontale, de la déformation horizontale et du cisaillement vertical de l'écou-*

lement de base ? Connaître la structure tridimensionnelle de la perturbation est cruciale pour déterminer les termes d'extraction barotrope et barocline d'énergie totale et donc pour définir des indices de croissance des perturbations. On suit donc la même démarche que dans le chapitre précédent mais dans le cas général où les deux types d'interaction sont présentes. La question posée précédemment est reliée à une question encore ouverte à l'heure actuelle à propos du rôle du champ de déformation horizontal sur le phénomène de cyclogénèse (Joly et al. 1999) dont les principales études théoriques sur ce sujet sont celles de Bishop (1993a), Bishop (1993b), Bishop et Thorpe (1994a) et Bishop et Thorpe (1994b). Bishop et Thorpe (1994a,b) montrent que le champ de déformation est un frein à la cyclogénèse mais certaines études sur les cas de la campagne de Fastex (Baehr et al. 1999) montrent que ce n'est pas forcément vrai. Dans le présent chapitre, on ne répond pas à ces questions directement, on aboutit cependant pour les écoulements quasigéostrophiques à des diagnostics de croissance des perturbations lorsque le champ de déformation horizontal et le cisaillement vertical interviennent tous les deux et leur interaction s'exprime à partir de formules analytiques validées ensuite numériquement.

En plus de cette approche sur les termes d'extraction barotrope et barocline, un autre volet à la fin du chapitre est ouvert sur la prévisibilité et notamment sur la localisation spatiale des champs d'erreurs qui sera le thème principal du dernier chapitre mais dont certaines caractéristiques peuvent d'ores et déjà être évaluées analytiquement.

3.2 Equations d'évolution des perturbations

3.2.1 Evolution tridimensionnelle de la fonction de courant perturbée

L'idée de cette section est de développer les équations linéarisées dans le cas des écoulements quasigéostrophiques quelconques sans les termes de friction et de forçage afin d'écrire l'évolution tridimensionnelle de la fonction de courant géostrophique perturbée en fonction des termes agéostrophiques perturbés et des termes de l'écoulement de base. A la fin de la section, on rassemble les équations obtenues en une seule équation vectorielle afin de faire apparaître l'évolution d'un vecteur tridimensionnel dont la norme est l'énergie totale de la perturbation en chaque point de l'espace.

Dans le cadre général des écoulements quasigéostrophiques, l'équation du mouvement est donnée par l'équation (2.1). Dans le chapitre 2 consacré au cas barotrope, comme la divergence de la vitesse agéostrophique est nulle, le vecteur dans le membre de droite de l'équation (2.1), $-f_0 \vec{k} \wedge \vec{u}_a - \vec{\nabla} \bar{p}_a$ est un gradient ce qui n'est pas le cas ici. Sans faire

cette hypothèse, ce vecteur prend la forme suivante $-f_0\vec{k} \wedge \vec{u}_a - \vec{\nabla}\bar{p}_a \equiv -\vec{\nabla}\bar{p} - f_0\vec{k} \wedge \vec{\nabla}\bar{\chi}$, où $\vec{\nabla}\bar{\chi}$ est la partie gradient de la vitesse agéostrophique qui n'est pas nulle dans le cadre général. L'équation du mouvement dans les écoulements quasigéostrophiques s'écrit de manière générale, sans β et sans effet de friction,

$$\frac{\bar{D}\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}\bar{p} - f_0\vec{k} \wedge \vec{\nabla}\bar{\chi}, \quad (3.1)$$

où \vec{u} est le champ de vitesse géostrophique, $\bar{D}/Dt = \partial/\partial t + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})$ est la dérivée lagrangienne des termes géostrophiques. La vitesse verticale agéostrophique \bar{w} est reliée au terme $\bar{\chi}$ par l'équation de divergence

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial z} = -\Delta\bar{\chi}, \quad (3.2)$$

et la fonction de courant géostrophique $\bar{\psi}$ est reliée à la vitesse agéostrophique verticale par l'équation pronostique suivante

$$f_0S\bar{w} = -\frac{\bar{D}}{Dt}(\partial_z\bar{\psi}), \quad (3.3)$$

où S est le paramètre de stratification. La linéarisation des équations (3.1), (3.2) et (3.3) amène aux équations suivantes

$$\frac{\bar{D}\vec{u}'}{Dt} = -\nabla\vec{u} \cdot \vec{u}' - \vec{\nabla}p' - f_0\vec{k} \wedge \vec{\nabla}\chi', \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial z} = -\Delta\chi', \quad (3.5)$$

$$\frac{\bar{D}}{Dt}(\partial_z\psi') = -(\vec{u}' \cdot \vec{\nabla})\partial_z\bar{\psi} - f_0Sw', \quad (3.6)$$

où $\nabla\vec{u}$ est le tenseur du gradient de vitesse de l'écoulement de base. Comme dans le chapitre 2, les quantités en barres dans (3.4), (3.5), (3.6) désignent celles associées à l'écoulement de base tandis que celles en primes correspondent aux perturbations. On définit le vecteur \vec{u}'_3 comme le vecteur tridimensionnel dont les trois composantes sont u' , v' (composantes reliées à l'énergie cinétique) et $\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\psi'$ (reliée à l'énergie potentielle). La somme des carrés des trois composantes de \vec{u}'_3 correspond donc à l'énergie totale de la perturbation en chaque point de l'espace. A partir de cette définition, les équations (3.4) et (3.6) peuvent être réécrites ensemble pour former une équation vectorielle à trois dimensions

$$\frac{\bar{D}\vec{u}'_3}{Dt} = -\bar{\mathbf{A}} \cdot \vec{u}'_3 - \vec{\nabla}p' - f_0\vec{k} \wedge \vec{\nabla}\chi' - f_0\sqrt{S}w'\vec{k}, \quad (3.7)$$

où

$$\bar{\mathbf{A}} \equiv \begin{pmatrix} \partial_x\bar{u} & \partial_y\bar{u} & 0 \\ \partial_x\bar{v} & \partial_y\bar{v} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\bar{v} & -\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\bar{u} & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}'_3 \equiv \begin{pmatrix} -\partial_y\psi' \\ \partial_x\psi' \\ \frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\psi' \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

et (u, v) est le vecteur vitesse écrit dans les coordonnées Cartésiennes (Ox, Oy) . Par la suite, le gradient $-\vec{\nabla}p'$ est appelé le vecteur barotrope agéostrophique et est noté \vec{v}_p . Le vecteur $-f_0\vec{k} \wedge \vec{\nabla}\chi' - f_0\sqrt{S}w'\vec{k}$ est appelé le vecteur barocline agéostrophique et est noté $\vec{v}_{\chi,w}$. L'avantage de la formulation (3.7) est que les propriétés tridimensionnelles de la perturbation peuvent être étudiées en analysant la dynamique d'alignement du vecteur \vec{u}'_3 comme cela a été fait dans le chapitre précédent pour \vec{u}' . On a normalisé la coordonnée verticale z par \sqrt{S} pour relier la norme du vecteur \vec{u}'_3 à l'énergie totale de la perturbation $|\vec{u}'_3|^2/2$ de la même manière que la norme de \vec{u}' est reliée à l'énergie cinétique (cf chapitre précédent)

$$|\vec{u}'_3|^2/2 \equiv \frac{1}{2}((\partial_x\psi')^2 + (\partial_y\psi')^2 + (\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\psi')^2). \quad (3.9)$$

En appliquant l'opérateur $(-\partial_y, \partial_x, \partial_z\frac{1}{\sqrt{S}})$ à l'équation (3.7), nous obtenons l'équation de la vorticité potentielle perturbée sans β

$$\frac{\bar{D}q'}{Dt} = -\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}\bar{q}, \quad (3.10)$$

où

$$q = \nabla^2\psi + \partial_z\frac{1}{S}\partial_z\psi. \quad (3.11)$$

3.2.2 Equation locale de l'énergie totale de la perturbation

Dans cette section, on écrit les équations locales de l'énergie cinétique (notée $K' \equiv \frac{1}{2}|\vec{u}'|^2$), potentielle (notée $P' \equiv \frac{1}{2S}(\partial_z\psi')^2$) et totale ($|\vec{u}'_3|^2/2$) tel qu'il est présenté dans l'article de Cai et Mak (1990). L'équation pour l'énergie cinétique peut-être obtenue à partir de l'équation (3.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial K'}{\partial t} &= -\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}(K') + \vec{E} \cdot \vec{D} - \vec{u}' \cdot \vec{\nabla}p' - \vec{u}' \cdot (f_0\vec{k} \wedge \vec{\nabla}\chi') \\ &= -\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}(K') - \vec{\nabla} \cdot (p'\vec{u}') - \vec{\nabla} \cdot (\psi'f_0\vec{\nabla}\chi') - \frac{\partial}{\partial z}(f_0\psi'w') + \vec{E} \cdot \vec{D} - \vec{F}_3 \cdot \vec{T}_3, \end{aligned} \quad (3.12)$$

et l'équation pour l'énergie potentielle à partir de (3.6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial P'}{\partial t} &= -\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}(P') + \vec{F} \cdot \vec{T} \\ &= -\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}(P') + \vec{F}_h \cdot \vec{T}_h + \vec{F}_3 \cdot \vec{T}_3, \end{aligned} \quad (3.13)$$

où

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \left(\frac{1}{2}(v'^2 - u'^2), -u'v'\right), \\ \vec{D} &= (\bar{\sigma}_n, \bar{\sigma}_s), \end{aligned} \quad (3.14)$$

et

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (u', v', f_0 \sqrt{S} w') \frac{1}{\sqrt{S}} \partial_z \psi', \\ \vec{T} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{S}} \partial_z \bar{v}, \frac{1}{\sqrt{S}} \partial_z \bar{u}, -1 \right).\end{aligned}\quad (3.15)$$

L'équation pour l'énergie totale est obtenue en sommant (3.12) et (3.13)

$$\frac{1}{2} \frac{\partial |\vec{u}'_3|^2}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{|\vec{u}'_3|^2}{2} \right) - \vec{\nabla} \cdot (p' \vec{u}') - \vec{\nabla} \cdot (\psi' f_0 \vec{\nabla} \chi') - \frac{\partial}{\partial z} (f_0 \psi' w') + \vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{F}_h \cdot \vec{T}_h. \quad (3.16)$$

Analysons le sens physique de chaque terme intervenant dans les équations (3.12), (3.13) et (3.16). Le terme $\vec{E} \cdot \vec{D}$ est le taux d'extraction barotrope tandis que le terme $\vec{F}_h \cdot \vec{T}_h$ est le taux d'extraction barocline puisqu'il permet à la perturbation d'extraire de l'énergie à l'écoulement de base de façon barocline. Le terme $-\vec{F}_3 \cdot \vec{T}_3$ représente le taux de conversion d'énergie potentielle en énergie cinétique et n'intervient donc pas dans l'équation pour l'énergie totale (3.16). Les autres termes sont des termes de redistribution d'énergie. D'abord les termes d'advection $-\vec{u} \cdot \vec{\nabla} (K')$, $-\vec{u} \cdot \vec{\nabla} (P')$ et $-\vec{u} \cdot \vec{\nabla} (|\vec{u}'_3|^2/2)$ représentent respectivement les termes de redistribution horizontale des énergies cinétique, potentielle et totale par l'advection de l'écoulement de référence. Le terme $-\vec{\nabla} \cdot (p' \vec{u}')$ redistribue l'énergie horizontalement et est appelé la composante barotrope agéostrophique, $-\vec{\nabla} \cdot (\psi' f_0 \vec{\nabla} \chi')$ représente la convergence horizontale du flux d'énergie par le vent agéostrophique irrotationnel et $-\frac{\partial}{\partial z} (f_0 \psi' w')$ est le flux vertical d'énergie. Les deux derniers termes forment la composante barocline agéostrophique. Le terme d'extraction total $\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{F}_h \cdot \vec{T}_h$ de l'équation (3.16) et le terme $-\vec{u}' \cdot \vec{\nabla} \bar{q}$ de l'équation de vorticité (3.10) proviennent du même terme $-\vec{A} \cdot \vec{u}'_3$ de l'équation (3.7). Il est logique qu'il y ait une correspondance entre les deux termes $\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{F}_h \cdot \vec{T}_h$ et $-\vec{u}' \cdot \vec{\nabla} \bar{q}$ puisqu'il est bien connu que le terme source des instabilités barotrope et barocline, lorsqu'on argumente avec la vorticité est le terme d'advection par la perturbation de la vorticité de l'écoulement de base $-\vec{u}' \cdot \vec{\nabla} \bar{q}$ et lorsqu'on argumente avec l'énergie, le terme source des instabilités est le terme d'extraction total $\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{F}_h \cdot \vec{T}_h$.

3.2.3 Définition des taux d'extraction exponentiels barotrope et barocline d'énergie totale

Dans cette section, on définit un certain nombre d'angles dont les caractéristiques sont résumées sur la figure 3.1, qui seront utiles quand on étudiera les orientations privilégiées du vecteur \vec{u}'_3 . On termine en définissant les taux d'extraction exponentiels barotrope et barocline d'énergie totale.

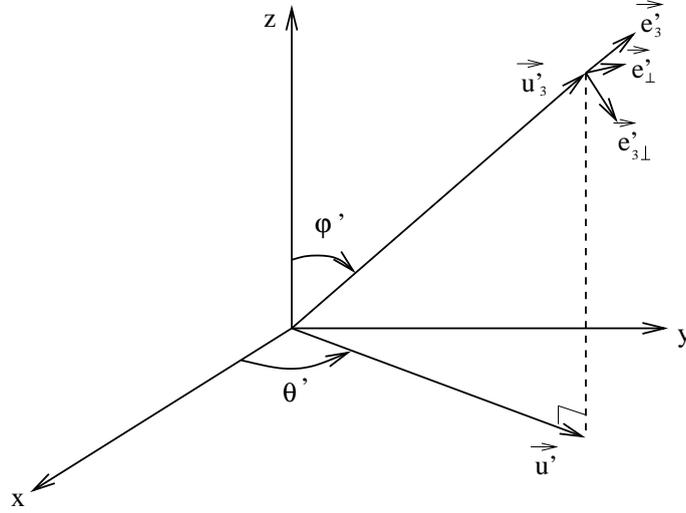


FIG. 3.1 – Angles définissant les orientations du vecteur \vec{u}'_3 .

Comme on s'intéresse par la suite aux structures spatiales des perturbations et à leurs orientations, on décompose le vecteur tridimensionnel \vec{u}'_3 dans les coordonnées sphériques. Les axes des coordonnées sphériques sont donnés par (θ', φ') , où $\theta' \in [-\pi, \pi]$ et $\varphi' \in [0, \pi]$ (cf figure 3.1) ; dans ces coordonnées, le vecteur \vec{u}'_3 peut s'écrire ainsi

$$\vec{u}'_3 = |\vec{u}'_3|(\cos \theta' \sin \varphi', \sin \theta' \sin \varphi', \cos \varphi') = |\vec{u}'_3|(\sin \varphi' \vec{e}' + \cos \varphi' \vec{k}) = |\vec{u}'_3| \vec{e}'_3, \quad (3.17)$$

où \vec{e}'_3 (resp. \vec{e}') est le vecteur unitaire qui a le même sens que \vec{u}'_3 (resp. \vec{u}').

La figure 3.1 résume les différentes définitions. L'angle φ' est relié à la fraction entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la perturbation

$$|\tan \varphi'| = \frac{|\vec{u}'|}{|\frac{1}{\sqrt{S}} \partial_z \psi'|} = \sqrt{\frac{K'}{P'}}. \quad (3.18)$$

Les paramètres tels que la vorticité $\bar{\omega}$, l'étirement et le cisaillement, $\bar{\sigma}_n$, $\bar{\sigma}_s$ et l'angle $\bar{\phi}$ des axes principaux du tenseur de déformation tels qu'ils sont définis au chapitre précédent sont réutilisés ainsi que l'angle ζ' . En plus des définitions du chapitre précédent, on définit aussi le cisaillement vertical $\bar{\sigma}_z$ et l'angle $\bar{\alpha}_z$ tel que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{S}} \partial_z \bar{u}, \frac{1}{\sqrt{S}} \partial_z \bar{v}\right) = \bar{\sigma}_z (\cos \bar{\alpha}_z, \sin \bar{\alpha}_z), \quad (3.19)$$

avec $\bar{\sigma}_z \geq 0$. Les termes d'extraction $\vec{E} \cdot \vec{D}$ et $\vec{F}_h \cdot \vec{T}_h$ peuvent s'écrire sous la forme suivante avec les notations précédentes

$$\vec{E} \cdot \vec{D} = -\frac{|\vec{u}'_3|^2}{2} \bar{\sigma} \sin^2 \varphi' \sin \zeta', \quad (3.20)$$

$$\vec{F}_h \cdot \vec{T}_h = \frac{|\vec{u}'_3|^2}{2} \bar{\sigma}_z \sin 2\varphi' \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z). \quad (3.21)$$

Par analogie avec le cas barotrope, on définit aussi les taux d'extraction exponentiels pour l'énergie totale des perturbations

$$\delta^b \equiv \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{|\vec{u}'_3|^2/2} = -\bar{\sigma} \sin^2 \varphi' \sin \zeta', \quad (3.22)$$

$$\delta^c \equiv \frac{\vec{F}_h \cdot \vec{T}_h}{|\vec{u}'_3|^2/2} = \bar{\sigma}_z \sin 2\varphi' \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z), \quad (3.23)$$

$$\delta^t \equiv \delta^b + \delta^c. \quad (3.24)$$

δ^b est appelé le taux d'extraction exponentiel barotrope d'énergie, δ^c le taux d'extraction exponentiel barocline d'énergie et δ^t le taux d'extraction exponentiel total d'énergie. L'interprétation du taux barotrope δ^b a déjà été donnée dans le chapitre précédent puisque δ^b est directement relié au taux d'extraction exponentiel d'énergie cinétique $\delta \equiv -\bar{\sigma} \sin \zeta'$ par la relation $\delta^b = \delta \sin^2 \varphi'$. Analysons maintenant le terme barocline : dans la situation barocline usuelle d'un jet zonal avec un cisaillement vertical positif, on a $\frac{1}{\sqrt{S}} \partial_z \bar{v} = 0$ et $\frac{1}{\sqrt{S}} \partial_z \bar{u} > 0$ et donc $\bar{\alpha}_z = 0$. Pour qu'il y ait croissance de la perturbation $\delta^c > 0$, la perturbation doit vérifier la condition suivante $\sin \theta' \sin 2\varphi' > 0$ d'après la définition de δ^c , ce qui amène à $\partial_x \psi' \partial_z \psi' > 0$. On retrouve ainsi la condition classique pour la croissance des perturbations : l'inclinaison des isolignes de la perturbation doit être opposée à celle du cisaillement. Pour comparer l'importance relative entre les processus baroclines et les processus barotropes, on définit aussi le rapport du taux d'extraction barotrope sur le taux d'extraction barocline

$$R^{bc} \equiv \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{\vec{F}_h \cdot \vec{T}_h} = \frac{\delta^b}{\delta^c}. \quad (3.25)$$

Le calcul des taux de conversion barotrope et barocline de l'énergie de l'écoulement de base en énergie de la perturbation ((3.22) et (3.23)) nécessite d'explicitier l'orientation de \vec{u}'_3 , c'est à dire les angles θ' et φ' de la perturbation à partir des propriétés de l'écoulement de base. C'est l'objet des deux sections suivantes.

3.3 Dynamique d'alignement du gradient 3D de la fonction de courant perturbée

3.3.1 Influence de la déformation horizontale et du cisaillement vertical

Comme on l'a fait dans le cas barotrope, on considère d'abord l'influence de $\bar{\mathbf{A}}$ sur les équations d'orientation du vecteur \vec{u}'_3 , et l'influence des termes agéostrophiques est

considérée dans la section suivante. On remarque que si on ne considère pas les termes agéostrophiques, un système fermé est obtenu pour \vec{u}'_3

$$\frac{\bar{D}\vec{u}'_3}{Dt} = -\bar{\mathbf{A}} \cdot \vec{u}'_3, \quad (3.26)$$

c'est à dire l'évolution du champ de vecteur \vec{u}'_3 est simplement déterminée par son étirement par le tenseur de déformation $\bar{\mathbf{A}}$ qui dépend de la déformation horizontale et du cisaillement vertical de l'écoulement de base. Avec ce système simplifié, on peut retrouver l'équation exacte de la vorticité potentielle perturbée (3.10) en appliquant l'opérateur $(-\partial_y, \partial_x, \partial_z \frac{1}{\sqrt{S}})$ à l'équation (3.26). Ecrivons maintenant les équations pour la norme $|\vec{u}'_3|$ à partir de (3.26) et les équations d'orientation de θ' et φ' ; elles sont respectivement obtenues par projection de l'équation (3.26) sur les trois vecteurs perpendiculaires \vec{e}'_3 , $\vec{e}'_{3\perp} \equiv \cos \varphi' \vec{e}' - \sin \varphi' \vec{k}$ et $\vec{e}'_{\perp} \equiv (-\sin \theta', \cos \theta')$

$$\frac{1}{|\vec{u}'_3|^2} \frac{\bar{D}|\vec{u}'_3|^2}{Dt} = -\bar{\sigma} \sin \zeta' \sin^2 \varphi' + \bar{\sigma}_z \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z) \sin 2\varphi', \quad (3.27a)$$

$$\frac{\bar{D}\theta'}{Dt} = \frac{1}{2}(-\bar{\omega} - \bar{\sigma} \cos \zeta') = -\frac{\bar{\sigma}}{2}(r_{ow} + \cos \zeta'), \quad (3.27b)$$

$$\frac{\bar{D}\varphi'}{Dt} = -\sin \varphi' \left(\frac{\bar{\sigma}}{2} \sin \zeta' \cos \varphi' + \bar{\sigma}_z \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z) \sin \varphi' \right), \quad (3.27c)$$

où

$$r_{ow} \equiv \frac{\bar{\omega}}{\bar{\sigma}}. \quad (3.28)$$

L'évolution de θ' dépend de θ' lui-même et des composantes de l'écoulement de base et est déterminée par la même équation que dans le cas barotrope sans la pression agéostrophique. L'évolution de φ' dépend des deux angles θ' , φ' et des termes de l'écoulement de base. L'évolution de la norme (3.27a) dépend des deux angles θ' , φ' et des composantes de l'écoulement de base. On remarque ainsi une propriété qui vient de la forme dégénérée de la matrice $\bar{\mathbf{A}}$: l'évolution de la structure horizontale définie par l'angle θ' ne dépend que d'elle-même alors que l'évolution de la structure verticale définie par l'angle φ' est dépendante à la fois de la structure horizontale θ' et à la fois de la structure verticale φ' . Ces propriétés sont similaires à celles caractérisant l'évolution du gradient de traceur 3D (cf Hua et al. 1998) qui dépend lui aussi d'une matrice dégénérée similaire à $\bar{\mathbf{A}}$.

L'évolution de la structure perturbée est donc fortement dépendante du tenseur $\bar{\mathbf{A}}$. Par analogie avec le cas barotrope étudié précédemment, les vecteurs propres de $\bar{\mathbf{A}}$ sont donc des directions privilégiées pour \vec{u}'_3 . Les valeurs propres non triviales sont réelles si $|r_{ow}| < 1$; les deux directions des vecteurs propres associées vérifient $\frac{\bar{D}\theta'}{Dt} = 0$ et $\frac{\bar{D}\varphi'}{Dt} = 0$

et sont données par les formules suivantes

$$\theta_{\pm}^{r_{ow}} = \frac{1}{2}(\zeta_{\pm}^{r_{ow}} - 2\bar{\phi}) = \frac{1}{2}(\pm \arccos(-r_{ow}) - 2\bar{\phi}), \quad (3.29a)$$

$$\varphi_{\pm}^{r_{ow}} = \arctan\left(\frac{-\frac{\bar{\sigma}}{2} \sin \zeta_{\pm}^{r_{ow}}}{\bar{\sigma}_z \sin(\theta_{\pm}^{r_{ow}} - \bar{\alpha}_z)}\right). \quad (3.29b)$$

Les structures horizontales des vecteurs propres de $\bar{\mathbf{A}}$ déterminées par $\zeta_{\pm}^{r_{ow}} = \pm \arccos(-r_{ow})$ ($\zeta_{-}^{r_{ow}}$ implique une croissance barotrope et $\zeta_{+}^{r_{ow}}$ une décroissance) sont exactement les mêmes que celles des vecteurs propres de $\nabla \bar{\mathbf{u}}$: si \vec{u}'_3 est vecteur propre de $\bar{\mathbf{A}}$ alors \vec{u}' est vecteur propre de $\nabla \bar{\mathbf{u}}$. L'information supplémentaire donnée par les vecteurs propres de $\bar{\mathbf{A}}$ concerne la structure verticale et les processus baroclines associés. Pour $|r_{ow}| < 1$, il existe deux directions verticales privilégiées, $\varphi' = \varphi_{\pm}^{r_{ow}}$, correspondant aux deux vecteurs propres ayant des valeurs propres non nulles ; $\varphi_{-}^{r_{ow}}$ implique une croissance barocline et $\varphi_{+}^{r_{ow}}$ une décroissance. Les formules (3.29a) et (3.29b) peuvent s'exprimer à partir des termes de l'écoulement de base de la façon suivante

$$\theta_{\pm}^{r_{ow}} = \frac{1}{2}(\pm \arccos(-\frac{\bar{\omega}}{\bar{\sigma}}) - 2\bar{\phi}), \quad (3.30a)$$

$$\varphi_{\pm}^{r_{ow}} = \arctan\left(\mp \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\bar{\sigma}^2 - \bar{\omega}^2}}{\bar{\sigma}_z \sin(\pm \frac{1}{2} \arccos(-\frac{\bar{\omega}}{\bar{\sigma}}) - \bar{\phi} - \bar{\alpha}_z)}\right). \quad (3.30b)$$

La direction du vecteur propre déterminée par le couple $(\theta_{-}^{r_{ow}}, \varphi_{-}^{r_{ow}})$ implique une croissance de l'énergie de la perturbation par extraction à la fois barotrope et barocline et les taux d'extraction exponentiels associés valent

$$\delta_{ow}^b \equiv -\bar{\sigma} \sin \zeta_{-}^{r_{ow}} \sin^2 \varphi_{-}^{r_{ow}} > 0, \quad (3.31a)$$

$$\delta_{ow}^c \equiv \bar{\sigma}_z \sin 2\varphi_{-}^{r_{ow}} \sin(\theta_{-}^{r_{ow}} - \bar{\alpha}_z) = -\bar{\sigma} \sin \zeta_{-}^{r_{ow}} \cos^2 \varphi_{-}^{r_{ow}} > 0, \quad (3.31b)$$

$$\delta_{ow}^t \equiv -\bar{\sigma} \sin \zeta_{-}^{r_{ow}} = \sqrt{\bar{\sigma}^2 - \bar{\omega}^2} > 0, \quad (3.31c)$$

tandis que le vecteur propre défini par le couple $(\theta_{+}^{r_{ow}}, \varphi_{+}^{r_{ow}})$ implique une décroissance de la perturbation. On remarque que le taux d'extraction exponentiel δ_{ow}^t dépend uniquement de la déformation horizontale de l'écoulement de base et pas du cisaillement vertical à cause encore de la forme dégénérée du tenseur $\bar{\mathbf{A}}$. Cela ne veut pas dire que les processus baroclines sont moins efficaces que les processus barotropes pour les vecteurs propres de $\bar{\mathbf{A}}$ car par exemple, si on a $0 < \varphi_{-}^{r_{ow}} < \frac{\pi}{4}$, cela implique $\delta_{ow}^c > \delta_{ow}^b$ et le taux de conversion barocline est supérieur au taux de conversion barotrope. Une estimation analytique du rapport du taux d'extraction barotrope sur le taux d'extraction barocline, R^{bc} , peut être donnée à partir de la structure du vecteur propre productif de $\bar{\mathbf{A}}$

$$R_{ow}^{bc} \equiv \frac{\delta_{ow}^b}{\delta_{ow}^c} = \tan^2 \varphi_{-}^{r_{ow}}. \quad (3.32)$$

On remarque que si la structure de la perturbation est proche du vecteur propre productif $\varphi' \simeq \varphi_{-}^{r_{ow}}$, on a à la fois $\frac{K'}{P'} = \tan^2 \varphi' \simeq \tan^2 \varphi_{-}^{r_{ow}}$ et à la fois $R^{bc} \simeq R_{ow}^{bc} = \tan^2 \varphi_{-}^{r_{ow}}$, c'est à dire pour la structure du vecteur propre productif, le rapport de l'énergie cinétique sur l'énergie potentielle est égal au rapport du taux d'extraction barotrope sur le taux d'extraction barocline. L'estimation analytique des deux rapports $\frac{K'}{P'}$ et $R^{bc} = \frac{\bar{E} \cdot \bar{D}}{\bar{F}_h \cdot \bar{T}_h}$ peut s'écrire ainsi à l'aide des termes de l'écoulement de base en utilisant (3.30b)

$$R_{ow}^{bc} = \tan^2 \varphi_{-}^{r_{ow}} = \frac{\frac{1}{4}(\bar{\sigma}^2 - \bar{\omega}^2)((\bar{\sigma}_s - \bar{\omega})^2 + (\bar{\sigma}_n + \sqrt{\bar{\sigma}^2 - \bar{\omega}^2})^2)}{(\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z \bar{u}(\bar{\sigma}_n + \sqrt{\bar{\sigma}^2 - \bar{\omega}^2}) + \frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z \bar{v}(\bar{\sigma}_s - \bar{\omega}))^2}. \quad (3.33)$$

Les définitions de δ_{ow}^b , δ_{ow}^c , δ_{ow}^t et R_{ow}^{bc} seront testés par la suite pour savoir si ce sont de bonnes approximations analytiques des quantités δ^b , δ^c , δ^t et R^{bc} .

3.3.2 Diagnostic analytique des termes agéostrophiques

Le but de cette section est de *paramétriser l'influence des termes agéostrophiques perturbés* sur les deux équations d'orientation pour θ' et φ' . On montre que les termes agéostrophiques perturbés modifient la stabilité des vecteurs propres de \bar{A} .

Equations non locales des termes agéostrophiques

Les termes agéostrophiques peuvent être obtenus à partir d'équations diagnostiques non locales. La forme suivante de l'équation (3.7) est utile pour diagnostiquer les termes agéostrophiques perturbés

$$\frac{\bar{D}}{Dt} \vec{\nabla}_3 \psi' = \begin{pmatrix} \partial_x \bar{u} & \partial_x \bar{v} & 0 \\ \partial_y \bar{u} & \partial_y \bar{v} & 0 \\ \partial_z \bar{u} & \partial_z \bar{v} & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\nabla}_3 \psi' - \vec{k} \wedge \vec{\nabla} p' - f_0 \vec{\nabla} \chi' - f_0 S w' \vec{k}, \quad (3.34)$$

où

$$\vec{\nabla}_3 \psi' = \begin{pmatrix} \partial_x \psi' \\ \partial_y \psi' \\ \partial_z \psi' \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

En appliquant le rotationnel tridimensionnel à l'équation (3.34) (qu'on note $\vec{\nabla}_3 \wedge .$), nous obtenons

$$\vec{C}' = -\vec{\nabla}_3 \wedge \frac{\bar{D}}{Dt} \vec{\nabla}_3 \psi' = - \begin{pmatrix} J_{yz}(\bar{u}, v') + J_{yz}(u', \bar{v}) \\ J_{zx}(\bar{u}, v') + J_{zx}(u', \bar{v}) \\ J_{xy}(\bar{u}, v') + J_{xy}(u', \bar{v}) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -f_0 \partial_y (S w') + \partial_{yz} (f_0 \chi') \\ f_0 \partial_x (S w') - \partial_{xz} (f_0 \chi') \\ \Delta p' \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

où J désigne l'opérateur Jacobien. Le vecteur \vec{C}' défini au dessus est la partie linéarisé du vecteur \vec{C} introduit par Xu (1992) qui caractérise la circulation agéostrophique secondaire. Comme la composante horizontale du vecteur \vec{C} (noté \vec{C}_H) est relié au vecteur $\vec{Q} \equiv -J_{xy}(\vec{\nabla}\psi, \partial_z\psi)$ introduit par Hoskins et al. (1978) ($\vec{C}_H = \vec{Q} \wedge \vec{k}$), les vecteurs linéarisés vérifient la même relation $\vec{C}'_H = \vec{Q}' \wedge \vec{k}$. En utilisant les équations (3.36) et (3.5), on obtient les équations non locales déterminant les termes agéostrophiques perturbés p' , χ' , w'

$$\Delta p' = 2(J_{xy}(\bar{u}, v') + J_{xy}(u', \bar{v})), \quad (3.37a)$$

$$(\Delta + \partial_z \frac{1}{S} \partial_z) \Delta f_0 \chi' = -2 \partial_z \frac{1}{S} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}', \quad (3.37b)$$

$$(\Delta + \frac{1}{S} \partial_z^2) w' = \frac{2}{f_0 S} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}', \quad (3.37c)$$

où $\vec{Q}' = (J_{zx}, J_{zy})(\bar{u}, v') + (J_{zx}, J_{zy})(u', \bar{v})$.

Approximation des termes agéostrophiques

Le caractère non local des équations (3.37a), (3.37b) et (3.37c) ne permet pas de calcul analytique direct sur les équations d'orientation. Mais on peut analyser l'influence locale des termes agéostrophiques en considérant une perturbation monochromatique comme cela a été fait dans le chapitre précédent

$$\psi'(x, y, z) = Re(U_0 \exp(i(kx + ly + mZ))), \quad (3.38)$$

où la coordonnée Z est reliée à la coordonnée verticale usuelle z par la relation $\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{S}}$. Pour une perturbation monochromatique, si \vec{u}'_3 est vecteur propre de $\bar{\mathbf{A}}$ on peut montrer (cf appendice A de l'article III dans l'annexe B) que le vecteur \vec{C}' est trivial et vaut $\vec{0}$. Ceci est dû aux opérateurs Jacobiens qui apparaissent dans l'équation (3.36). En ajoutant deux autres hypothèses en plus de la monochromaticité, ce calcul peut-être prolongé pour obtenir des diagnostics des vecteurs agéostrophiques intervenant dans l'équation (3.7) : d'abord, on considère les coefficients de la matrice $\bar{\mathbf{A}}$ comme lentement variables dans l'espace par rapport aux variations de la perturbation et on considère aussi que S est une constante. On a obtenu dans le chapitre précédent avec de telles hypothèses l'expression suivante pour le gradient de la pression agéostrophique perturbée qui est encore valide dans le contexte présent

$$\vec{v}_p = -\vec{\nabla} p' = \bar{\sigma}(\cos \zeta' + r_{ow}) |\vec{u}'| \vec{e}'_{\perp}. \quad (3.39)$$

Cela montre que le gradient de pression se projette sur l'équation d'orientation de θ' et sa projection vaut

$$P_{\theta}(p') = \bar{\sigma}(\cos \zeta' + r_{ow}). \quad (3.40)$$

On montre maintenant qu'un calcul similaire peut-être effectué pour obtenir une expression analytique du vecteur agéostrophique barocline $\vec{v}_{\chi,w}$. Ce calcul est effectué dans l'appendice B de l'article III (cf annexe B). Le calcul aboutit au résultat suivant

$$\vec{v}_{\chi,w} = 2 \sin \varphi' \left(\frac{\bar{\sigma}}{2} \sin \zeta' \cos \varphi' + \bar{\sigma}_z \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z) \sin \varphi' \right) \cdot |\vec{u}'_3| e'_{3\perp} \quad (3.41)$$

Le vecteur agéostrophique barocline a la même direction que $e'_{3\perp}$, c'est à dire qu'il ne se projette que sur l'équation pour φ' et pas sur les équations pour θ' et $|\vec{u}'_3|$. La projection de $\vec{v}_{\chi,w}$ sur l'équation pour φ' vaut

$$P_\varphi(\chi', w') \equiv (\vec{v}_{\chi,w}) \cdot e'_{3\perp} / |\vec{u}'_3| = 2 \sin \varphi' \left(\frac{\bar{\sigma}}{2} \sin \zeta' \cos \varphi' + \bar{\sigma}_z \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z) \sin \varphi' \right). \quad (3.42)$$

Le résultat montre que le vecteur agéostrophique barocline agit sur la structure verticale de la perturbation tandis que le vecteur agéostrophique barotrope agit sur la structure horizontale ce qui est logique. D'après notre calcul analytique, les deux vecteurs \vec{v}_p et $\vec{v}_{\chi,w}$ modifient l'orientation du vecteur \vec{u}'_3 mais ne modifient pas l'évolution de sa norme. Même si les formules $P_\theta(p')$ et $P_\varphi(\chi', w')$ se révèlent significatives d'un point de vue numérique, on remarque que notre approche ne permet pas de diagnostiquer les termes de redistribution agéostrophiques d'énergie de l'équation (3.16) dont on sait qu'ils ont un rôle important (cf Cai et Mak 1990).

3.3.3 Approximation des équations d'orientation

Dans un contexte monochromatique, en supposant que les coefficients de la matrice $\bar{\mathbf{A}}$ sont lentement variables par rapport aux variations de la perturbation, le système complet pour l'évolution de la perturbation a donc la forme suivante

$$\frac{1}{|\vec{u}'_3|^2} \frac{\bar{D}|\vec{u}'_3|^2}{Dt} = -\bar{\sigma} \sin \zeta' \sin^2 \varphi' + \bar{\sigma}_z \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z) \sin 2\varphi', \quad (3.43a)$$

$$\frac{\bar{D}\theta'}{Dt} = -\frac{\bar{\sigma}}{2} (r_{ow} + \cos \zeta') + P_\theta(p') = \frac{\bar{\sigma}}{2} (r_{ow} + \cos \zeta'), \quad (3.43b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{D}\varphi'}{Dt} &= -\sin \varphi' \left(\frac{\bar{\sigma}}{2} \sin \zeta' \cos \varphi' + \bar{\sigma}_z \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z) \sin \varphi' \right) + P_\varphi(\chi', w') \\ &= \sin \varphi' \left(\frac{\bar{\sigma}}{2} \sin \zeta' \cos \varphi' + \bar{\sigma}_z \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z) \sin \varphi' \right). \end{aligned} \quad (3.43c)$$

Cette modification due aux termes agéostrophiques ne change cependant pas les directions des orientations privilégiées déterminées par $\frac{\bar{D}\theta'}{Dt} = 0$ et $\frac{\bar{D}\varphi'}{Dt} = 0$ qui sont encore les couples $(\theta_{\pm}^{r_{ow}}, \varphi_{\pm}^{r_{ow}})$. Les formules définissant les taux d'extraction exponentiels privilégiés (3.31) sont donc inchangés. Cependant comme dans le cas barotrope, cela change les propriétés

de stabilité : le couple $(\theta_{-}^{row}, \varphi_{-}^{row})$ (resp. $(\theta_{+}^{row}, \varphi_{+}^{row})$) était stable (resp. instable) sans les termes agéostrophiques et devient instable (resp. stable) en considérant ces termes.

La présence de l'effet de β pour une perturbation monochromatique ne change pas les équations d'orientation de θ' et φ' , seulement l'équation de $|\vec{u}'_3|$ est changée. Ainsi les couples $(\theta_{-}^{row}, \varphi_{-}^{row})$ et $(\theta_{+}^{row}, \varphi_{+}^{row})$ sont encore privilégiés sur le plan β . Cette analyse un peu calculatoire est montrée dans l'appendice C de l'article III (annexe B).

L'équation d'orientation θ' pourrait être écrite dans les coordonnées du champ de déformation horizontale ; on aurait alors comme structure horizontale privilégiée le point fixe noté $\zeta' = \zeta_{-}^r$. Dans ces coordonnées du champ de déformation horizontale, on pourrait obtenir la structure verticale associée. Mais cette structure verticale donne des résultats numériques moins pertinents que les vecteurs propres de $\bar{\mathbf{A}}$ c'est pourquoi cette structure n'est pas décrite ci-après.

3.3.4 Résumé des calculs analytiques

Les calculs pour aboutir aux structures tridimensionnelles les plus probables de la perturbation, dans le cas des écoulements quasigéostrophiques quelconques, sont plus lourds que ceux présentés dans le cas barotrope ; ils sont cependant complètement similaires. A l'aide d'une perturbation monochromatique, on a pu paramétriser l'impact des termes agéostrophiques perturbés sur l'évolution de la direction du gradient 3D de la fonction de courant géostrophique perturbée. Avec cette approximation, on a pu montrer que le vecteur \vec{u}'_3 avait des orientations privilégiées qui sont les vecteurs propres de $\bar{\mathbf{A}}$. Comme dans le cas barotrope, les termes agéostrophiques représentés par les 2 vecteurs \vec{v}_p et $\vec{v}_{\chi,w}$ sont responsables du caractère instable de la direction du vecteur propre productif de $\bar{\mathbf{A}}$. D'autre part, à partir des vecteurs propres de $\bar{\mathbf{A}}$, on a montré qu'on peut diagnostiquer analytiquement les taux exponentiels de conversion barotrope et barocline. Ces diagnostics analytiques sont interprétés dans la section suivante avec un exemple simple et vérifiés numériquement dans la section 3.5.

3.4 Interprétation de nos résultats analytiques dans le cas simple d'un écoulement cisailé linéairement selon la verticale

Plaçons nous dans un domaine infini, dans le cas simple d'un écoulement cisailé linéairement selon la verticale ($\vec{u} = \Lambda z \vec{e}_x$, avec $\Lambda = cte$) et considérons que le paramètre de

stabilité S est une constante. En fait on se place dans le cadre de l'écoulement d'Eady sans considérer les conditions limites qui sont cruciales pour obtenir le mode normal du modèle d'Eady. Nous développons d'abord nos calculs puis nous discutons la différence entre notre approche et celle d'Eady à la fin de cette section. Les calculs sont très similaires aux calculs faits dans le cadre du mécanisme d'Orr car on s'est finalement ramené au même problème qu'Orr sauf qu'on se place sur le plan vertical. L'évolution des perturbations monochromatiques dans un tel écoulement a d'abord été étudiée par Farrell (1982) puis récemment a été de nouveau utilisée par Badger et Hoskins (2001) pour expliquer les mécanismes de croissance barocline.

Dans le cadre simple dans lequel nous nous sommes placés, $\bar{\sigma}_z$ est une constante et les calculs qui sont développés ci-dessous sont très similaires à ceux du mécanisme d'Orr à la différence que dans le cas présent l'énergie disponible dans l'écoulement de base pour faire croître les perturbations est de l'énergie potentielle et le mécanisme mis en jeu est celui de l'instabilité barocline. A partir de nos hypothèses, l'équation pour θ' (3.43b) est triviale car $\bar{\sigma} = 0$ et donc θ' est une constante déterminée à l'instant initial. Les équations (3.43a) et (3.43b) se simplifient en ($\bar{\alpha}_z = 0$ dans notre cas particulier)

$$\frac{1}{|\vec{u}'_3|^2} \frac{\bar{D}|\vec{u}'_3|^2}{Dt} = \bar{\sigma}_z \sin \theta' \sin 2\varphi', \quad (3.44a)$$

$$\frac{\bar{D}\varphi'}{Dt} = \bar{\sigma}_z \sin \theta' \sin^2 \varphi'. \quad (3.44b)$$

L'équation (3.44b) s'intègre de la façon suivante

$$\frac{\bar{D}\varphi'}{\sin^2 \varphi'} = \bar{\sigma}_z \sin \theta' Dt,$$

ce qui aboutit à la solution suivante pour φ'

$$\varphi' = \pi/2 + \arctan(A_0 + \bar{\sigma}_z t \sin \theta'),$$

où $A_0 = \tan(\varphi'_0/2 - \pi/2)$ est déterminée par l'angle φ'_0 , valeur que prend l'angle φ' au point où se trouvait la particule lagrangienne à l'instant initial. Cette formule déterminant φ' peut s'introduire maintenant dans l'équation pour la norme (3.44a) et on obtient

$$\frac{1}{|\vec{u}'_3|^2} \frac{\bar{D}|\vec{u}'_3|^2}{Dt} = -\frac{D}{Dt} \ln(1 + (A_0 + \bar{\sigma}_z t \sin \theta')^2)$$

et on aboutit à la solution

$$|\vec{u}'_3|^2 = |\vec{u}'_3|_0^2 \frac{1 + A_0^2}{1 + (A_0 + \bar{\sigma}_z t \sin \theta')^2}. \quad (3.45)$$

On peut calculer A_0 et θ' en fonction des nombres d'onde de la perturbation monochromatique : $A_0 = \tan(\varphi'_0 - \pi/2) = -m/\sqrt{k^2 + l^2}$ et $\sin \theta' = k/\sqrt{k^2 + l^2}$. Ainsi en résolvant les équations avec notre approche et en considérant une perturbation monochromatique, on obtient la solution

$$|\vec{u}'_3|^2 = |\vec{u}'_3|_0^2 \frac{k^2 + l^2 + m^2}{k^2 + l^2 + (-m + k\bar{\sigma}_z t)^2} \quad (3.46)$$

Les résultats sont similaires au mécanisme d'Orr car il y a d'abord une phase transitoire de croissance algébrique des perturbations puis une phase de décroissance. La croissance des perturbations est donc due à de l'instabilité barocline non modale. Quelle est la différence avec le calcul des modes instables du modèle d'Eady ? La différence essentielle vient du fait que notre méthode ne prend pas en compte les conditions limites alors que le modèle d'Eady met l'accent sur l'instabilité barocline aux bords. Dans le modèle d'Eady, les conditions limites font que les perturbations peuvent avoir des structures stationnaires dont l'inclinaison est opposée au cisaillement tandis que dans notre approche les structures des perturbations évoluent dans le temps et finissent par avoir la même inclinaison que le cisaillement. D'autre part, dans le modèle d'Eady, à l'intérieur du domaine, on considère que la vorticité perturbée est nulle ($q' = 0$) tandis que dans notre approche ce n'est pas le cas : la perturbation évolue selon l'équation $\frac{Dq'}{Dt} = 0$, sans avoir $q' = 0$. On dit que la perturbation étudiée appartient au spectre continu. Ce calcul simple montre que *l'approche suivie dans ce chapitre où les deux types d'interaction, barotrope et barocline, coexistent est similaire à celle du chapitre 2 : l'interaction barocline mise en évidence ici est non modale.*

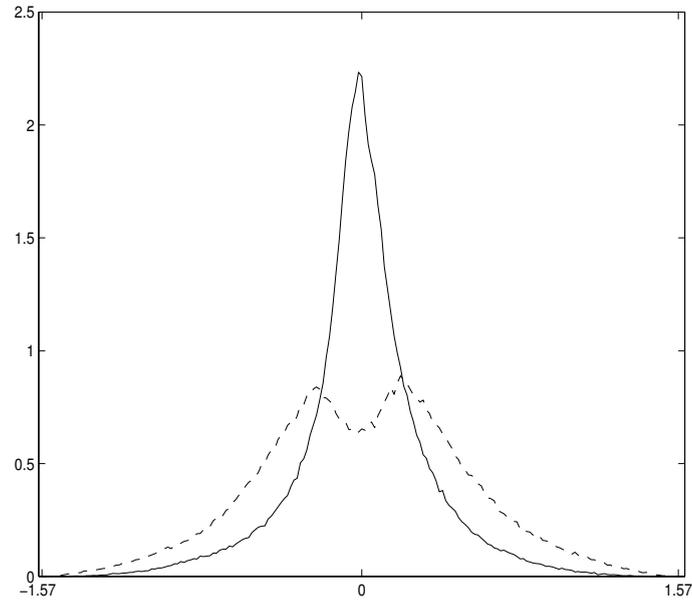
3.5 Résultats numériques

Les résultats numériques sont produits pour le même ensemble de 200 perturbations aléatoires que dans le chapitre précédent et qui ont évolué pendant 10 ou 20 jours. Le but est de vérifier la pertinence des diagnostics analytiques obtenus dans la section 3.3.

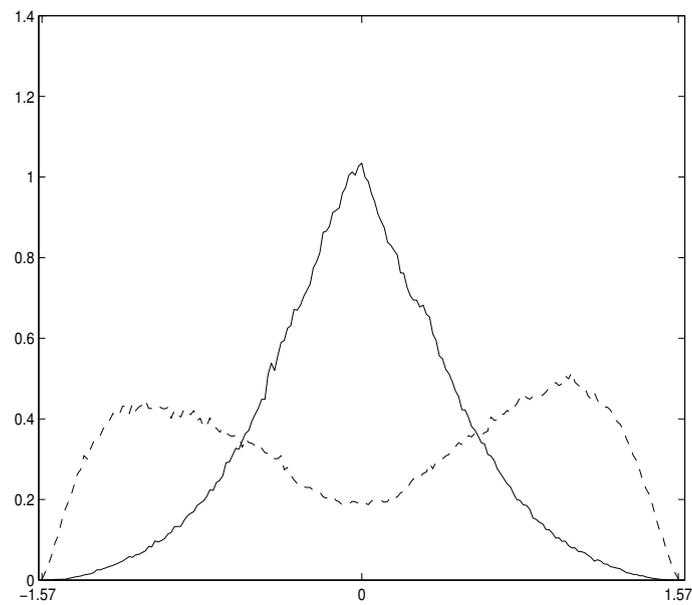
3.5.1 Alignement du gradient 3D de la fonction de courant perturbée

Régions de forte extraction d'énergie totale

Dans cette section, on veut vérifier numériquement que la structure verticale définie par le vecteur propre de $\bar{\mathbf{A}}$ correspondant à une croissance de la perturbation $(\theta_{-}^{row}, \varphi_{-}^{row})$ est la structure verticale la plus probable. Comme un vecteur propre définit une direction



(a) première couche



(b) troisième couche

FIG. 3.2 – Densité de probabilité à $T=10$ jours de $T(\varphi', \pi/2)$ (trait en tirets) et de $T(\varphi', \varphi_{ow}^r)$ (trait continu) dans les régions où $|r_{ow}| < 1$ et $\langle |\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{F}_h \cdot \vec{T}_h| \rangle > \frac{|\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{F}_h \cdot \vec{T}_h|_{\max}}{50}$; (a) première couche, (b) troisième couche.

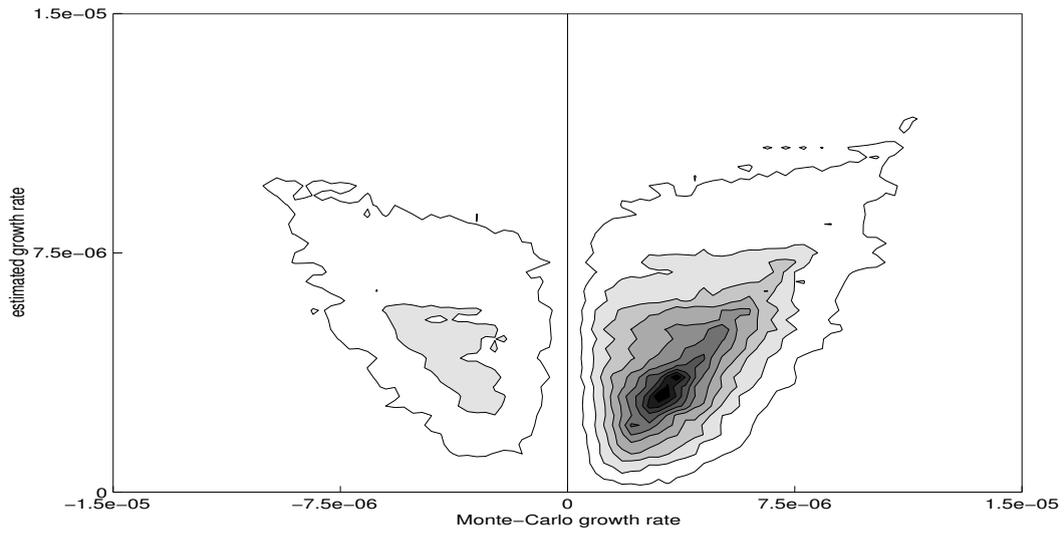
et pas un sens, si on veut savoir si la structure de la perturbation est proche de celle du vecteur propre, nous devons comparer (θ', φ') de chaque perturbation avec à la fois $(\theta_{-}^{r_{ow}}, \varphi_{-}^{r_{ow}})$ et à la fois $(\theta_{-}^{r_{ow}} + \pi, \pi - \varphi_{-}^{r_{ow}})$. Dans le cas présent, pour déterminer si φ' est proche de l'une des deux valeurs $(\varphi_{-}^{r_{ow}})$ ou $(\pi - \varphi_{-}^{r_{ow}})$, on définit la fonction $T(\varphi', \gamma)$ de la façon suivante

$$T(\varphi', \gamma) \equiv \begin{cases} \varphi' - \gamma & \text{si } |\varphi' - \gamma| < \pi/2 \\ \varphi' - (\pi - \gamma) & \text{si } |\varphi' - \gamma| > \pi/2 \end{cases} \quad (3.47)$$

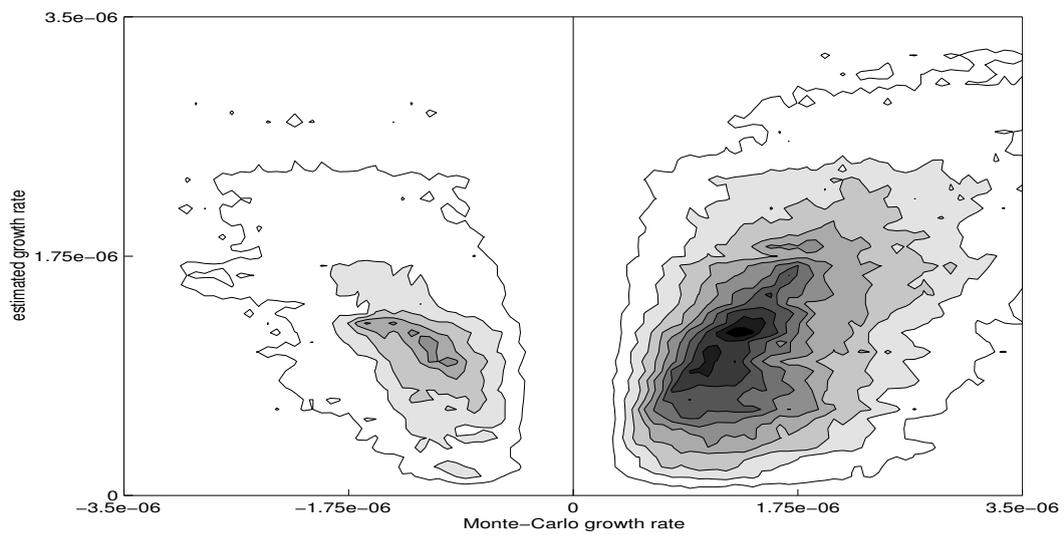
et on trace la densité de probabilité de $T(\varphi', \varphi_{-}^{r_{ow}})$ sur la figure 3.2. Si $T(\varphi', \varphi_{-}^{r_{ow}})$ est proche de 0, cela signifie que φ' est proche soit de $(\varphi_{-}^{r_{ow}})$ soit de $(\pi - \varphi_{-}^{r_{ow}})$. On remarque que la densité de probabilité de $T(\varphi', \varphi_{-}^{r_{ow}})$ dans la première couche (cf ligne en traits continus dans la figure 3.2.a) a un très fort pic au niveau de l'abscisse 0. Il y a donc un alignement clair de φ' avec la direction définie par $\varphi_{-}^{r_{ow}}$. Sur la figure 3.2.a, la courbe en tirets représente la densité de probabilité de $T(\varphi', \pi/2)$ dans la première couche, elle permet de voir si φ' est proche de $\pi/2$, c'est à dire de voir si la structure de la perturbation est proche de l'horizontale ou non. La densité de probabilité de $T(\varphi', \pi/2)$ ne présente pas d'alignement, mais seulement une tendance, c'est à dire que globalement les gradients horizontaux de la fonction de courant perturbée sont plus forts que les gradients verticaux. Cela montre que globalement le jet dans la première couche est barotrope. Dans la troisième couche (cf figure 3.2.b), l'alignement de φ' avec $\varphi_{-}^{r_{ow}}$ (courbe en continu) est encore présent même si le pic au niveau de l'abscisse 0 est moins important que dans la première couche. La courbe en tirets montre que contrairement à la première couche, l'énergie potentielle de la perturbation est aussi importante que l'énergie cinétique voir supérieure, c'est à dire que la structure de la perturbation a des gradients verticaux importants. Pour conclure sur la figure 3.2, elle montre que *quelque soit la couche, l'angle φ' a tendance à s'aligner avec le diagnostic analytique $\varphi_{-}^{r_{ow}}$.*

Dans la section analytique, nous avons défini le diagnostic analytique du taux d'extraction exponentiel δ_{ow}^t associé au vecteur propre productif. Sur la figure 3.3, on veut vérifier que le taux d'extraction δ^t de Monte-Carlo est effectivement bien diagnostiqué par δ_{ow}^t . La figure 3.3.a (respt. 3.3.b) représente la densité de probabilité jointe entre δ^t et δ_{ow}^t dans la première (respt. troisième) couche. Dans les deux couches, la plupart des points sont proches de la première bissectrice qui correspond à une corrélation de +1 entre les deux taux. Il existe une branche non négligeable autour de la seconde bissectrice qui correspond à une corrélation de -1. Cette seconde branche signifie qu'un certain nombre de couple de points (θ', φ') sont proches de la structure destructive $(\theta_{+}^{r_{ow}}, \varphi_{+}^{r_{ow}})$ comme cela a été vu dans le chapitre 2.

Les figures 3.2 et 3.3 confirment numériquement que *le vecteur \vec{u}'_3 a tendance locale-*



(a) première couche



(b) troisième couche

FIG. 3.3 – Densité de probabilité jointe à $T=10$ jours entre le taux d'extraction exponentiel de Monte-Carlo δ^t et l'estimation analytique δ_{ow}^t dans les régions où $|r_{ow}| < 1$ et $< |\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{F}_h \cdot \vec{T}_h| > \frac{|\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{F}_h \cdot \vec{T}_h|_{\max}}{200}$.

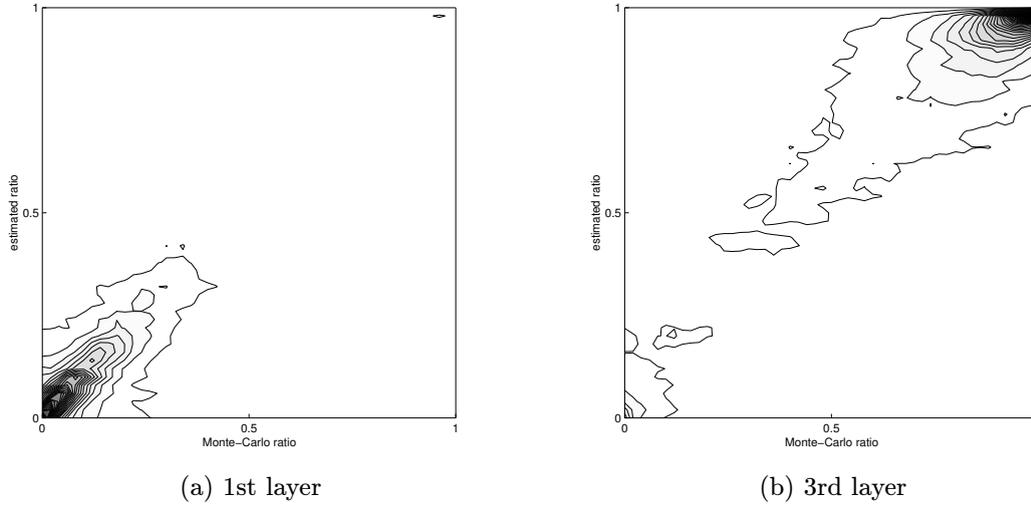


FIG. 3.4 – Densité de probabilité jointe à $T=10$ jours entre le rapport $1/(1 + R^{bc}) = \vec{F}_h \cdot \vec{T}_h / (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{F}_h \cdot \vec{T}_h) = \delta^c / \delta^t$ obtenu avec la technique de Monte-Carlo et le rapport obtenu avec le diagnostic analytique $1/(1 + R_{ow}^{bc}) = \delta_{ow}^c / \delta_{ow}^t$ dans les régions où $|r_{ow}| < 1$ et $|\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{F}_h \cdot \vec{T}_h| > \frac{|\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{F}_h \cdot \vec{T}_h|_{\max}}{100}$.

ment à s'orienter selon les directions des vecteurs propres de $\bar{\mathbf{A}}$.

Effets des termes agéostrophiques

La consistance de notre approximation des termes agéostrophiques et notamment l'expression analytique de la projection du vecteur agéostrophique barocline sur l'équation en φ' (3.42) est vérifiée numériquement (voir la figure 7 de l'article III).

3.5.2 Rapport entre les taux de conversion barotrope et barocline

On s'intéresse maintenant au rapport du taux d'extraction barotrope sur le taux d'extraction barocline R^{bc} défini en section 3.2.3. Les figures 3.4.a et 3.4.b montrent la densité de probabilité jointe de $1/(1 + R^{bc}) = \delta^c / \delta^t$ avec l'estimation analytique $1/(1 + R_{ow}^{bc}) = \delta_{ow}^c / \delta_{ow}^t$, dans la première et la troisième couche en seillant sur les régions de forte extraction d'énergie totale. Les pdfs simples repérées par les lignes en tirets sur les figures 3.2.a et 3.2.b nous ont suggéré, comme cela avait été noté précédemment que la première couche est plutôt influencée par le mode barotrope et la troisième par le mode barocline du point de vue de la croissance des perturbations. Ce résultat plutôt intuitif est rigoureusement montré à l'aide des figures 3.4.a et 3.4.b. En effet, dans la première couche (figure 3.4.a), la plupart des points sont proches du point (0,0) ce qui

signifie que R^{bc} et R_{ow}^{bc} sont importants tous les deux, largement supérieurs à un, alors que dans la figure 3.4.b la plupart des points sont proches de la coordonnée (1, 1), donc R^{bc} et R_{ow}^{bc} sont négligeables devant un dans la troisième couche. On remarque une fois de plus d'une autre manière que la structure du vecteur propre productif est proche de la structure réelle des perturbations puisque $R^{bc} \simeq R_{ow}^{bc}$ (l'axe de la première bissectrice est l'axe privilégié du nuage de points dans les deux figures 3.4.a et 3.4.b). Un diagnostic de R^{bc} plus approximatif aurait pu être le rapport du taux de déformation horizontale $\bar{\sigma} = \max(\delta^b)$ sur le cisaillement vertical $\bar{\sigma}_z = \max(\delta^c)$; mais ce diagnostic plus simple ne donne pas de bons résultats (non montré ici). Le rapport R^{bc} est donc bien diagnostiqué par la formule complexe mais pertinente donnée par l'expression (3.33) et peut donc être utile pour localiser pour un écoulement donné les régions où les processus barotropes dominant et les régions où les termes baroclines sont plus importants.

3.5.3 Comparaison avec le paramètre d'Eady

Le paramètre d'Eady est un diagnostic utile pour localiser les régions de forte baroclinicité (Hoskins et Valdes 1990, Buizza et Palmer 1995) et sa formule est

$$\sigma_{eady} = 0.31 \frac{f}{N} \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right| = 0.31 \bar{\sigma}_z. \quad (3.48)$$

Il correspond au taux de croissance le plus élevé du mode normal le plus instable dans le modèle d'Eady. Le paramètre d'Eady est la multiplication du coefficient 0.31 par le maximum de δ^c , c'est à dire $\bar{\sigma}_z$. On compare dans cette section la performance de ce paramètre d'Eady, σ_{eady} , avec notre diagnostic analytique δ_{ow}^c pour estimer le taux d'extraction barocline des perturbations de Monte-Carlo δ^c .

La densité de probabilité jointe de δ^c avec le paramètre d'Eady est montré sur la figure 3.5.a et celle de δ^c avec δ_{ow}^c sur la figure 3.5.b dans les régions de forte extraction barocline dans la première couche. Sur la figure 3.5.b, la première bissectrice est l'axe privilégié alors que sur la figure 3.5.a il n'y a pas d'axe privilégié. Les mêmes résultats sont présents aussi dans la troisième couche et montrent donc que *notre diagnostic analytique δ_{ow}^c est plus pertinent à chaque point de grille pour diagnostiquer le taux réel d'extraction barocline que le paramètre d'Eady.*

3.5.4 Localisation spatiale des champs d'erreur

Jusqu'à présent on s'est intéressé au terme d'extraction d'énergie instantané qui est la source de l'erreur de prévision des modèles. Notre méthode analytique a permis de diagnostiquer les taux d'extraction exponentiels de l'énergie et peut donc permettre de

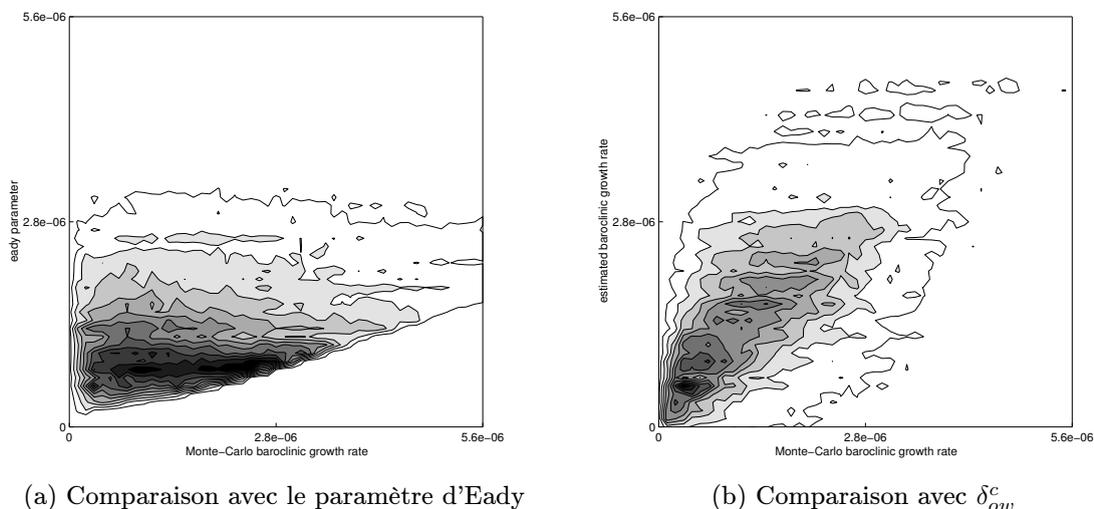


FIG. 3.5 – Densité de probabilité jointe à $T=10$ jours dans la première couche entre le taux d'extraction exponentiel barocline de Monte-Carlo δ^c et (a) le paramètre d'Eady, (b) le diagnostic analytique δ_{ow}^c dans les régions de forte conversion barocline ($|r_{ow}| < 1$ et $|\vec{F}_h \cdot \vec{T}_h| > \frac{|\vec{F}_h \cdot \vec{T}_h|_{\max}}{100}$).

diagnostiquer globalement à quel taux croît l'erreur. Dans cette section, on se focalise sur l'erreur elle-même et plus particulièrement sur la distribution spatiale des maxima des champs d'erreur qui sera l'objet principal du chapitre 4. Certaines évidences numériques présentées dans cette section montrent que les maxima des champs d'erreur peuvent être localisés à partir des caractéristiques de l'écoulement de base. Un résultat intéressant noté par Snyder et Hamill (2002) sur les caractéristiques des vecteurs de Lyapunov, et par Snyder et al. (2002) sur celles de perturbations initialisées à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo, est que l'erreur en vorticité potentielle (PV ci-après) est localisée dans les régions de forts gradients de vorticité potentielle de l'écoulement de base. Dans notre modèle aussi, on remarque pour les perturbations aléatoires qui ont évolué jusqu'à 10 jours cette corrélation spatiale entre le champ d'erreur en vorticité potentielle (figure 3.6.a) et le champ du gradient de vorticité potentielle de l'écoulement de base (figure 3.6.b). Cette propriété a été d'abord démontrée analytiquement par Thompson (1986) sous l'hypothèse d'erreurs initiales homogènes et isotropes et les articles de Snyder et Hamill (2002) et Snyder et al. (2002) suggèrent que c'est une propriété générique pour les écoulements quasigéostrophiques : même si une phase transitoire initiale peut se produire dans certaines couches où l'erreur de PV n'est pas encore stabilisée, Snyder et al. (2002) trouve systématiquement après deux jours dans un modèle quasigéostrophique atmosphérique une concentration d'erreur en PV dans les régions de forts gradients de PV de l'écou-

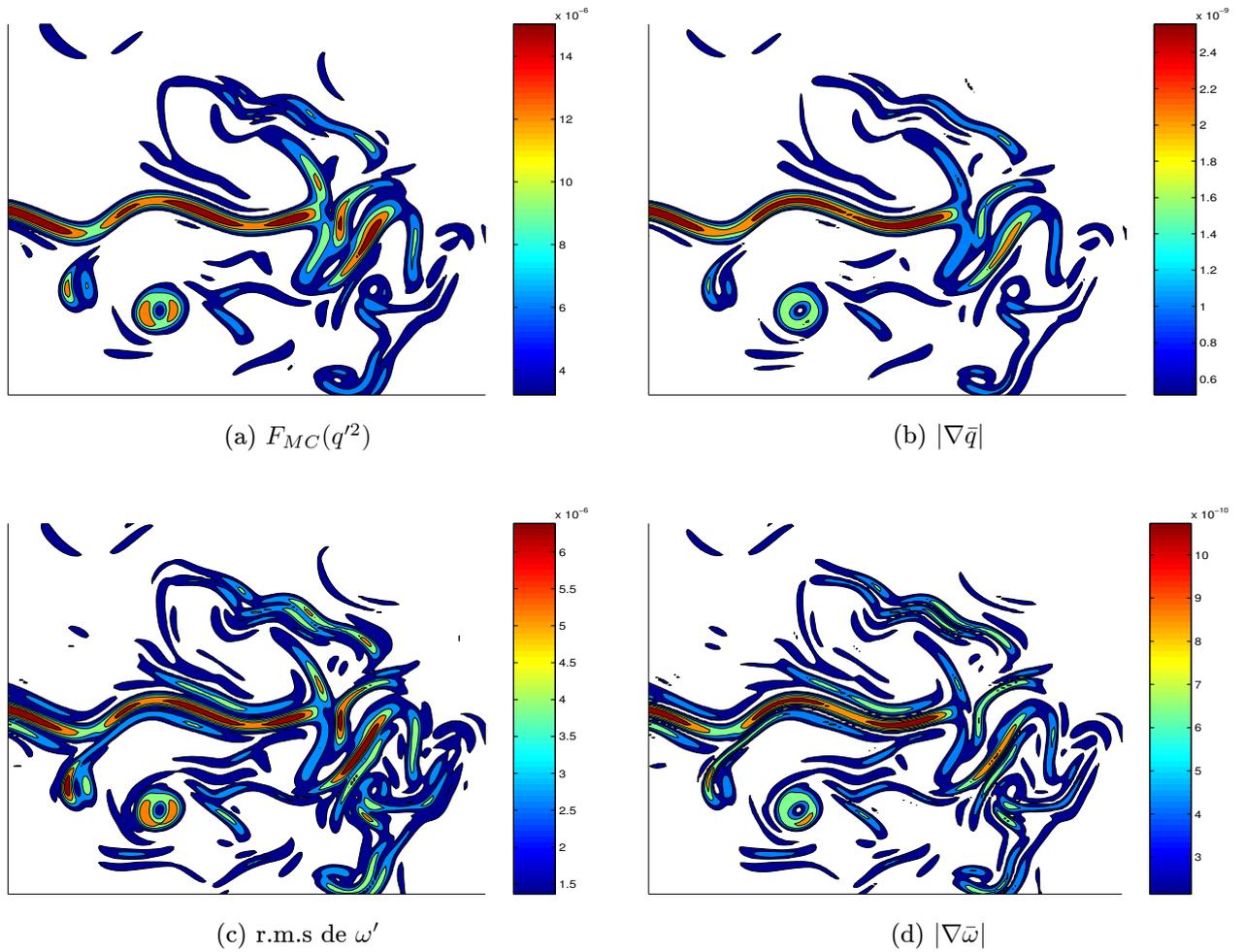


FIG. 3.6 – Comparaison entre les structures spatiales des champs d'erreur et les caractéristiques de l'écoulement de base ; (a) racine carrée de la moyenne de l'erreur en vorticité potentielle $F_{MC}(q'^2)$, (b) module du gradient horizontal de vorticité potentielle de l'écoulement de base, (c) racine carr e de la moyenne de l'erreur en vorticité relative, (d) module du gradient horizontal de vorticité relative de l'écoulement de base .

ment de base. Dans notre cas, après 10 jours d'évolution, toutes les couches présentent une forte corrélation entre la racine carrée de la moyenne de q'^2 calculé avec les 200 perturbations, qu'on note $F_{MC}(q'^2) \equiv \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i q_i'^2}$, où q_i' est l'erreur de vorticité potentielle pour une perturbation et où $N = 200$, (figure 3.6.a) et le gradient de PV de l'écoulement de référence (figure 3.6.b). Cette caractéristique peut en fait se généraliser à d'autres variables ; ainsi on remarque que l'erreur en vorticité relative (figure 3.6.c) se localise dans les régions de forts gradients de vorticité relative de l'écoulement de référence (figure 3.6.d). On voit bien une nette différence entre, d'une part les figures 3.6.a et 3.6.b pour les champs liés à la vorticité potentielle, et d'autre part les figures 3.6.c et 3.6.d pour les champs liés à la vorticité relative : par exemple, les champs liés à la vorticité potentielle ont une bande de maxima le long du coeur du jet alors que ceux liés à la vorticité relative ont une bande principale de maxima située au coeur du jet et aussi deux autres bandes de part et d'autre du jet. Cela suggère que pour une variable donnée s , l'erreur associée s' est localisée dans les régions de fort $|\nabla \bar{s}|$ et que l'ingrédient essentiel vient de la linéarisation de l'équation $\bar{D}\bar{s}/Dt = 0$ qui fait apparaître $\nabla \bar{s} : \bar{D}s'/Dt = -\mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{s}$. En fait, ces caractéristiques se révèlent être générales mêmes pour des variables qui ne sont pas conservées. Déjà la vorticité relative dans la première couche n'est pas complètement conservée puisque même si le jet est essentiellement barotrope, le modèle fait intervenir de faibles termes baroclines. De plus, ces caractéristiques peuvent se voir pour des variables qui ne sont pas liées à la vorticité. Par exemple, la racine carrée de la moyenne de l'erreur en énergie potentielle est montré sur la figure 3.7.a ; ses maxima se localisent très bien dans les régions où $\bar{\sigma}_z = \frac{1}{\sqrt{S}} \sqrt{(\partial_z \bar{u})^2 + (\partial_z \bar{v})^2}$ est important (figure 3.7.b) et pas forcément là où $\frac{1}{\sqrt{S}} |\partial_z \bar{u}|$ est fort (figure 3.7.c) ni là où $\frac{1}{\sqrt{S}} |\partial_z \bar{v}|$ est fort (figure 3.7.d). Les corrélations entre la racine carrée de la moyenne de l'erreur en énergie potentielle (figure 3.7.a) avec $\bar{\sigma}_z$, $\frac{1}{\sqrt{S}} |\partial_z \bar{u}|$ et $\frac{1}{\sqrt{S}} |\partial_z \bar{v}|$ valent respectivement 0.98, 0.85 et 0.84. La propriété générique semble être donc liée à la linéarisation d'une équation du type $\frac{\bar{D}\bar{s}}{Dt} = \text{termes ageostrophiques}$ plutôt qu'à la linéarisation d'une équation de conservation d'une variable.

Toujours en essayant de faire correspondre les champs d'erreur avec les caractéristiques de l'écoulement de base, la question qu'on se pose est quelle quantité de l'écoulement de base correspond à l'erreur en énergie cinétique ? Par analogie avec les résultats précédents et la forme de l'équation du mouvement linéarisée (3.4), on compare l'erreur en énergie cinétique avec les caractéristiques du tenseur du gradient de vitesse $\nabla \bar{\mathbf{u}}$. Pour suivre l'analogie jusqu'au bout avec les caractéristiques de l'erreur pour une fonction scalaire, l'erreur en énergie cinétique devrait être localisée dans les régions où la norme de $\nabla \bar{\mathbf{u}}$ est importante (sa norme est définie comme la racine carrée de la somme des coefficients de la matrice au carré et vaut $\sqrt{\bar{\sigma}^2 + \bar{\omega}^2}$). En effet cette propriété heuristique apparaît : la

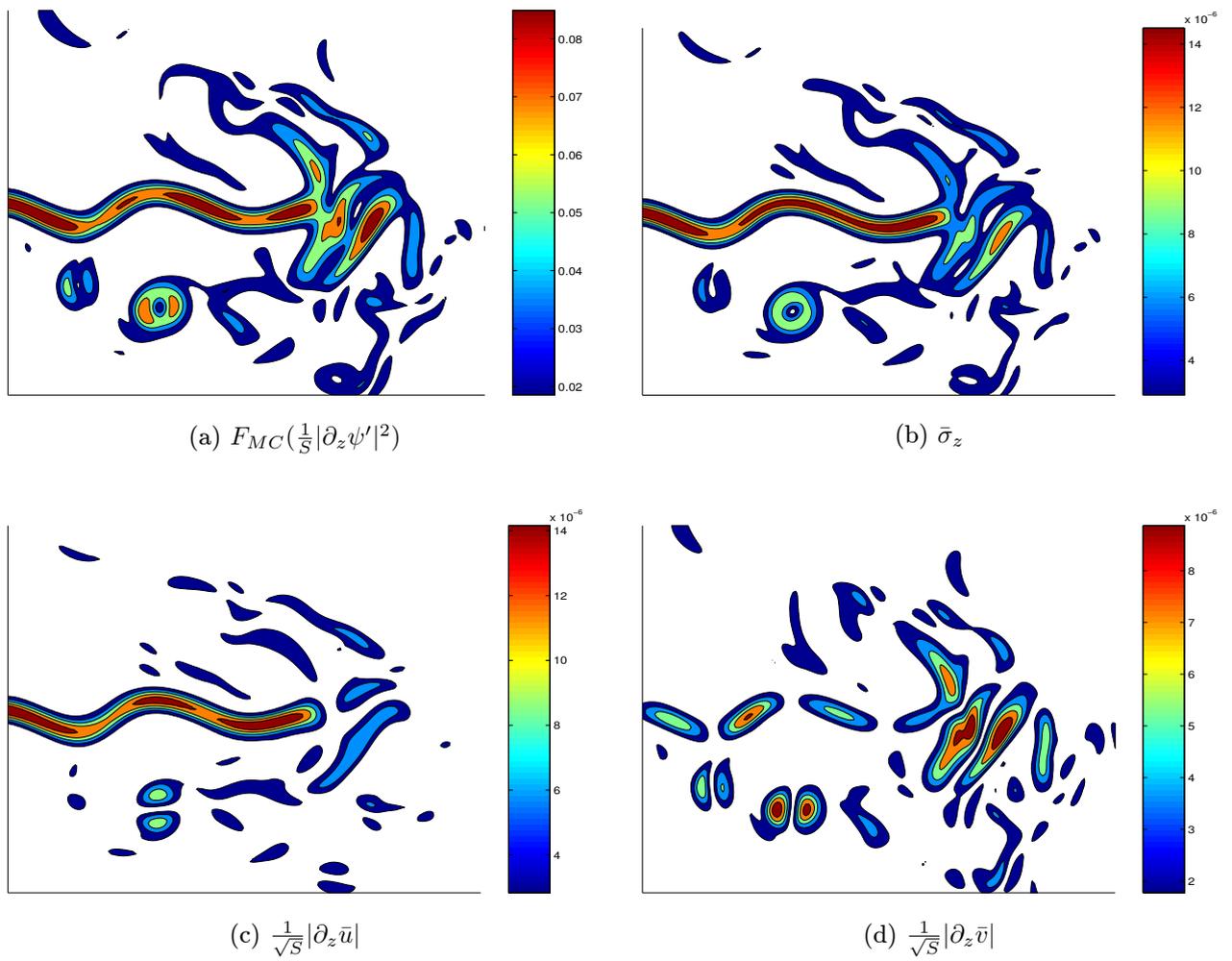


FIG. 3.7 – Comparaison entre les structures spatiales du champ d'erreur en énergie potentielle $\frac{1}{\sqrt{S}}|\partial_z\psi'|$ et les propriétés spatiales de l'écoulement de base dans la première couche ; (a) racine carrée de la moyenne de l'erreur en énergie potentielle $F_{MC}(\frac{1}{S}|\partial_z\psi'|^2)$, (b) taux de cisaillement vertical $\bar{\sigma}_z$, (c) taux de cisaillement vertical zonal $\frac{1}{\sqrt{S}}|\partial_z\bar{u}|$, (d) taux de cisaillement vertical méridien $\frac{1}{\sqrt{S}}|\partial_z\bar{v}|$.

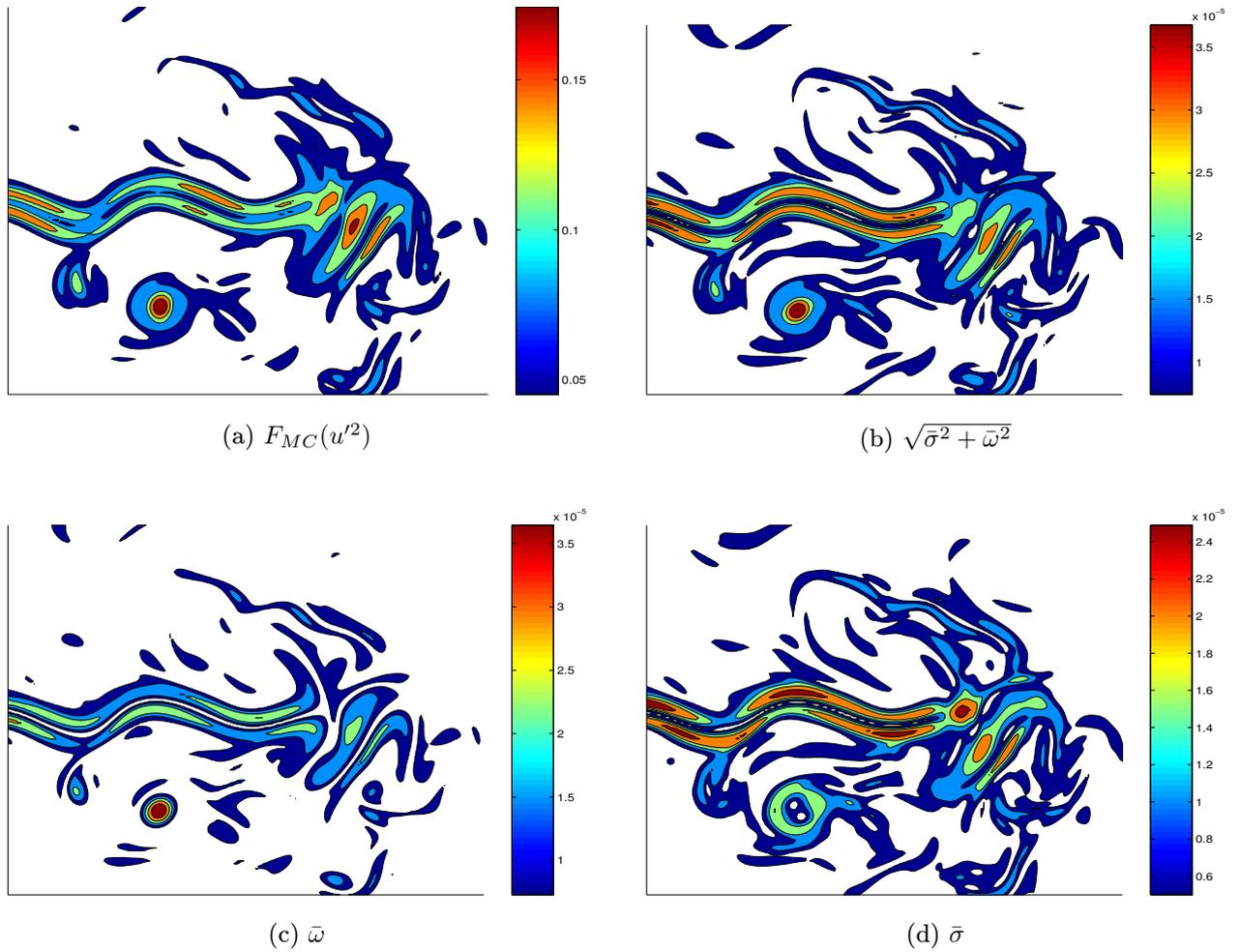


FIG. 3.8 – Comparaison entre les structures spatiales du champ d'erreur en énergie cinétique u' et les propriétés spatiales du tenseur du gradient vitesse $\nabla\bar{\mathbf{u}}$; (a) racine carrée de la moyenne de l'erreur en énergie cinétique $F_{MC}(u'^2)$, (b) norme de $\nabla\bar{\mathbf{u}}$: $\sqrt{\bar{\sigma}^2 + \bar{\omega}^2}$, (c) vorticité relative $\bar{\omega}$, (d) taux de déformation $\bar{\sigma}$.

racine carrée de la moyenne de l'erreur en énergie cinétique (figure 3.8.a) a ses maxima locaux placés dans les régions où la norme de $\nabla\bar{\mathbf{u}}$ est forte (figure 3.8.b) et pas toujours dans les régions où le taux de déformation est fort (figure 3.8.c) ou dans les régions où la vorticité est forte (figure 3.8.d). Par exemple, l'erreur en énergie cinétique (figure 3.8.a) a un fort maximum à la sortie du jet qui se voit aussi sur le champ de $\bar{\sigma}$ (figure 3.8.c) et il n'est pas présent sur la vorticité (figure 3.8.d). Par contre, l'erreur en énergie cinétique au niveau du tourbillon isolé correspond mieux au champ de vorticité et pas du tout au taux de déformation. La bonne correspondance dans tous les cas est donc bien la norme de $\nabla\bar{\mathbf{u}}$. L'analogie peut encore être poursuivie pour le champ d'énergie totale dont l'erreur est localis e dans les régions où la norme de $\bar{\mathbf{A}}$ est forte ; ces correspondances ne sont pas montr es ici. Pour conclure cette section sur la localisation spatiale de l'erreur, on a montré numériquement que *les champs d'erreur peuvent être localisés à partir de caractéristiques de l'écoulement de référence et qu'il y a un décalage spatial entre l'erreur pour une variable donn e et sa valeur pour l'écoulement de base.*

3.6 Discussion

Dans ce chapitre, nous avons généralisé l'approche des écoulements quasigéostrophiques barotropes du chapitre 2 au cas des écoulements quasigéostrophiques quelconques. Notre démarche qui repose sur une analyse des équations d'orientation du gradient tridimensionnel de la fonction de courant perturb e nous a permis de déterminer les orientations locales les plus probables de ce gradient. Les orientations les plus probables sont li es aux structures des deux vecteurs propres du tenseur $\bar{\mathbf{A}}$ qui prend en compte l'influence de la déformation horizontale et du cisaillement vertical. L'orientation créant une croissance de la perturbation, c'est à dire le vecteur propre productif est plus repr sent e dans les régions de forte activité et elle permet de déterminer en chaque point de grille de façon fiable les taux d'extraction exponentiels barotrope et barocline pour les régions de forte activité où $|r_{ow}| < 1$. *Le point important de ce chapitre est qu'on a abouti à des indices analytiques locaux de croissance de perturbation pertinents qui sont le résultat de l'interaction de la déformation horizontale et du cisaillement vertical sans hypothèse sur la forme de l'écoulement de référence mais en paramétrisant l'effet des termes agéostrophiques perturbés.* Malgré l'hypothèse de monochromaticité et l'hypothèse WKB qui ont été nécessaires pour aboutir à cette approximation, cette dernière s'est r v l e être une approximation valide de ces termes agéostrophiques perturbés.

On a montré aussi que *le diagnostic du taux d'extraction exponentiel barocline trouvé par notre méthode est un diagnostic local plus pertinent que le paramètre d'Eady pour*

rendre compte de l'extraction barocline locale.

Les résultats barotropes du chapitre 2 sur le caractère stable des structures destructives et instables des structures productives ont été généralisées dans le cas tridimensionnel. De même, on a établi le caractère exponentiel des extractions barotrope et barocline d'énergie totale. La même discussion que celle faite à la fin du chapitre 2 est donc encore valable dans le cas général pour expliquer le fait que globalement les perturbations croissent. *Les indices de croissance des perturbations mis en place dans ce chapitre sont liés, comme dans le cas barotrope seul, à un type d'instabilité non modale.*

Dans le présent paragraphe, on amorce une discussion sur les problèmes de prévisibilité qui sont l'objet du chapitre 4. L'approche analytique des chapitres 2 et 3 reposant sur une analyse des équations d'orientation du gradient de la fonction de courant perturbée permet d'évaluer la conversion instantanée d'énergie de l'écoulement de base vers les perturbations. Même si on est capable de localiser globalement les maxima locaux des champs d'erreur par rapport à une quantité liée à l'écoulement de base (par exemple l'erreur en énergie cinétique a ses maxima dans les régions où la norme de $\nabla\bar{u}$ est forte), le caractère *instantané* de notre approche donne peu d'informations sur l'évolution des champs d'erreur *au bout d'un temps fini*. Nous comblons cette lacune dans le chapitre 4 dans lequel nous mettons en place une méthode perturbative qui prenne en compte l'évolution au bout d'un temps fini des perturbations.

Chapitre 4

Prévisibilité et croissance de l'erreur initiale

4.1 Introduction

Une source majeure des erreurs de prévisions des modèles prognostiques des centres opérationnels océanographiques et météorologiques provient de l'inexactitude des données initiales qu'on fournit au modèle. L'erreur engendrée est, pour les prévisions à courts termes dans les moyennes latitudes (1 à 2 jours dans l'atmosphère), plus importante que celle engendrée par la formulation mathématique du modèle lui-même qui est sensée paramétriser les phénomènes physiques (cf introduction de Ehrendorfer et Tribbia (1997) et l'article de Reynolds et al. (1993)). Le caractère chaotique de l'atmosphère est bien connu depuis les travaux de Thompson (1957), Lorenz (1963) et Lorenz (1965). Depuis, en météorologie, on s'est vite rendu compte de l'importance d'évaluer la croissance de l'erreur initiale et différentes stratégies ont été proposées pour quantifier cette croissance au bout d'un temps fini T . L'idée qui prévaut à l'heure actuelle est la notion de prévision d'ensemble : on génère N perturbations qui sont additionnées à un état initial de référence permettant d'obtenir N états initiaux proches de l'état exact de l'atmosphère ou de l'océan. On peut ainsi se rendre compte de la divergence des différentes trajectoires de l'ensemble des N simulations du modèle et calculer par exemple, soit l'erreur moyenne, soit la trajectoire moyenne.

La méthode a été introduite par Leith (1974) et correspond à une méthode de Monte-Carlo initialisant des perturbations aléatoires, mais une telle méthode est très coûteuse en temps calcul puisque le nombre de perturbations aléatoires nécessaires et donc le nombre de simulations nécessaires du code non linéaire est de l'ordre du nombre de degrés de

liberté du système. C'est pour cette raison que cette méthode n'est pas viable d'un point de vue opérationnel.

Afin de réduire la taille de l'ensemble des perturbations, il faut initialiser des perturbations *qui soient significatives d'un point de vue dynamique*. C'est ce qui est utilisé à l'heure actuelle dans les différents centres de prévision opérationnels. On relève deux stratégies différentes bien documentées. Au centre européen de prévision météorologique à Reading (ECMWF), la méthode des vecteurs singuliers est utilisée (Buizza et al. 1993, Buizza et Palmer 1995, Molteni et al. 1996) : l'ensemble est composé de perturbations qui vont croître le plus rapidement pour l'énergie totale tout en présupposant une dynamique linéaire. Au centre américain de prévision météorologique (NCEP), la méthode des "bred modes" est utilisée (Toth et Kalnay 1993, Toth et Kalnay 1997) : elle correspond à des perturbations qui ont déjà crû dans le passé. Legras et Vautard (1995) montrent que les deux types de perturbations, vecteurs singuliers et "bred modes" sont respectivement reliés aux vecteurs de Lyapunov dits "forward" et "backward". Même si dans les centres opérationnels les vecteurs de Lyapunov "backward" ne sont pas utilisés, Vannitsem et Nicolis (1997) montrent dans un modèle quasigéostrophique qu'ils présentent des caractéristiques proches de celle de l'erreur moyenne obtenue à partir d'une méthode de Monte-Carlo. D'autres perturbations peuvent être significatives d'un point de vue dynamique comme les "modes normaux à temps fini" (les vecteurs propres de la résolvente du code tangent linéaire), qui tendent pour les temps longs vers les vecteurs de Lyapunov "backward" et les "modes normaux adjoints à temps fini" (les vecteurs propres de l'adjoint de la résolvente du code tangent linéaire) qui tendent pour les temps longs vers les vecteurs de Lyapunov "forward". Une explication plus détaillée de ces perturbations et de leurs relations mutuelles est donnée dans les articles de Frederiksen (1997) et Frederiksen (2000). Dans un contexte océanographique, la recherche sur les problèmes de prévisibilité et sur la croissance de l'erreur initiale n'a pas été jusqu'à présent aussi importante qu'en météorologie. Cependant, récemment dans un modèle simulant l'évolution d'un jet océanique du type Gulf Stream, Moore et Mariano (1999) et Moore (1999) étudient la dynamique de la croissance de l'erreur avec différents types de prévisions d'ensemble. Ils montrent que les modes singuliers et des perturbations créées à partir de "modes normaux adjoints à temps fini" sont les perturbations les plus pertinentes.

Les approches actuelles des centres opérationnels reposent donc sur des prévisions d'ensemble. Cependant, Patil et al. (2001) ont montré dans des modèles globaux de prévision qu'il suffit de peu de "bred modes" pour représenter le système chaotique de l'atmosphère. Spécifiquement, ils ont défini en chaque point du globe un sous-espace à partir des structures locales des "bred modes" dont ils ont estimé la dimension. Ils constatent que, dans

de nombreuses régions, ce sous-espace a une faible dimension ; cette analyse est confirmée par un article récent du même groupe de recherche (Corazza et al. 2002). Ces résultats de ce groupe de recherche motivent une alternative possible à la méthode de prévision d'ensemble qui serait basée sur *une perturbation unique qui capturerait la dynamique la plus significative de la croissance*. Afin de valider la pertinence statistique de cette perturbation unique, il nous faut la comparer avec le résultat d'une prévision d'ensemble, en l'occurrence la méthode retenue est la méthode de Monte-Carlo. Plus précisément, la question posée est : est ce que l'erreur moyenne de Monte-Carlo est bien capturée par la prévision de l'erreur simulée par l'évolution de cette perturbation unique. En particulier, comment se compare-t-elle avec la prévision unique de l'erreur correspondant soit au premier vecteur singulier d'une norme donnée, soit à un "bred mode" ?

L'objet de ce chapitre est de décrire l'algorithme d'initialisation de cette perturbation unique en nous appuyant sur un critère analytique de la dynamique locale barotrope mise en évidence au chapitre 2. Dans ce qui suit, nous allons nous référer à cette perturbation unique déterminée analytiquement comme étant le "mode analytique". La démarche de ce chapitre se distingue des deux précédents puisque les diagnostics effectués ne sont plus instantanés mais correspondent à l'évolution au bout d'un temps fini de l'erreur du modèle. L'intercomparaison entre les différentes évolutions d'erreur se fait en termes de (i) localisation spatiale de l'erreur afin de repérer les régions où la croissance de l'erreur est la plus forte et (ii) amplification de l'erreur. Cette étude se distingue des études théoriques précédentes de Vallis (1983) et de Vannitsem et Nicolis (1997) sur ce sujet qui se focalisent sur le problème du spectre de l'erreur. Par ailleurs, nous allons nous restreindre au cas d'une erreur initiale spatialement homogène, qui n'est donc pas localisée dans certaines régions de l'espace, aussi bien pour l'ensemble des perturbations aléatoires de Monte-Carlo que pour le mode analytique afin de s'affranchir du défaut bien connu de la méthode des vecteurs singuliers qui tend à engendrer des perturbations trop fortement localisées spatialement.

Le modèle choisi pour effectuer ces tests est le modèle utilisé dans les chapitres précédents qui est sensé simuler l'évolution d'un jet du type Gulf Stream. On se place donc dans la même situation physique que Moore et Mariano (1999). L'intérêt de ce modèle océanique est que l'écoulement possède des structures spatio-temporelles variées permettant d'aboutir à une variété de comportement de la croissance de l'erreur.

4.2 Méthodes classiques

4.2.1 Vecteurs singuliers

Une première ébauche de la méthode des vecteurs singuliers a été décrite dans le chapitre 1, mais les propriétés énoncées concernaient uniquement le cas des écoulements stationnaires et se focalisaient sur la comparaison entre modes normaux et modes singuliers. Nous abordons maintenant la même méthode mais en considérant des écoulements dépendant du temps et en ayant en perspective les problèmes de prévisibilité et non plus les problèmes d'instabilité. L'intérêt des vecteurs singuliers pour l'étude des problèmes de prévisibilité a été de nombreuses fois traitées dans la littérature, par exemple par Lorenz (1965), Lacarra et Talagrand (1988), Farrell (1990), Molteni et Palmer (1993) et Ehrendorfer et Errico (1995). Cette méthode est aussi très utile pour la problématique du ciblage des observations (Palmer et al. 1998).

Rappelons d'abord comment on obtient les vecteurs singuliers à partir d'un modèle non linéaire dont l'opérateur est noté \mathbf{N} . L'équation du code non linéaire s'écrit ainsi :

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = \mathbf{N}(\bar{\psi}), \quad (4.1)$$

où $\bar{\psi}$ désigne la fonction de courant. L'évolution dans le temps d'une petite perturbation ψ' de la fonction de courant est décrite par l'équation du modèle linéaire tangent

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \bar{\psi}}(\bar{\psi}(t))\psi'. \quad (4.2)$$

Le premier vecteur singulier pour la norme notée $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ qui optimise la croissance des perturbations entre $t = 0$ et $t = T$ est défini comme la perturbation initiale $\psi'(0)$ qui maximisera l'amplification suivante

$$\frac{\langle \psi'(T), \psi'(T) \rangle_S}{\langle \psi'(0), \psi'(0) \rangle_S}, \quad (4.3)$$

en supposant que la perturbation est suffisamment petite pour évoluer linéairement. Dans ce cas, si $\mathbf{M}(T)$ et $\mathbf{M}^{*S}(T)$ représente respectivement la résolvante de l'équation tangente linéaire (4.2) et son adjoint pour la norme $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$, nous aboutissons aux égalités suivantes

$$\frac{\langle \psi'(T), \psi'(T) \rangle_S}{\langle \psi'(0), \psi'(0) \rangle_S} = \frac{\langle \mathbf{M}(T)\psi'(0), \mathbf{M}(T)\psi'(0) \rangle_S}{\langle \psi'(0), \psi'(0) \rangle_S} = \frac{\langle \mathbf{M}^{*S}(T)\mathbf{M}(T)\psi'(0), \psi'(0) \rangle_S}{\langle \psi'(0), \psi'(0) \rangle_S}. \quad (4.4)$$

Quand $\psi'(0)$ est le vecteur propre ψ_{SV}^S correspondant à la valeur propre maximale λ_{SV}^S de la matrice $\mathbf{M}^{*S}(T)\mathbf{M}(T)$, l'amplification (4.4) est maximale et ψ_{SV}^S est appelé le premier

vecteur singulier. Il est facile d'obtenir le premier vecteur singulier en utilisant la méthode de la puissance itérée, comme le font Moore et Farrell (1993), qui consiste à appliquer plusieurs fois la matrice $\mathbf{M}^{*S}(T)\mathbf{M}(T)$ à une perturbation initiale quelconque ψ'_{random}

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (\mathbf{M}^{*S}(T)\mathbf{M}(T))^N \psi'_{random} = \psi^S_{SV}. \quad (4.5)$$

En effectuant suffisamment de simulations du code tangent et du code adjoint, on obtient ainsi le premier vecteur singulier. L'équation du code adjoint ne donne pas forcément directement l'adjoint pour la norme voulue $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$, ce qui nécessite un changement de norme. Considérons que \mathbf{M}^* est l'adjoint pour la norme $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ associée au code adjoint lui-même et \mathbf{S} est la matrice de changement de norme définie ainsi :

$$\langle \psi'_1, \psi'_2 \rangle_S = \langle \psi'_1, \mathbf{S}\psi'_2 \rangle_0. \quad (4.6)$$

Il est facile de montrer que $\mathbf{M}^{*S} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}^*\mathbf{S}$ (Buizza et al. 1993). Le premier vecteur singulier, ψ^S_{SV} , est alors le premier vecteur propre de la matrice $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}^*(T)\mathbf{S}\mathbf{M}(T)$.

Si on veut optimiser la croissance de l'erreur dans une région particulière de l'espace (notée A), ce qui sera le cas dans la suite du chapitre, la méthode des vecteurs singuliers s'adapte facilement à cette contrainte. En effet, il est possible d'obtenir le vecteur singulier qui maximisera la croissance de la norme $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ à l'intérieur de cet espace A, en utilisant l'opérateur de projection locale (Barkmeijer 1992, Buizza et Palmer 1995, Hartmann et al. 1995). Supposons qu'on veuille maximiser l'amplification

$$\frac{\langle \mathbf{P}_A \psi'(T), \mathbf{P}_A \mathbf{S} \psi'(T) \rangle_0}{\langle \psi'(0), \mathbf{S} \psi'(0) \rangle_0}, \quad (4.7)$$

où \mathbf{P}_A représente l'opérateur de projection locale

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_A \psi'(x, y, z) &= \psi'(x, y, z) \quad \forall (x, y) \in A \\ &= 0 \quad \forall (x, y) \notin A. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Plaçons nous dans le cas particulier où $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ est la norme de l'énergie totale sur tout le domaine. Ainsi \mathbf{P}_A est auto-adjoint pour la norme $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$, ce qui permet de vérifier les égalités suivantes $\mathbf{P}_A^* \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_A \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_A$, donc le vecteur singulier qui maximisera la croissance au niveau de la surface A, est le premier vecteur propre de $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}^*(T)\mathbf{P}_A\mathbf{S}\mathbf{M}(T)$. Ceci illustre comment calculer les vecteurs singuliers qui optimisent la croissance de l'erreur dans une région spécifique de l'espace.

L'objet du présent paragraphe est de sensibiliser le lecteur aux implications du choix de la norme pour le calcul des vecteurs singuliers. En fait, il est effectivement bien documenté dans la littérature sur les vecteurs singuliers (Molteni et al. 1996, Moore et Mariano

1999, Frederiksen 2000) que *plus une norme est caractérisée par une petite échelle spatiale, plus l'échelle spatiale du vecteur singulier associé est de grande échelle*. Molteni et al. (1996) interprètent physiquement ce résultat de la façon suivante : une perturbation de grande échelle a par définition peu d'enstrophie, mais l'interaction avec les petites échelles de l'écoulement de référence conduit au développement de structures de petite échelle. De cette manière, l'enstrophie de la perturbation est largement amplifiée au cours du temps et il est donc logique que le vecteur singulier de l'enstrophie soit de grande échelle. Le résultat précédent se déduit de l'équation de vorticité potentielle linéarisée (3.10) qui pour une perturbation de grande échelle se simplifie en $\frac{\partial q'}{\partial t} = -\vec{u}' \cdot \vec{\nabla} \bar{q}$ car $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} q'$ est négligeable devant $\vec{u}' \cdot \vec{\nabla} \bar{q}$. La grande échelle de la perturbation (\vec{u}') advecte la petite échelle de l'écoulement de base ($\vec{\nabla} \bar{q}$), et crée de la petite échelle pour la perturbation (q'). On peut de plus établir mathématiquement des relations simples entre les structures des différents vecteurs singuliers des différentes normes lorsqu'on optimise la croissance pour les temps longs comme le montrent Moore et Mariano (1999). Comme le vecteur singulier ψ_S^{SV} est vecteur propre de la matrice $\mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}^*(T) \mathbf{S} \mathbf{R}(T)$ avec la valeur propre λ_S , on a :

$$\mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}^*(T) \mathbf{S} \mathbf{R}(T) \psi_{SV}^S = \lambda_S \psi_{SV}^S. \quad (4.9)$$

Quand $T \rightarrow \infty$, le vecteur propre le plus instable ψ'^* de la matrice $\mathbf{R}^*(T)$ émerge après l'intégration de l'adjoint

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{R}^*(T) x = \psi'^*, \quad (4.10)$$

quel que soit le vecteur x . A partir des équations (4.9) et (4.10), on déduit que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}^*(T) \mathbf{S} \mathbf{R}(T) \psi_{SV}^S = \mathbf{S}^{-1} \psi'^* = \lambda_S \psi_{SV}^S. \quad (4.11)$$

Ainsi le vecteur singulier ψ_{SV}^S pour la norme $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ est colinéaire à $\mathbf{S}^{-1} \psi'^*$. Par exemple, si \mathbf{R}^* est l'adjoint pour la norme de l'énergie totale et si nous voulons obtenir le vecteur singulier de l'enstrophie potentielle, alors \mathbf{S} est le laplacien tridimensionnel qui fait passer de la fonction de courant à la vorticité potentielle. La matrice \mathbf{S}^{-1} est alors simplement l'inverse d'un laplacien tridimensionnel, et on voit bien que le vecteur singulier de l'enstrophie potentielle (not e ψ_{SV}^{ens}) a une échelle plus grande que celui de l'énergie totale (not e ψ_{SV}^{et}) puisqu'ils vérifient $\psi_{SV}^{ens} = \mathbf{S}^{-1} \psi_{SV}^{et}$. On a donc une relation entre les différents vecteurs singuliers des différentes normes pour des temps d'optimisation longs.

4.2.2 Simulation de "bred modes"

Le centre américain de prévision m eteorologique (NCEP), (Toth et Kalnay 1993, Toth et Kalnay 1997, Szunyogh et al. 1997) a mis au point un ensemble de perturbations appel es

"bred modes" pour effectuer des prévisions d'ensemble. La technique pour initialiser les "bred modes" utilise le cycle de l'analyse des observations et à la différence des vecteurs singuliers, ces perturbations ne peuvent pas être directement transposées à notre étude théorique où il n'y a pas d'assimilation d'observations. On peut cependant développer une méthode qui simule le comportement de "bred modes". Avant de décrire cette méthode, expliquons comment sont calculés les "bred modes" au centre américain : (a) à un instant $t = T_{-i}$ dans le passé, une perturbation aléatoire a été ajoutée à l'écoulement de contrôle, (b) deux simulations du code non linéaire sont effectuées entre $t = T_{-i}$ et $t = T_{-i+1}$, l'une décrit l'évolution de l'écoulement de contrôle et l'autre celle de l'écoulement de contrôle perturbé, (c) à l'instant $t = T_{-i+1}$, la perturbation obtenue en effectuant la différence des deux simulations est renormalisée afin qu'elle soit représentative de l'ordre de grandeur de l'erreur d'analyse, (d) deux simulations sont de nouveau effectuées, l'une avec le nouvel écoulement de contrôle, résultat de l'analyse et l'autre avec la somme de cet écoulement de contrôle et de la perturbation normalisée. L'étape précédente est itérée plusieurs fois, et la méthode aboutit à une perturbation qui a évolué selon le cycle décrit ci-dessus entre $t = T_{-i}$ et $t = 0$.

Les "bred modes" sont donc caractéristiques de perturbations qui ont évolué et crû dans le passé avant l'instant initial $t=0$. Ils sont très proches des vecteurs de Lyapunov "backward" qui existent bien évidemment sans le cycle des observations. Les principales différences dynamiques entre les "bred modes" et les vecteurs de Lyapunov sont de deux types : d'une part, les "bred modes" sont définis comme la différence entre deux simulations passées du code non linéaire et peuvent donc avoir une amplitude finie ; d'autre part, entre l'instant où la perturbation a été initialisée aléatoirement et l'instant où on l'utilise dans la prévision d'ensemble, il s'est écoulé un temps fini. *Les deux grandes différences entre les "bred modes" et les vecteurs de Lyapunov viennent donc du caractère de temps fini et d'amplitude finie des "bred modes"*. Toth et Kalnay (1997) décrivent les avantages des "bred modes" par rapport aux vecteurs singuliers : les "bred modes" sont des estimations d'une *croissance durable* de l'erreur et représente donc l'erreur d'analyse la plus probable. Les vecteurs singuliers expriment par contre une *croissance transitoire rapide* dans le futur. De plus, *les "bred modes" incorporent une dynamique non linéaire alors que les vecteurs singuliers sont basées sur une théorie linéaire*. D'un point de vue numérique, le calcul des vecteurs singuliers est plus coûteuse en temps calcul que celle des "bred modes".

Comme on ne considère pas par la suite de cycle d'assimilation, on développe une méthode qui simule l'initialisation de "bred modes" : (a) à l'instant $t = T_{-1}$, une perturbation aléatoire est ajoutée à l'écoulement de référence, deux simulations du code non linéaire sont alors effectuées, l'une avec l'écoulement de référence, l'autre avec l'écoulement de

référence perturbé, (b) à l'instant $t = 0$, la perturbation obtenue avec la différence des deux simulations non linéaires est normalisée et ajoutée au même écoulement de référence, (c) deux simulations du code non linéaire sont effectuées entre $t = 0$ et $t = T_{+1}$, pour obtenir un diagnostic d'erreur à l'instant $t = T_{+1}$. Cette méthode est mise en place dans notre modèle et les résultats numériques obtenus sont montrés par la suite. Dans cette méthode d'initialisation, nous nous sommes restreints à un seul cycle ($i = 1$) puisque nous ne considérons pas d'assimilation d'observations.

4.3 Initialisation d'une perturbation unique à partir de la dynamique locale de croissance

Les deux méthodes classiques décrites précédemment reposent sur une approche globale de la dynamique des perturbations et finalement fournissent peu d'informations sur les mécanismes mis en jeu et sur les interactions locales entre les perturbations et l'écoulement de référence. Les deux chapitres précédents, au contraire, se sont focalisés sur une information locale et instantanée de l'interaction. Le but du présent chapitre est d'établir un pont entre ces deux types d'approche afin de clarifier les deux points de vue. Dans la présente section, on détaille les différentes étapes de l'algorithme d'initialisation de la perturbation unique en prenant en compte la dynamique locale de croissance. Dans une première étape, nous ne considérons que la croissance barotrope, la généralisation barocline sera envisagée ultérieurement.

4.3.1 Détermination de la perturbation de vitesse initiale

Nous avons vu au chapitre 2 qu'au bout d'un temps fini de 10 jours, les perturbations avaient une structure spatiale bien spécifique qui pouvait être déterminée à partir de la structure de l'écoulement de base. Plus précisément, l'orientation la plus probable des isolignes de la fonction de courant perturbée est déterminée à partir de la géométrie des champs instantanés de déformation et d'accélération de l'écoulement de base. L'idée est d'initialiser une perturbation unique dont la fonction de courant a précisément cette orientation la plus probable dès l'instant initial $t = 0$. Cette orientation la plus probable est déterminée à partir de la valeur la plus probable de l'angle ζ' défini par la relation $(\vec{D}, \vec{E}) = \pi/2 + \zeta'$, où \vec{E} caractérise la perturbation de vitesse et \vec{D} est relié aux axes principaux du champ de déformation (cf section 2.3.1). Nous avons vu au chapitre 2 que la dynamique de l'angle ζ' pouvait être explicitée à l'aide d'une approximation du gradient de la pression agéostrophique perturbée. Cela nous a permis d'aboutir à des valeurs

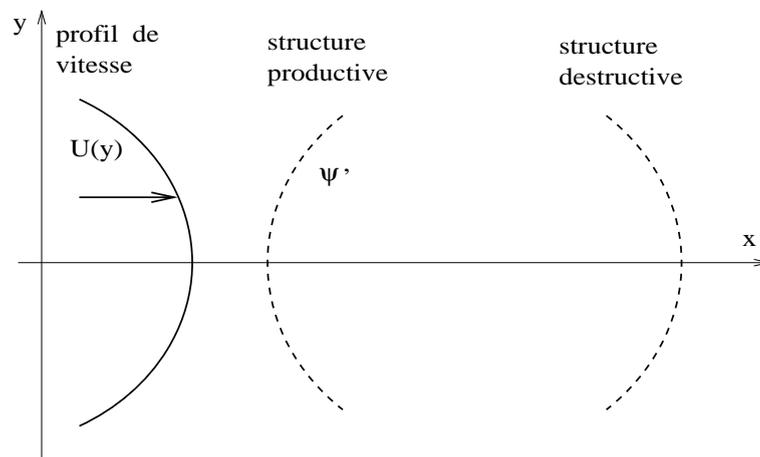
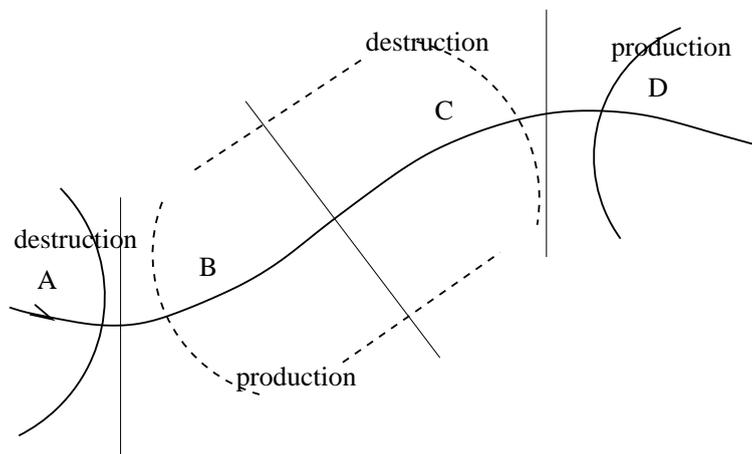
spécifiques de l'angle ζ' . Nous retiendrons ici le choix du couple le plus probable comme étant $\zeta_{\pm}^r = \pm \arccos(-r)$, où $r \equiv \frac{\bar{\omega} + 2 \frac{D\bar{\phi}}{Dt}}{\bar{\sigma}}$ mesure le rapport entre la rotation "effective" et le taux de déformation. La solution ζ_-^r (respt. ζ_+^r) correspond à une production (respt. destruction) d'énergie locale de la perturbation mais constitue une solution instable (respt. stable) de l'équation 2.30 d'évolution de l'orientation ζ' qu'on rappelle ici :

$$\frac{D\zeta'}{Dt} = \bar{\sigma}(r + \cos \zeta').$$

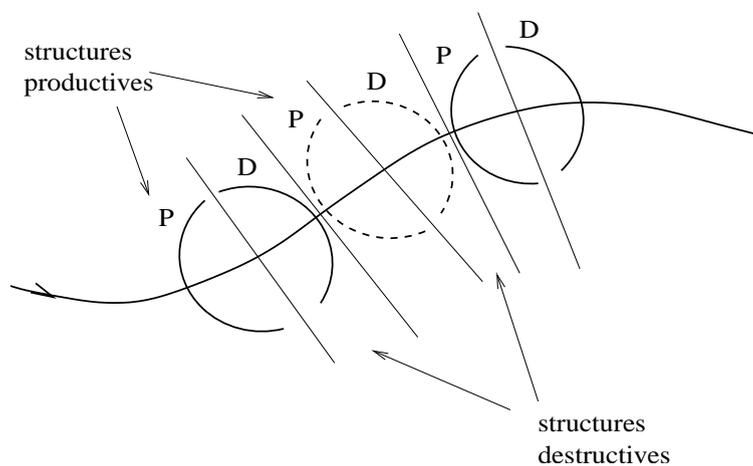
L'étude de stabilité de ce système dynamique se trouve dans l'appendice A de l'article II (annexe A). Nous avons vérifié numériquement pour un écoulement complexe la pertinence des deux solutions productive et destructive mais n'avons pas déterminé dans quelles régions chaque solution prévalait. Pour lever cette indétermination, nous avons besoin d'informations supplémentaires qui seront détaillées dans la section suivante. Enfin, la connaissance de l'orientation ζ' à partir du couple ζ_{\pm}^r permet d'obtenir la direction de la perturbation de vitesse mais pas le module du vecteur vitesse perturbée ρ' . Nous avons opté pour le choix $\rho' = 1$ qui donne un poids énergétique uniforme spatialement. Par opposition au caractère très localisé des vecteurs singuliers, notre choix permet de donner toutes les chances de croissance aux différentes régions de l'espace. La perturbation unique obtenue avec $\rho' = 1$ devrait ainsi mieux représenter la répartition spatiale de la moyenne d'ensemble de Monte-Carlo, qui par ses initialisations aléatoires ne présuppose pas de localisation spatiale marquée.

4.3.2 Localisation des régions de production et de destruction

La détermination des régions de production et de destruction s'effectue par une approche heuristique qui s'appuie sur l'analyse d'un grand nombre de simulations ($O(1000)$) du modèle quasigéostrophique du chapitre 2. Plus précisément, le comportement statistique des indices d'extraction a été étudié en effectuant des moyennes de la quantité δ (le taux exponentiel d'extraction du chapitre 2), et nous a amené à énoncer des règles sur la répartition spatiale de ces indices d'extraction qui sont résumées ci-après à l'aide de la figure 4.1. Dans le cas de la figure 4.1.a d'un jet rectiligne zonal dont le profil de vitesse ne dépend que de la coordonnée y ($\vec{u} = U(y)\vec{e}_x$), les structures productives ont une inclinaison opposée au cisaillement de vitesse alors que les structures destructives ont la même inclinaison. Le schéma 4.1.a permet d'identifier les régions de production et de destruction de la figure 2.13 du chapitre 2 qui montre une perturbation qui a évolué pendant un temps fini le long d'un jet avec méandres. Ces régions sont schématisées sur la figure 4.1.b où les régions de production sont situées en aval du sommet du méandre

(a) jet rectiligne $\vec{u} = U(y)\vec{e}_x$ 

(b) jet avec méandres et perturbations de grande échelle



(c) jet avec méandres et perturbations de petite échelle

FIG. 4.1 – Schéma expliquant l'alternance nécessaire pour de structures productives et destructives le long d'une trajectoire lagrangienne pour : (a) jet rectiligne, (b) jet avec méandre et avec des perturbations de grande échelle et (c) jet avec méandre et des perturbations de petite échelle.

et les régions de destruction en amont. Cependant, la localisation de ces régions dépend fortement de l'échelle spatiale de la perturbation. Ainsi pour des structures spatiales de plus petites échelles, leur distribution est représentée sur la figure 4.1.c. Au vu des simulations analysées, nous avons constaté qu'une perturbation initiale de plus grande échelle que l'écoulement de base évoluera au bout d'un temps fini vers une échelle spatiale caractéristique de l'écoulement de base. Ainsi les perturbations aléatoires de grande échelle tendent vers une structure similaire à la figure 4.1.b et atteignent l'échelle typique du méandre. Dans le cas où l'écoulement de base correspond à un tourbillon isolé, l'échelle spatiale de la perturbation a également l'échelle du tourbillon. Dans ce qui suit, nous ne considérons que des perturbations dont l'échelle spatiale est semblable à celle de l'écoulement de base qui constitue une borne supérieure pour l'échelle des perturbations au bout d'un temps fini. Examinons de manière plus détaillée la disposition relative des régions de production/destruction de la figure 4.1.b. Notons $P \rightarrow D$, les passages d'une région de production à une région de destruction et $D \rightarrow P$ le passage inverse. Les passages $D \rightarrow P$ (par exemple $A \rightarrow B$ ou $C \rightarrow D$) sont très différents des passages $P \rightarrow D$ ($B \rightarrow C$) puisque la courbure des isolignes de la fonction de courant est brutalement inversée au niveau des passages $D \rightarrow P$. D'après l'étude de stabilité de l'appendice A de l'article II, il est logique d'avoir des passages $P \rightarrow D$ puisque la structure productive est instable et la structure destructive stable. En ce qui concerne les passages $D \rightarrow P$, nous avons besoin d'une information supplémentaire par rapport à la dynamique détaillée au chapitre 2 qui est de satisfaire la relation diagnostique de non divergence du vecteur vitesse perturbée ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u}' = 0$)¹. Discutons de manière heuristique les implications d'une telle contrainte diagnostique. Ecrivons la perturbation de vitesse en fonction de son module et de son angle $\vec{u}' = \rho'(\cos \theta', \sin \theta') = \rho' \vec{e}'$. Nous obtenons :

$$\vec{e}' \cdot \frac{\nabla \rho'}{\rho'} + \vec{\nabla} \theta' \cdot \vec{e}'_{\perp} = 0. \quad (4.12)$$

A partir de cette équation, voici le raisonnement qui aboutit à la localisation des passages $D \rightarrow P$:

- Si ρ' est une constante ($|\frac{\nabla \rho'}{\rho'}| = 0$), alors l'équation précédente se ramène simplement à $\vec{\nabla} \theta' \cdot \vec{e}'_{\perp} = 0$. Si $\vec{\nabla} \theta' = \vec{0}$, la structure de la fonction de courant perturbée est rectiligne. Si $\vec{\nabla} \theta' \neq \vec{0}$, le vecteur \vec{e}' est colinéaire à $\vec{\nabla} \theta'$ et il est facile de se rendre compte que la fonction de courant a alors une forme circulaire. Si ρ' varie peu spatialement, la structure de la fonction de courant perturbée est donc, soit rectiligne, soit circulaire. D'après la figure 4.1.b, la forme circulaire est obtenue au niveau des

¹Cette contrainte n'a été utilisée que de manière indirecte dans les choix analytiques de l'approximation du gradient de la pression géostrophique perturbée.

régions fortement productives ou fortement destructives, et la forme rectiligne se situe au niveau du changement $P \rightarrow D$.

- Comme ces deux formes ne sont plus valides au niveau des passages $D \rightarrow P$, on en déduit donc que ces passages sont caractérisés par de fortes valeurs de $|\vec{\nabla}\rho'/\rho'|$.
- Le cas de fortes valeurs de $|\vec{\nabla}\rho'/\rho'|$, peut être étudié à partir de l'équation pronostique (2.19a) déterminant l'évolution du module de vitesse ρ' qu'on réécrit ici :

$$\frac{1}{\rho'^2} \frac{\bar{D}\rho'^2}{Dt} = -\bar{\sigma} \sin \zeta' = \delta.$$

Cette équation montre que $|\vec{\nabla}\rho'/\rho'|$ est important dans les régions où δ est maximal. Le chapitre 2 (cf figures 2.7 et 2.8) a montré que les maxima de δ sont bien représentés par les maxima de $\delta_{ow} = \sqrt{\bar{\sigma}^2 - \bar{\omega}^2}$ qui est une quantité dépendant de l'écoulement de base. La figure 2.8 montre effectivement que les maxima de δ_{ow} sont situés au niveau des sommets des méandres là où se trouvent les passages $D \rightarrow P$ (cf figure 4.1.b).

Au vu des arguments donnés ci-dessus, le problème de la localisation des régions de production et de destruction peut se ramener au problème de la détermination d'une quantité Q qui change de signe au niveau des passages $D \rightarrow P$, comme nous le montrons dans ce qui suit. Comme les passages $D \rightarrow P$ sont capturés par les régions où la quantité $\bar{\sigma}^2 - \bar{\omega}^2$ est maximale, et que $\Delta\bar{p} = \bar{\sigma}^2 - \bar{\omega}^2$, on en déduit que les passages $D \rightarrow P$ sont déterminés par les maxima de la pression agéostrophique de l'écoulement de référence \bar{p} . L'argument est approché puisque les maximas de $\Delta\bar{p}$ ne sont pas exactement ceux de \bar{p} mais il permet de passer à la variable \bar{p} qui est de plus grande échelle. Or, les maxima de \bar{p} sont localisés par les zéros de la quantité $\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\bar{p}$. Afin de discriminer les régions de production et de destruction, nous introduisons la quantité $Q \equiv \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\bar{p}$ qui change de signe aux passages $D \rightarrow P$. En se donnant analytiquement la forme d'un jet avec des méandres, il est facile de se rendre compte que $\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\bar{p}$ change bien de signe au niveau du sommet des méandres. Nous soulignons que le choix de la quantité Q fait est un choix particulier non unique mais pour lequel les résultats numériques de la section 4.4 se révèlent tout à fait satisfaisants. La quantité Q s'interprète physiquement comme étant une indication de l'accélération ou de la décélération de la vitesse de l'écoulement de base puisque à partir de l'équation (2.2), on obtient : $\frac{1}{2} \frac{\bar{D}\bar{u}^2}{Dt} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\bar{p} = -Q$. Plusieurs tentatives pour le choix de Q ont été testées et se sont révélées moins performantes.

4.3.3 Détails de l'algorithme

Filtrage du champ de vitesse divergent

On cherche la fonction de courant de la perturbation ψ'_{anal} telle que (i) le module du champ de vitesse associé est spatialement uniforme ($\rho' = 1$) et (ii) l'angle θ' de la perturbation de vitesse avec l'axe Ox (cf figure 2.1) est défini par la relation suivante

$$2\theta' + 2\bar{\phi} \simeq \zeta_{\pm}^r, \quad (4.13)$$

où le choix de la solution \pm sera fonction du signe de Q . Le vecteur $\vec{e}' = (\cos \theta', \sin \theta')$ défini par la relation ci-dessus n'a aucune raison d'être à divergence nulle, sa partie divergente doit donc être filtrée afin d'obtenir la fonction de courant. Le filtrage de la partie divergente s'effectue classiquement en résolvant un problème de Poisson de la forme $\Delta\psi' = f(\bar{\psi})$ mais il est bien connu que la décomposition d'un champ de vecteur en partie divergente et non divergente n'est pas unique. Nous avons suivi les idées de Jimenez et al. (1993) pour minimiser la partie à divergence non nulle de \vec{e}' dans les régions dynamiquement pertinentes en résolvant $\Delta\psi'_{anal} = f(\bar{\psi})$ pour $x \in \mathcal{E}$ et $\Delta\psi'_{anal} = 0$ pour $x \notin \mathcal{E}$, où \mathcal{E} est la région de l'espace où les vitesses de l'écoulement de base sont maximales ($|\vec{u}| > \text{seuil}$ et le seuil est choisi a priori). On doit cependant vérifier a posteriori la cohérence de l'algorithme, c'est à dire une fois qu'on aboutit à ψ'_{anal} , on calcule l'angle θ'_{anal} du vecteur vitesse associé à ψ'_{anal} et on vérifie que $\zeta'_{anal} \equiv 2\theta'_{anal} + 2\bar{\phi}$ est proche de la quantité ζ^a définie par $\zeta^a \equiv \zeta_-^r$ si $Q < 0$ et $\zeta^a \equiv \zeta_+^r$ si $Q > 0$.

Continuité de la perturbation

La connaissance de l'angle ζ_{\pm}^r définit une direction et non une orientation pour le vecteur vitesse perturbée. Le facteur 2 devant θ' dans l'équation 4.13 conduit à une solution qui n'est définie qu'à modulo π . Nous avons choisi la solution θ'_{anal} qui soit *continue en tout point de l'espace, sauf aux passages $D \rightarrow P$* , où l'angle de la composante de \vec{u}' normale à la frontière $Q = 0$ va présenter un saut de π pour représenter le changement de courbure illustré sur la figure 4.1.b. Ce choix permet de lever l'ambiguïté sur l'orientation de θ'_{anal} . Afin d'appliquer cette nouvelle contrainte et d'aboutir à une formule analytique pour θ' , il faut prendre en compte la définition de $2\bar{\phi}$, l'angle des axes de déformation avec l'axe Ox, et notamment ses passages de π à $-\pi$ qui coïncident spatialement avec les frontières $Q = 0$. Un examen des différentes régions du jet nous permet d'aboutir au choix suivant. Dans les régions où $|r| < 1$:

$$\theta^a \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}(\zeta_-^r - 2\bar{\phi}) & \text{si } Q = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \bar{p} < 0 \\ \frac{1}{2}(\zeta_+^r - 2\bar{\phi}) + \pi & \text{si } Q = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \bar{p} > 0 \end{cases}. \quad (4.14)$$

solution continue proche de la structure de la figure 4.1.b comme on le montre dans la section 4.4.

La fonction $f(\bar{\psi})$ qui définit le problème de Poisson de la section précédente correspond donc à $f(\bar{\psi}) = \partial_x \sin \theta^a - \partial_y \cos \theta^a$.

4.3.4 Résumé

Le chapitre 2 montre qu'il existe deux directions privilégiées pour le vecteur vitesse perturbée, une productive qui permet à la perturbation d'extraire de l'énergie à l'écoulement de base et l'autre destructive qui permet d'en céder. Pour aboutir à l'algorithme d'initialisation, on a complété ces informations en localisant les régions de production et les régions de destruction pour les perturbations qui initialement sont de grande échelle. La quantité Q adoptée pour déterminer les régions de production et de destruction est obtenue par un raisonnement approché et n'est pas forcément unique. Enfin, afin d'aboutir à l'initialisation d'une fonction de courant, on a ensuite dû passer d'une information sur la direction du vecteur vitesse perturbée à une information sur son orientation en satisfaisant des propriétés de continuité. Le choix $\rho' = 1$ donne toutes les chances de croissance aux diverses régions de l'espace qui ne sont finalement différentes les unes des autres que par l'angle du vecteur vitesse perturbée.

Même si la contrainte diagnostique de la non divergence du vecteur vitesse perturbée avait été utilisée de manière indirecte pour aboutir à l'approximation de la pression, les deux équations centrales du chapitre 2 étaient prognostiques et découlaient de l'équation du mouvement linéarisée. La contrainte de la non divergence du vecteur vitesse perturbée joue un rôle important dans l'algorithme d'initialisation et intervient deux fois. Elle intervient la première fois localement pour déterminer les régions de production et de destruction et la deuxième fois de manière globale pour résoudre le problème elliptique et aboutir à la fonction de courant.

4.4 Résultats numériques et comparaison des différentes méthodes de prévisions uniques

Dans le modèle quasigéostrophique déjà utilisé aux chapitre 2 et 3 et qu'on utilise aussi dans le présent chapitre, l'énergie cinétique de la première couche est dominée par le mode barotrope. C'est pourquoi le mode analytique initialisé à partir de la dynamique barotrope locale devrait être suffisant pour capturer la croissance de l'erreur. La figure 4.3 montre la structure de l'écoulement de contrôle choisi pour montrer les résultats numériques. Par

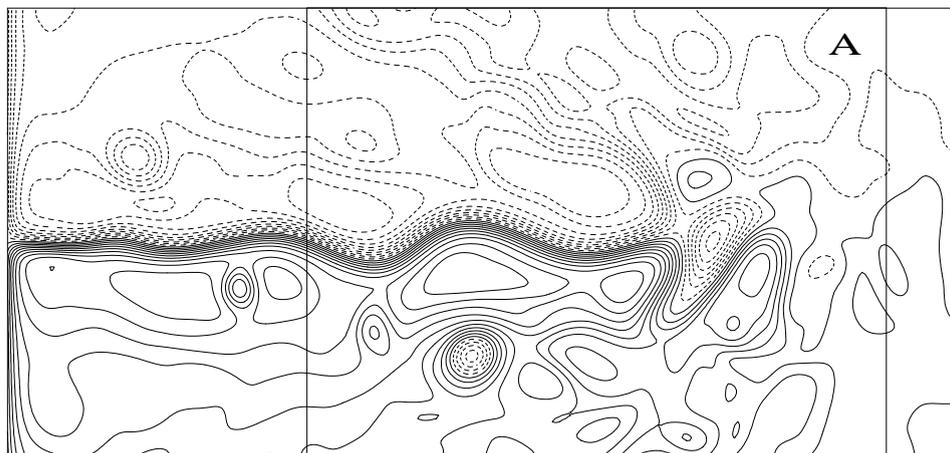


FIG. 4.3 – Zoom au niveau du jet de l'écoulement de contrôle à l'instant initial $t = 0$ (fonction de courant dans la première couche).

la suite, on étudie la croissance de l'erreur au niveau de la région A qui est la région dans laquelle l'écoulement possède les structures spatio-temporelles les plus variées. Si on avait considéré tout le bassin, la croissance de l'erreur aurait été fortement influencée par le point selle critique le long du bord ouest qui sépare les deux gyres et la croissance de l'erreur aurait été à grande échelle. L'influence du point selle critique est déterminante lorsque le jet est court et lorsque l'écoulement possède peu de tourbillons isolés ; c'est le cas dans lequel se place les articles de Jiang et al. (1995), Dijkstra et Katsman (1997) et de Simonnet et al. (2002). L'écoulement de notre modèle est lui caractérisé par un jet qui se prolonge loin devant vers le bord est et présente divers types de méandres et de tourbillons à méso-échelle dans la région A. Cette région possède ainsi plusieurs sous-domaines instables de même poids permettant d'aboutir à une variété spatio-temporelle de comportement de la croissance de l'erreur plus riche et se situant à méso-échelle (dans la définition océanographique du terme).

4.4.1 Structures initiales des différentes perturbations

Perturbation aléatoire

La figure 4.4 montre la structure de la fonction de courant d'une perturbation aléatoire au niveau du jet. Cette perturbation aléatoire a été initialisée à partir de la méthode de Monte-Carlo décrite dans l'appendice D de l'article II (annexe A). La structure aléatoire obtenue est de plus grande échelle que celle des méandres de l'écoulement de base et elle remplit l'espace.

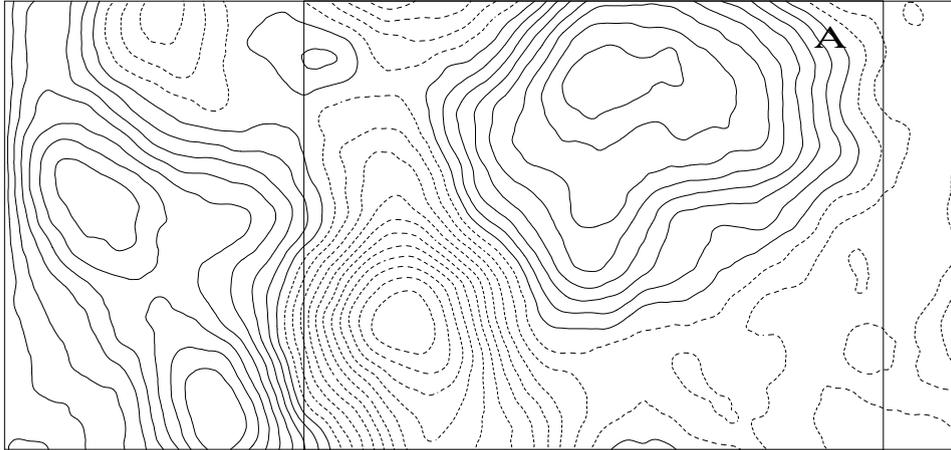


FIG. 4.4 – Zoom au niveau du jet de la fonction de courant d'une perturbation initialisée aléatoirement à $t = 0$ jour.

Vecteurs singuliers

On note respectivement ψ_{SV}^{et} , ψ_{SV}^{ens} et ψ_{SV}^{palens} , les fonctions de courant des premiers vecteurs singuliers de la norme de l'énergie totale, de l'enstrophie potentielle et de la palenstrophie potentielle optimisant la croissance entre $t=0$ et $t=10$ jours. Elles sont représentées sur les figures 4.5.a-c. Le vecteur singulier optimisant la palenstrophie (4.5.c) est plus de grande échelle que celui optimisant l'enstrophie (4.5.b) qui est lui-même de plus grande échelle que celui optimisant l'énergie totale (4.5.a). Comme on l'a montré analytiquement dans la section 4.2.1, plus le vecteur singulier optimise une norme de petite échelle, plus il est de grande échelle. Le vecteur singulier de l'énergie totale ψ_{SV}^{et} est à la fois de petite échelle et à la fois très localisé en amont de la région A dont il va optimiser l'erreur. D'autre part, le long du jet, les isolignes de la fonction de courant de ψ_{SV}^{et} ont tendance presque en chaque point à avoir l'inclinaison opposée au cisaillement. ψ_{SV}^{et} possède donc beaucoup plus de structures productives que de structures destructives. Sa structure est très similaire au vecteur singulier de l'énergie totale de Moore et Mariano (1999).

Les vorticités potentielles des premiers vecteurs singuliers de la norme de l'enstrophie potentielle et de la palenstrophie potentielle, notées respectivement q_{SV}^{ens} et q_{SV}^{palens} sont montrées sur les figures 4.6.a-b. On remarque que q_{SV}^{ens} (4.6.a) est assez similaire à la structure ψ_{SV}^{et} (4.5.a) (pas au niveau de la localisation spatiale mais au moins au niveau de l'échelle et de la forme des structures autour du jet). De même, ψ_{SV}^{ens} (4.5.b) est similaire à q_{SV}^{palens} (4.6.b). Ces correspondances sont cohérentes avec le raisonnement de la fin de la section 4.2.1 ; pour des temps d'optimisation longs, si la matrice $\mathbf{R}^*(T)$ représente l'ad-

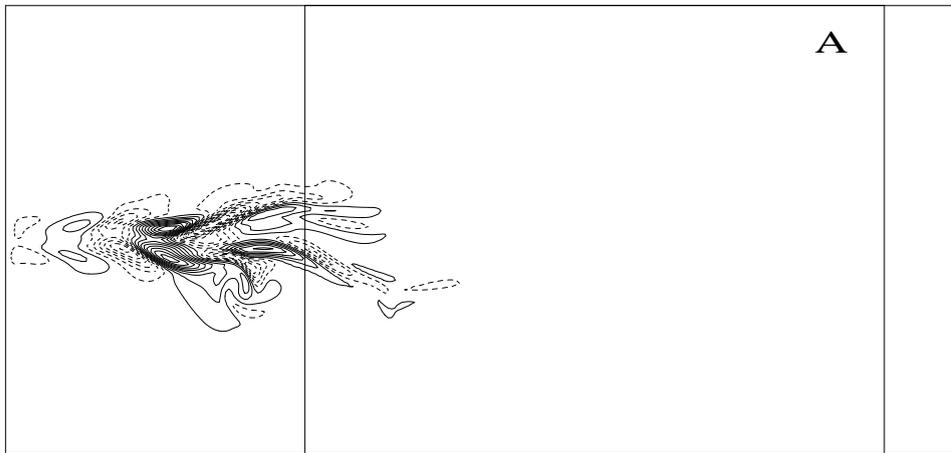
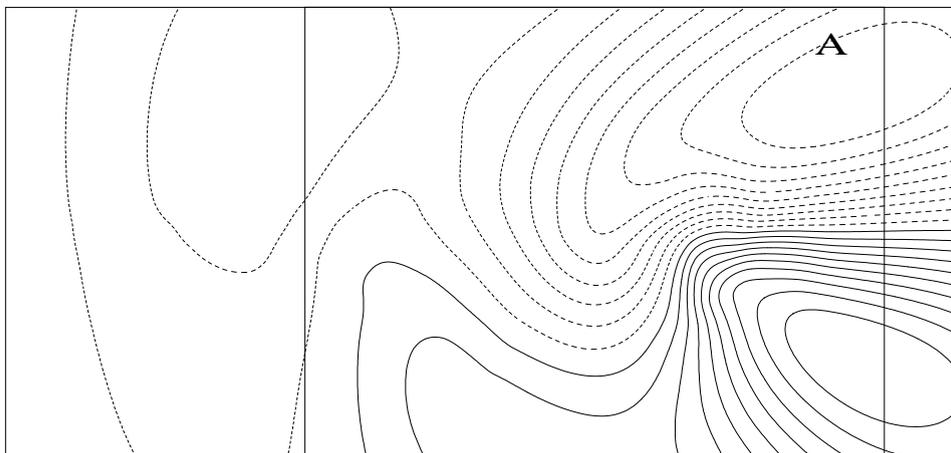
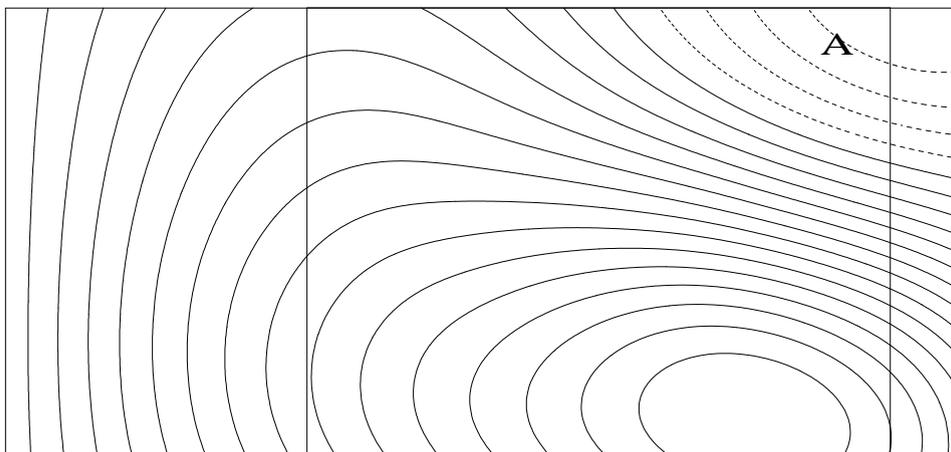
(a) ψ_{SV}^{et} (b) ψ_{SV}^{ens} (c) ψ_{SV}^{palens}

FIG. 4.5 – Zoom au niveau du jet des structures initiales des fonctions de courant des premiers vecteurs singuliers optimisant la croissance entre $t = 0$ et $t = 10$ jours pour les normes de : (a) l'énergie totale, (b) l'enstrophie potentielle (c) et la palenstrophie potentielle.

jointe de la résolvante pour l'énergie totale alors son vecteur propre est le vecteur singulier de l'énergie totale ($\psi'^* = \psi_{SV}^{et}$). Afin d'obtenir le vecteur singulier de l'enstrophie, on a la relation suivante $\psi_{SV}^{ens} = \mathbf{S}^{-1}\psi_{SV}^{et}$ où \mathbf{S} est l'opérateur tridimensionnel qui fait passer de la fonction de courant à la vorticité potentielle. Donc, pour les temps d'optimisation longs, q_{SV}^{ens} devrait tendre vers ψ_{SV}^{ens} . Le même raisonnement permet de comprendre la correspondance de structure entre ψ_{SV}^{ens} et q_{SV}^{palens} mais dans ce cas la matrice de changement de norme est l'opérateur laplacien bidimensionnel.

"Bred modes"

La figure 4.7 montre l'exemple d'une perturbation à $t = 0$ qui a évolué entre $t = -10$ jours et $t = 0$.   $t = -10$ jours, elle a été initialis e avec une perturbation aléatoire. Elle est largement différente des trois vecteurs singuliers. Pour cette perturbation, l'angle ζ' est proche de l'angle ζ_-^r ou de l'angle ζ_+^r d'après les résultats du chapitre 2. On remarque que son énergie n'est pas également répartie le long du jet mais qu'elle a une structure semblable à celle du schéma de la figure 4.1.b au niveau des méandres du jet. Au niveau des tourbillons, en particulier celui situé dans le quart sud-ouest de la région A de la figure 4.3 de l'écoulement de base, le "bred mode" a une structure en dipôle.

Mode analytique

La figure 4.8 montre le résultat de l'algorithme décrit dans la section 4.3 correspondant au mode analytique. On vérifie d'abord (figure 4.8.a) que l'angle ζ^a qu'on voulait initialiser est bien proche statistiquement de celui qu'on initialise effectivement (ζ_{anal}) puisque la densité de probabilité de l'angle $\zeta^a - \zeta_{anal}$ a un pic important à l'origine. L'algorithme mis en place dans la section 4.3 est donc valide. D'autre part, on visualise sur la figure 4.8.b la fonction de courant ψ_{anal} obtenue avec notre algorithme. On voit bien la similarité de structures entre la figure 4.7 et la figure 4.8.b; les deux fonctions de courant perturb es sont caract ris es par une alternance de maxima et de minima au coeur du jet. Cette caractéristique est cohérente avec ce qu'on observait à la fin du chapitre 3 (cf section 3.5.4) : il existe un décalage spatial entre la valeur d'une quantité \bar{s} de l'écoulement de contrôle et sa valeur s' pour la perturbation. Nous venons de noter que les maxima de ψ' sont localisés dans les régions où $|\vec{u}|$ est fort (le coeur du jet est une région de maximum de $|\vec{u}|$) alors que dans le chapitre 3 on avait noté la correspondance entre les maxima de u' et ceux de la norme de $\nabla\vec{u}$. Les structures du mode analytique et du "bred mode" sont bien distinctes de la structure de la fonction de courant du premier vecteur singulier pour l'énergie totale (figure 4.5.a) dont les maxima sont de part et d'autre du

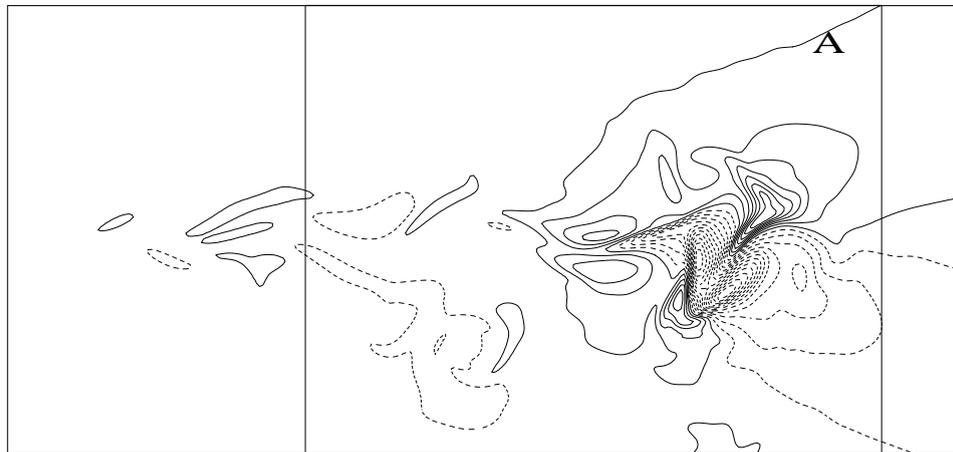
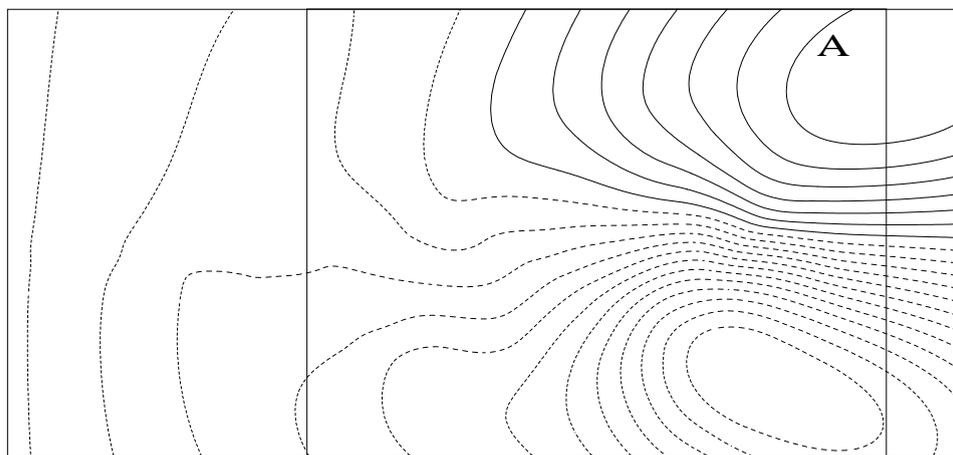
(a) q_{SV}^{ens} (b) q_{SV}^{palens}

FIG. 4.6 – Zoom au niveau du jet des structures initiales de la vorticité potentielle des premiers vecteurs singuliers optimisant la croissance entre $t = 0$ et $t = 10$ jours pour les normes de : (a) l'enstrophie potentielle (b) et la palenstrophie potentielle.

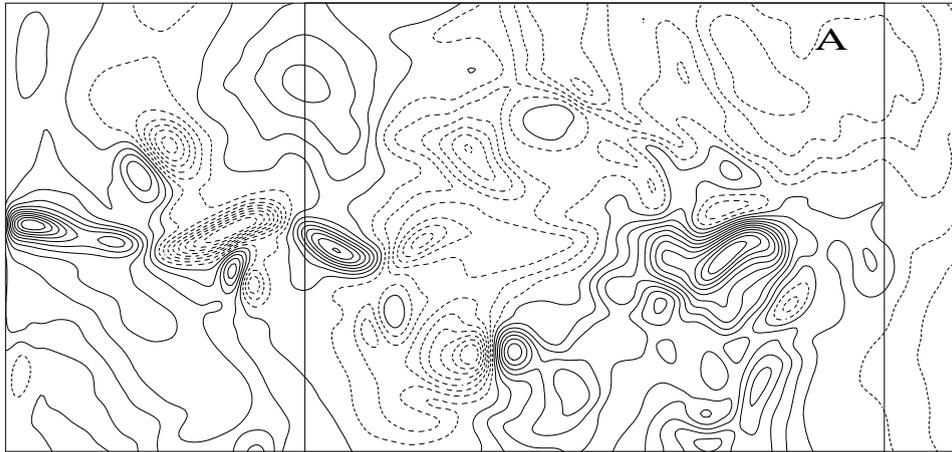


FIG. 4.7 – Zoom au niveau du jet d'un "bred mode" simulé à l'instant initial $t = 0$: fonction de courant à $t = 0$ d'une perturbation initialisée aléatoirement à $t = -10$ jours et qui a évolué jusqu'à $t = 0$.

coeur du jet. Au niveau du jet encore, la structure du mode analytique a comme distance caractéristique la distance entre deux sommets consécutifs de méandres et les passages $D \rightarrow P$ sont placés aux sommets des méandres comme prévu par l'argumentation de la section 4.3. Au niveau des tourbillons, il y a aussi des similarités entre la figure 4.7 et la figure 4.8.b puisque toutes les deux sont caractérisées par des structures dipolaires de la perturbation. Mais contrairement au "bred mode", le mode analytique est d'amplitude spatialement homogène à l'intérieur d'un seuil en énergie de l'écoulement de base. Ceci vient de notre choix d'initialiser le mode analytique avec une perturbation de vitesse de module 1 en chaque point où $|\vec{u}| > |\vec{u}|_{max}/7$. Il y a donc de fortes similarités de structures entre le "bred mode" et le mode analytique à la différence près que le mode analytique, lui, remplit l'espace à l'intérieur d'un seuil prescrit. Sur la figure 4.8.c, les régions en noir représentent les régions où $|\vec{u}| > |\vec{u}|_{max}/7$; dans ces régions, on a initialisé statistiquement l'angle ζ^a , et en dehors de ce seuil, le mode analytique a très peu d'énergie (cf figure 4.8.b). On a vu que le mode analytique est bien distinct du vecteur singulier de l'énergie totale mais il est bien évidemment très distinct des deux autres vecteurs singuliers (enstrophie et palenstrophie) qui sont de grande échelle. *Le mode analytique est donc plus proche de la structure d'un "bred mode" que celle d'un vecteur singulier quelle que soit la norme choisie.*

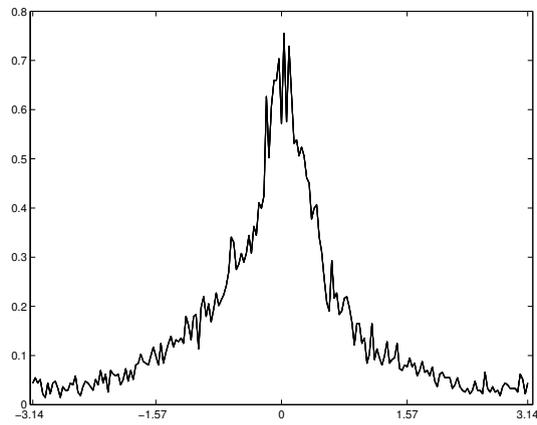
(a) pdf de $\zeta^a - \zeta_{anal}$ (b) ψ_{anal} (c) seuil $|\vec{u}| > |\vec{u}|_{max}/7$

FIG. 4.8 – Caractéristiques du mode analytique ψ_{anal} à l'instant initial : (a) densité de probabilité de $\zeta^a - \zeta_{anal}$ dans les régions où $|\vec{u}| > |\vec{u}|_{max}/7$, (b) zoom au niveau du jet de la fonction de courant ψ_{anal} dans la première couche et (c) zoom au niveau du jet des régions où $|\vec{u}| > |\vec{u}|_{max}/7$ qui sont localisées en noir.

4.4.2 Localisation spatiale de l'erreur

A l'instant initial, chaque perturbation est normalisée de telle façon qu'elle représente 10% d'erreur pour la norme de l'énergie cinétique. On les ajoute chacune à l'écoulement de contrôle et on effectue les simulations du code non linéaire des différents écoulements perturbés pour obtenir la structure des différentes perturbations à $t = 10$ jours. Les champs d'erreur d'énergie cinétique obtenus avec les 3 méthodes sont intercomparés entre eux et on les confronte au champ d'erreur moyenné à l'aide d'un ensemble de perturbations initialisées aléatoirement (méthode de Monte-Carlo). On se focalise sur la localisation spatiale de l'erreur afin d'identifier les régions de l'espace où l'erreur a crû le plus.

L'erreur moyenne calculée par la méthode de Monte-Carlo est définie comme la racine carrée de la moyenne de l'énergie cinétique K' . Elle est donc définie, comme dans le chapitre 3, par $F_{MC}(K') \equiv \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i K'_i}$, où K'_i est l'erreur d'énergie cinétique pour une perturbation aléatoire i , et $N = 100$. On note respectivement $F_{anal}(K')$, $F_{SV_{et}}(K')$, $F_{SV_{ens}}(K')$ et $F_{SV_{palens}}(K')$ l'erreur en énergie cinétique obtenue avec le mode analytique, le vecteur singulier de l'énergie totale, le vecteur singulier de l'enstrophie et celui de la palenstrophie. Les différents diagnostics d'erreur dans la région A sont représentés sur la figure 4.9. L'erreur moyenne obtenue par la méthode de Monte-Carlo est montrée sur la figure 4.9.a. Ses maxima sont localisés le long du jet, en bout de jet et autour des tourbillons isolés. A l'évidence, l'erreur en énergie cinétique diagnostiquée par $F_{SV_{et}}(K')$ (figure 4.9.b) est très localisée dans la partie ouest de la région A et représente mal l'erreur obtenue par la moyenne de Monte-Carlo (figure 4.9.a). L'erreur diagnostiquée par $F_{SV_{ens}}(K')$ (figure 4.9.c) est concentrée en bout de jet mais les maxima locaux dans cette partie ne correspondent pas forcément aux maxima de l'erreur moyenne (figure 4.9.a). Le vecteur singulier pour la palenstrophie induit un champ d'erreur (figure 4.9.d) qui correspond bien en bout de jet et au niveau du tourbillon isolé à l'erreur moyenne de Monte-Carlo (figure 4.9.a) mais le long du jet il représente mal les maxima de l'erreur moyenne. L'erreur créée par l'évolution du mode analytique (figure 4.9.e) diagnostique les maxima de l'erreur moyenne au niveau du jet, au niveau du tourbillon isolé mais moins bien en bout de jet. Afin de comparer quantitativement les différents diagnostics d'erreur entre eux, on définit la corrélation de chaque diagnostic avec l'erreur moyenne de Monte-Carlo.

$$C(j) = \frac{\iint_A F'_j(K') \cdot F'_{MC}(K')}{\sqrt{\iint_A F'^2_j(K') \cdot \iint_A F'^2_{MC}(K')}} \quad (4.17)$$

où les quantités avec des primes sont les déviations des quantités par rapport à leur moyenne sur le domaine A. La corrélation entre deux champs permet de savoir si les maxima de l'un correspondent plus ou moins bien au maxima de l'autre. Ainsi, le calcul

des corrélations des différentes prévisions uniques d'erreur avec l'erreur moyenne de Monte-Carlo permet d'estimer quelle est la prévision unique d'erreur qui représente le mieux les maxima de l'erreur moyenne. Les corrélations des diagnostics d'erreur des vecteurs singuliers, $F_{SV_{et}}(K')$, $F_{SV_{ens}}(K')$ et $F_{SV_{palens}}(K')$ avec l'erreur moyenne valent respectivement $C(SV_{et}) = 0.48$, $C(SV_{ens}) = 0.67$, $C(SV_{palens}) = 0.75$. La corrélation du diagnostic d'erreur du mode analytique avec l'erreur moyenne est égale à $C(anal) = 0.75$. Cela confirme nos remarques précédentes puisque les deux perturbations les plus pertinentes sont le mode analytique et le vecteur singulier de la palenstrophie et que le moins bon est celui du vecteur singulier de l'énergie totale. Mais les résultats de ces modes sont-ils meilleurs que celui d'une perturbation aléatoire? Pour le savoir, il suffit de calculer la corrélation du diagnostic d'erreur induit par chaque perturbation aléatoire avec l'erreur moyenne et d'effectuer la moyenne de ces corrélations :

$$\bar{C}_{MC} = \frac{1}{N} \sum_i C(i). \quad (4.18)$$

En considérant toujours le même ensemble de Monte-Carlo qui induit l'erreur de la figure 4.9, on obtient la valeur de la corrélation moyenne $\bar{C}_{MC} = 0.67$. D'autre part, l'écart type des corrélations des 100 perturbations aléatoires vaut 0.06. On a de plus vérifié que si on augmente le nombre de perturbations aléatoires, les différentes corrélations ne changent pas à 0.01 près. Ainsi, comme les corrélations du mode analytique et du vecteur singulier de la palenstrophie valent toutes les deux 0.75 qui est significativement supérieur à $\bar{C}_{MC} = 0.67$, on en déduit que ces deux modes sont plus pertinents qu'une perturbation aléatoire. Par contre, le vecteur singulier de l'enstrophie ($C(SV_{ens}) = 0.67$) donne un résultat équivalent à une perturbation aléatoire ($\bar{C}_{MC} = 0.67$) et celui de l'énergie totale est moins bon qu'une perturbation aléatoire ($C(SV_{et}) = 0.48$). Le score du vecteur singulier de l'énergie totale est mauvais pour deux raisons : la première est qu'il est très localisé initialement et son diagnostic d'erreur à $t = 10$ jours aussi, et la seconde est qu'il est de plus petite échelle que les perturbations aléatoires qu'on a initialisées par notre méthode de Monte-Carlo.

Un autre ensemble de tests sur cet écoulement de contrôle a été effectué; il s'agit de comparer les résultats des diagnostics d'erreur obtenus par une prévision unique d'un "bred mode" avec l'erreur moyenne de Monte-Carlo. Etant donné qu'il n'y a pas une hiérarchie d'importance parmi les "bred modes" (contrairement aux vecteurs singuliers), on a fait évoluer 100 "bred modes". On a ensuite calculé la corrélation moyenne des différents diagnostics d'erreur des "bred modes" avec l'erreur moyenne de Monte Carlo et on a trouvé 0.68, c'est à dire approximativement la même valeur que la corrélation moyenne \bar{C}_{MC} des perturbations aléatoires. Un "bred mode" ne donne pas un diagnostic

plus pertinent qu'une perturbation aléatoire ; ceci est sans doute dû au fait qu'initialement les "bred modes" sont localisés à certains endroits de l'espace. Dans nos tests on ne donne pas toutes les chances de performance aux "bred modes" puisqu'on suppose une erreur initiale spatialement homogène. Dans la réalité des prévisions météorologiques, on dispose de peu d'informations sur la localisation de l'erreur d'analyse. Toth et Kalnay (1997) soulignent que l'erreur d'analyse a de fortes chances d'être localisée dans les régions où l'erreur a crû dans le passé. Ceci montre que la corrélation 0.75 du mode analytique n'est donc pas triviale à obtenir : il ne suffit pas d'initialiser une perturbation longtemps dans le passé pour obtenir ce score.

Les résultats des corrélations ont été effectués pour un écoulement de contrôle en particulier. Il est donc logique de vouloir confirmer ces résultats par une statistique sur différents écoulements de contrôle et aussi pour essayer de discriminer quelle perturbation est la plus pertinente. Sur la figure 4.10, on montre les résultats pour 10 écoulements de contrôle. La première remarque est que le vecteur singulier de l'énergie totale ne donne jamais une bonne corrélation puisque la courbe verte ($C(SV_{et})$) est largement en dessous de la courbe noire (\overline{C}_{MC}). Ceci s'explique par le fait qu'il est très localisé initialement alors qu'une perturbation aléatoire initialisée par notre méthode de Monte-Carlo remplit l'espace. Ainsi SV_{et} n'est pas pertinent pour ce diagnostic sur la distribution spatiale de l'erreur. Contrairement à SV_{et} , les deux autres vecteurs singuliers remplissent tout l'espace du bassin. Si on effectue la moyenne des diverses corrélations sur les 10 écoulements (notée $\langle . \rangle$), on trouve : $\langle \overline{C}_{MC} \rangle = 0.67$, $\langle C(SV_{ens}) \rangle = 0.72$, $\langle C(SV_{palens}) \rangle = 0.75$ et $\langle C(anal) \rangle = 0.75$. Cela signifie qu'en moyenne, on a du mal à déterminer quelle est la perturbation la plus pertinente entre $C(SV_{palens})$ et $C(anal)$. Cependant lorsqu'on observe les courbes de la figure 4.10, on remarque que systématiquement les points de la courbe en rouge sont au dessus ou au même niveau que les points marqués par les flèches. Cela signifie que la corrélation $C(anal)$ est, pour chaque écoulement de contrôle, supérieure ou égale à $\overline{C}_{MC} + e$ où e désigne l'écart type de l'ensemble de Monte-Carlo. Il y a simplement le cas de l'écoulement 3 pour lequel $C(anal)$ est légèrement inférieure à $\overline{C}_{MC} + e$ mais $C(anal)$ est tout de même supérieure à la corrélation moyenne \overline{C}_{MC} . Ainsi, le mode analytique est pertinent pour chaque écoulement de contrôle. Les corrélations des vecteurs singuliers de l'enstrophie et de la palenstrophie même si elles peuvent être plus élevées que $C(anal)$ pour certains écoulements de contrôle, ne sont pas systématiquement supérieures à la corrélation moyenne de Monte-Carlo. Par exemple, $C(SV_{ens})$ descend en dessous de la corrélation moyenne \overline{C}_{MC} pour l'écoulement 8, et $C(SV_{palens})$ est fortement en dessous pour l'écoulement de contrôle 5. La fonction de courant de l'écoulement de contrôle 5 pour lequel le vecteur singulier de la palenstrophie donne une mauvaise corrélation est montré

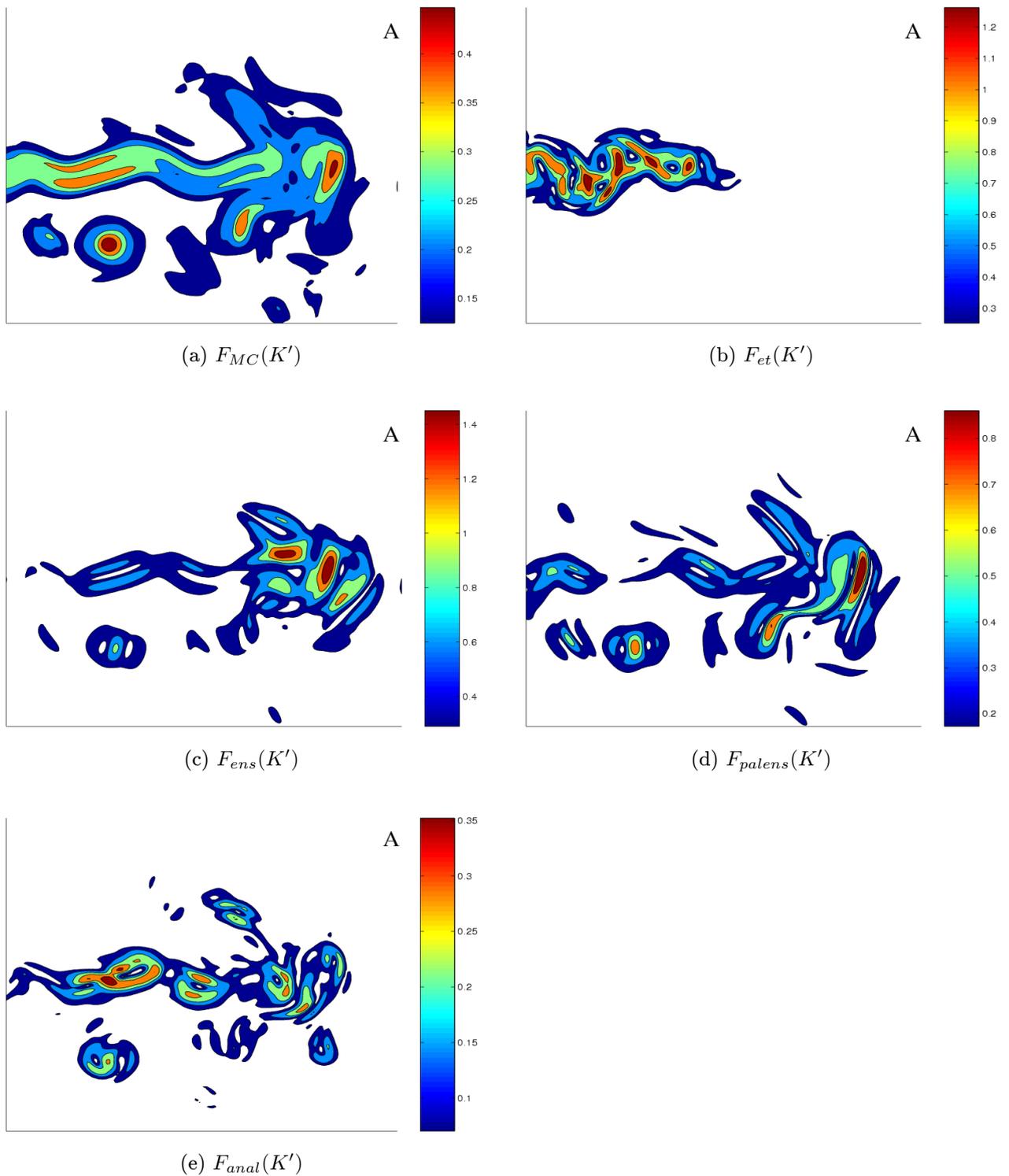


FIG. 4.9 – Localisation spatiale de l'erreur d'énergie cinétique à $t = 10$ jours dans la région A de la première couche obtenue avec (a) la moyenne d'un ensemble de Monte-Carlo (100 perturbations), (b) le premier vecteur singulier de l'énergie totale, (c) le premier vecteur singulier de l'ensrophie potentielle, (d) le premier vecteur singulier de la palenstrophie potentielle et (e) le mode analytique.

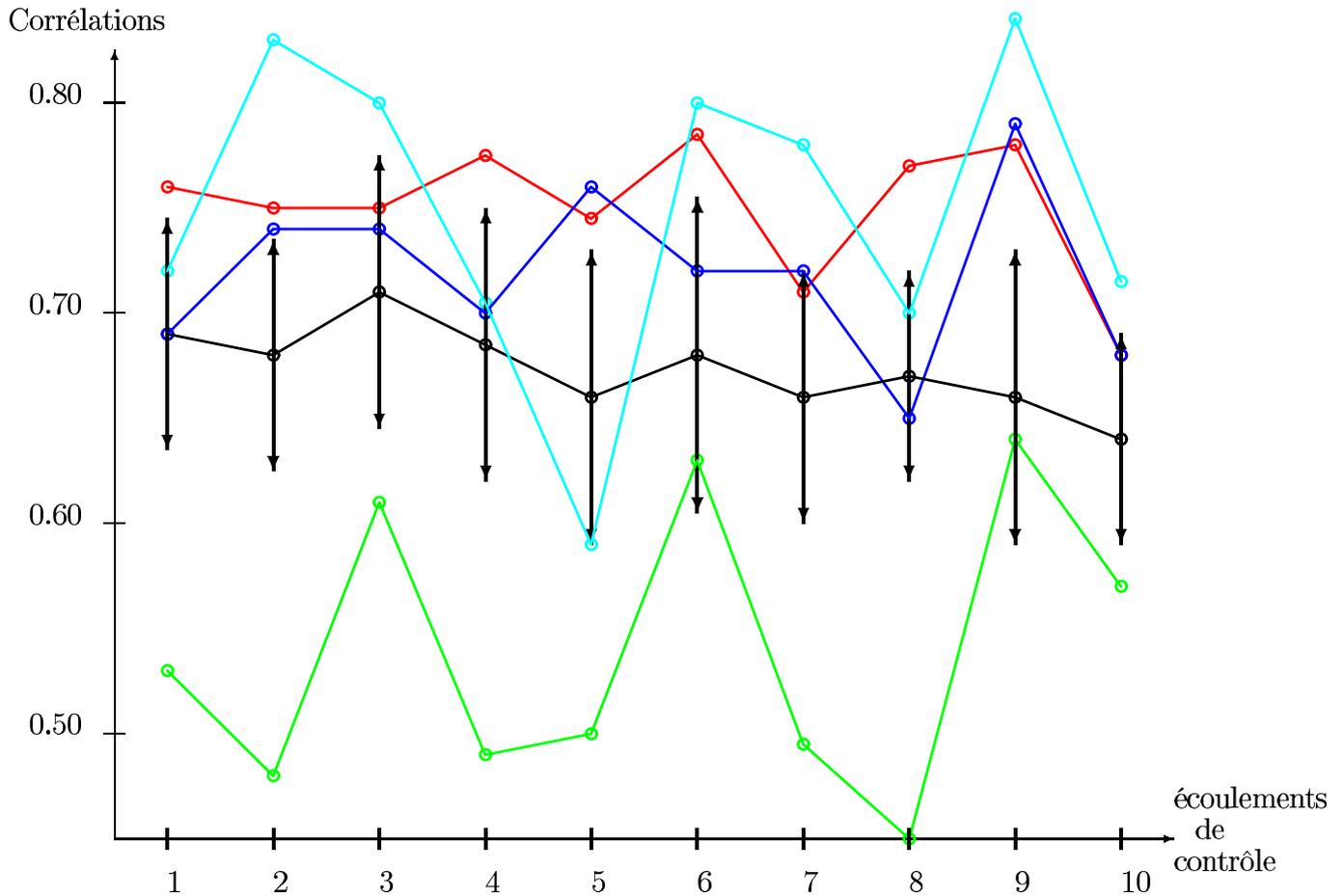


FIG. 4.10 – Corrélations de différents diagnostics d'erreur avec l'erreur moyenne de Monte-Carlo pour 10 écoulements de contrôle différents ; la courbe en noir représente la corrélation moyenne (\bar{C}_{MC}) des perturbations aléatoires avec l'erreur moyenne, la courbe en rouge est la corrélation obtenue avec le mode analytique ($C(anal)$), les courbes en vert, bleu foncé et bleu clair sont respectivement les corrélations obtenues avec les premiers vecteurs singuliers pour les norme de l'énergie totale ($C(SV_{et})$), de l'enstrophie potentielle ($C(SV_{ens})$) et de la palénstrophie potentielle ($C(SV_{palens})$). Le sommet des flèches verticales désignent pour chaque écoulement les valeurs de $\bar{C}_{MC} + e$ et $\bar{C}_{MC} - e$ où e désigne l'écart type calculé pour l'ensemble des perturbations aléatoires

sur la figure 4.11.a et la vorticité potentielle du vecteur singulier de la palenstrophie sur la figure 4.11.b. On remarque que q_{SV}^{palens} a une structure dipolaire qui n'est pas centrée sur le jet ; plus précisément, ses isolignes les plus resserrées se trouvent au sud du jet alors que pour l'écoulement de contrôle de la figure 4.3 les isolignes les plus resserrées de q_{SV}^{palens} (cf figure 4.6) sont centrées sur le jet. Ce décentrage de la structure dipolaire de q_{SV}^{palens} par rapport au jet dans le cas de l'écoulement de contrôle 5 illustre pourquoi au bout du compte il induit une corrélation faible. Pour définitivement conclure sur la perturbation la plus pertinente, il faudrait augmenter le nombre d'écoulements de contrôle, et vérifier ces résultats dans un autre modèle. Ce dont on est sûr cependant, *c'est que le mode analytique donne un résultat significatif au moins du même ordre sinon meilleur que les premiers vecteurs singuliers de l'enstrophie et de la palenstrophie.*

Le bon résultat du mode analytique est-il effectivement dû à la dynamique locale de l'angle ζ' ou simplement dû au choix $\rho' = 1$? Pour valider la pertinence de l'algorithme initialisant le mode analytique et notamment la pertinence de la dynamique de l'angle, des contre-exemples ont été testés. Le contre-exemple suivant a été effectué pour plusieurs écoulements de contrôle : on a initialisé une perturbation en choisissant l'angle optimal instantané $\zeta^a = -\pi/2$ à la place de l'angle le plus probable ζ_{\pm}^r . Le diagnostic d'erreur obtenu avec cette perturbation donne des corrélations du niveau d'une perturbation aléatoire, ce qui prouve l'importance de l'angle ζ^a qu'on doit inclure dans l'algorithme et donc l'importance de la dynamique de l'angle mise en évidence dans les chapitres précédents. D'autres contre-exemples ont été testés et montrent que chaque étape de l'algorithme est importante, que ça soit l'étape de l'angle ou celle de la continuité.

Revenons rapidement sur les notions de croissance transitoire et croissance durable qui sont souvent utilisées pour comparer la croissance des vecteurs singuliers et celle des "bred modes". Pour la croissance de l'erreur montrée sur la figure 4.9, nous avons calculé l'amplification de l'énergie cinétique dans la région A des différents types de perturbations entre $t = 0$ et $t = 10$ jours. Nous avons obtenu le résultat suivant : l'amplification des vecteurs singuliers de l'énergie totale, de l'enstrophie potentielle et de la palenstrophie potentielle valent respectivement 206, 20 et 8.5. La forte amplification de l'énergie totale est normale puisqu'il est très proche du vecteur singulier de l'énergie cinétique. Si on fait une moyenne des amplifications des perturbations aléatoires, on trouve une amplification moyenne de l'ordre de 10. De l'autre côté, l'amplification du mode analytique vaut 3.5 et est à peu près égal à l'amplification moyenne des "bred modes". Ces résultats s'interprètent de la façon suivante : des effets transitoires de croissance sont présents dans les simulations de Monte-Carlo, ce qui est logique puisque initialement les perturbations aléatoires ne sont pas en équilibre avec l'écoulement de référence. Ces effets transitoires sont capturés

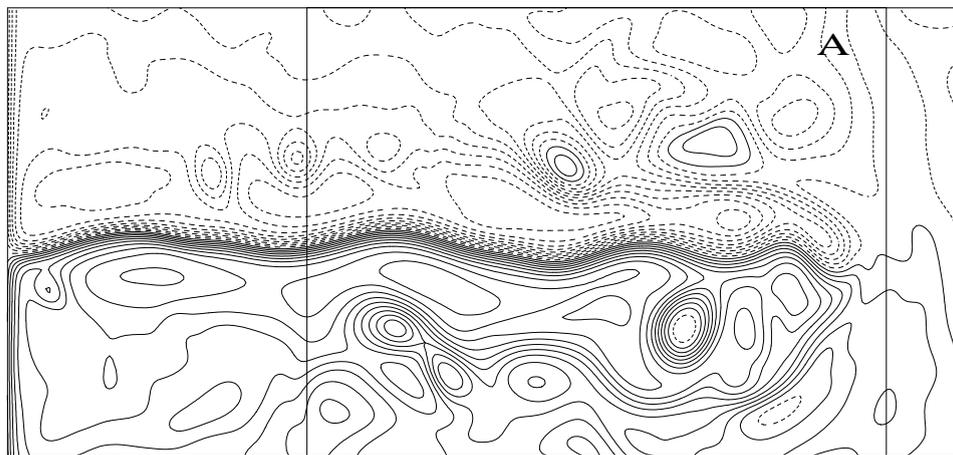
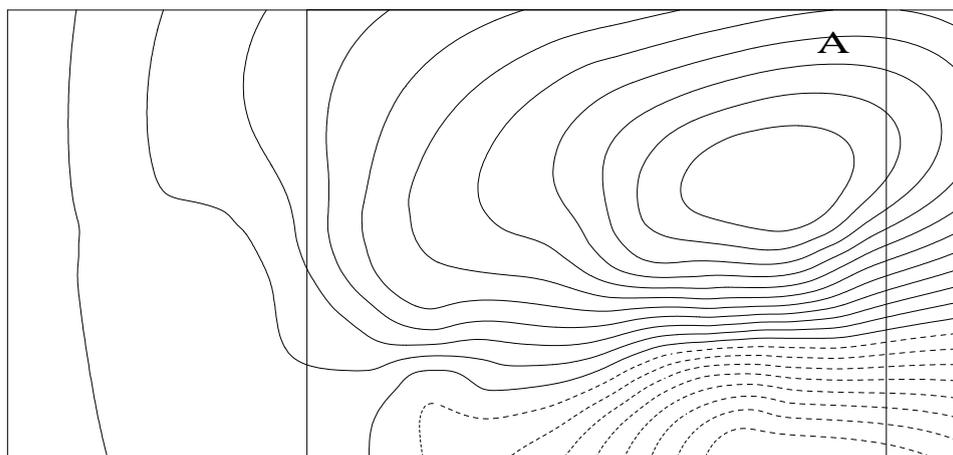
(a) $\bar{\psi}$ (b) q_{SV}^{palens}

FIG. 4.11 – Caractéristiques de l'écoulement 5 ; (a) zoom au niveau du jet de la fonction de courant de l'écoulement 5 et (b) zoom au niveau du jet de la vorticité potentielle du premier vecteur singulier pour la norme de la palenstrophie.

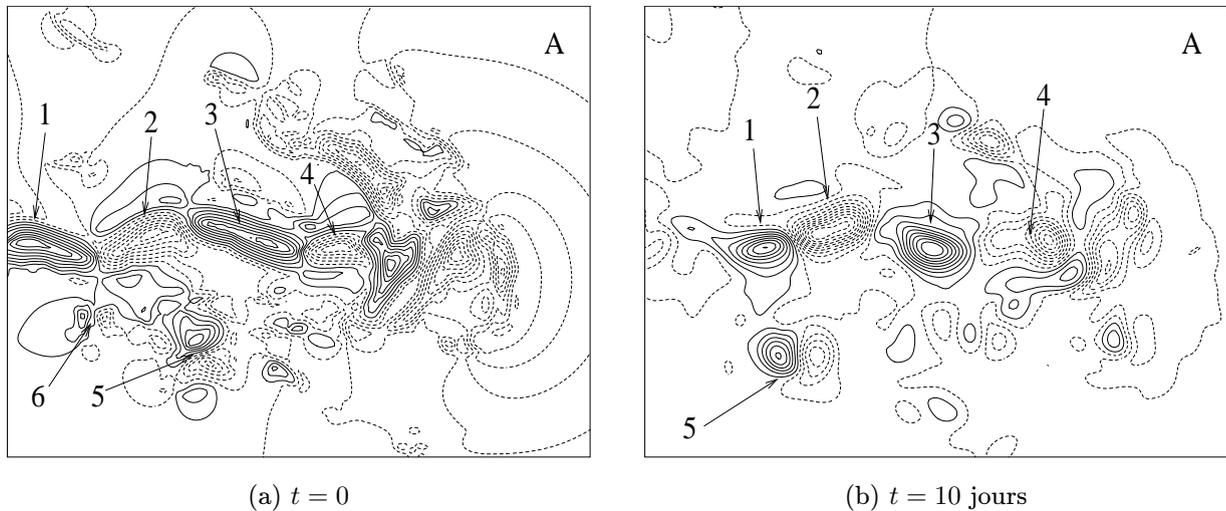


FIG. 4.12 – Evolution de la fonction de courant du mode analytique dans la région A ; (a) structure à l'instant initial $t = 0$ et (b) structure après 10 jours d'évolution.

et parfois largement amplifiés par les vecteurs singuliers mais par contre ils ne sont pas présents ni pour le mode analytique et ni pour les "bred modes". Ces deux derniers types de perturbations sont donc caractéristiques d'une croissance durable. Afin d'illustrer le caractère de croissance durable du mode analytique, la figure 4.12 montre l'évolution de la fonction de courant du mode analytique entre $t = 0$ et $t = 10$ jours. La succession des pôles positifs et négatifs au coeur du jet à $t = 0$ (cf les pôles numérotés 1,2,3,4 sur la figure 4.12.a) est toujours présente 10 jours après (cf les pôles 1,2,3,4 de la figure 4.12.b). Les pôles évoluent avec les méandres et sont légèrement advectés vers l'est par l'écoulement de base. De même, la structure dipolaire numérotée 5 sur la figure 4.12.a correspondant à un tourbillon de l'écoulement de base se retrouve 10 jours après au niveau de ce même tourbillon mais qui a migré vers le bord ouest (cf la structure dipolaire 5 sur la figure 4.12.b). Par contre la structure numérotée 6 sur la figure 4.12.a a disparu après 10 jours d'évolution. Les structures du mode analytique les plus énergétiques sont globalement persistentes, elles sont caractérisées à la fois par l'équilibre de l'angle (ζ') et à la fois par la croissance du module de la perturbation de vitesse (ρ'). Le mode analytique caractérise donc bien une croissance durable de la perturbation.

Cette conclusion est-elle cohérente avec celles du chapitre 2? Dans le cas particulier du mécanisme étudié par Orr, notre approche met en évidence une interaction transitoire, non modale, alors que dans le cas présent les mêmes diagnostics sont caractéristiques d'une croissance durable et non plus transitoire. La contradiction apparente vient du caractère trop simplifié de l'écoulement spatialement homogène considéré par Orr alors

que dans le cas d'un écoulement plus complexe, l'effet transitoire est uniquement local : *en suivant une particule lagrangienne, il y a une succession de croissances et de décroissances transitoires locales de la perturbation, qui au bout du compte conduit à une croissance durable et globale des perturbations.* Notre approche locale des chapitres 2 et 3 permet donc également d'expliquer la croissance globale et durable des perturbations dans les écoulements spatialement et temporellement complexes.

4.5 Discussion

Dans le cas des écoulements quasigéostrophiques, une nouvelle méthode pour diagnostiquer la croissance de l'erreur initiale a été mise en place dans ce chapitre en faisant évoluer une perturbation initialisée à partir d'un critère analytique. Ce critère analytique repose sur deux contraintes. La première est liée à la dynamique de croissance locale barotrope analysée au chapitre 2 via la conversion d'énergie cinétique de l'écoulement de base vers la perturbation. Cette dynamique est caractérisée par des régions où la perturbation extrait effectivement de l'énergie cinétique à l'écoulement de base (régions de production) et par des régions où elle en cède (régions de destruction). Ces deux types de régions sont associées à deux directions privilégiées des isolignes de la fonction de courant de la perturbation connues a priori mais la dynamique étudiée au chapitre 2 ne donne pas d'information sur la localisation de ces régions. *La deuxième contrainte qui permet de lever l'ambiguïté production/destruction n'est pas de nature dynamique mais repose sur la relation diagnostique de non divergence du vecteur vitesse perturbée \vec{u} .* En suivant des arguments qualitatifs à partir de cette relation diagnostique, on a montré que la localisation spatiale des régions de production et de destruction est reliée au signe de la quantité $Q = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \bar{p}$. *La cohérence de l'algorithme d'initialisation a été vérifiée a posteriori puisque les directions des isolignes de la fonction de courant de la perturbation initialisée correspondent effectivement aux directions privilégiées étudiées au chapitre 2.*

Un point important de ce chapitre est de montrer que *le mode analytique initialisé à l'aide de notre algorithme possède les propriétés des perturbations qui ont crû dans le passé, il est donc plus proche d'un "bred mode" que d'un vecteur singulier. En ce sens, il est caractérisé par une croissance durable et non pas transitoire.*

Afin d'évaluer la performance de notre méthode, on l'a comparée aux résultats des méthodes classiques des vecteurs singuliers et des "bred modes". Comme notre diagnostic d'erreur ne repose pas sur une prévision d'ensemble mais sur une prévision unique, on a comparé son résultat à d'autres prévisions uniques. Finalement, en prenant comme diagnostic la localisation spatiale de l'erreur, on a montré que notre prévision unique re-

présentait bien le champ d'erreur moyen d'énergie cinétique obtenu avec une technique de Monte-Carlo. On a vérifié que pour dix écoulements de contrôle choisis aléatoirement à différents instants dans notre modèle, la prévision du mode analytique donne un résultat significativement meilleur qu'une perturbation aléatoire dans les cas étudiés. Pour ce diagnostic, la performance du vecteur singulier optimisant l'énergie totale n'est pas bonne en raison de son caractère trop fortement localisé spatialement. Celle du vecteur singulier de l'enstrophie donne un résultat non systématiquement pertinent et le vecteur singulier le plus pertinent est celui de la palenstrophie. En moyenne, il obtient un score semblable à celui du mode analytique. Le choix de la norme la plus pertinente dans la méthode des vecteurs singuliers est assez difficile comme le soulignent Snyder et Joly (1998) et dépend des critères pris en compte ; dans le cas particulier de la localisation spatiale de l'erreur la norme la plus pertinente semble être la palenstrophie d'après nos résultats. En analysant les résultats de chaque écoulement pris séparément, le vecteur singulier de la palenstrophie conduit cependant à des scores plus contrastés que celui du mode analytique et on ne peut pas dire, contrairement au mode analytique, qu'il est systématiquement performant. Avec nos résultats, on ne peut pas trancher quant au mode le plus pertinent, on peut cependant affirmer que le mode analytique donne un score au moins aussi bon que la prévision unique de n'importe quel premier vecteur singulier. On a aussi montré par des contre exemples et par des simulations de "bred modes" que toutes les étapes de l'algorithme d'initialisation sont nécessaires pour simuler la croissance de l'erreur en chaque point de l'espace.

La nouvelle méthode est à la fois intéressante d'un point de vue conceptuel puisqu'elle repose sur le mécanisme de croissance locale des perturbations et à la fois d'un point de vue pratique puisqu'elle a un faible coût numérique. Pour initialiser un vecteur singulier, il faut, selon la norme, 10, 20 simulations du code tangent et autant de l'adjoint, ce qui correspond à environ 20, 40 simulations du code non linéaire. L'initialisation du mode analytique cause un surcoût de calculs insignifiants.

Conclusion générale

L'objet de cette thèse a été d'aborder la compréhension de la dynamique locale de la croissance des perturbations dans les écoulements quasigéostrophiques spatialement et temporellement complexes. Cet effort de recherche est fortement motivé par des problématiques majeures de la dynamique de l'océan et de l'atmosphère. D'une part, la compréhension des phénomènes synoptiques de cyclogénèse caractérisés par un aspect fortement local de l'écoulement de base est importante en vue d'une amélioration des prévisions météorologiques des moyennes latitudes et par exemple de l'Europe de l'ouest. D'autre part, les régions de plus forte occurrence de ces phénomènes synoptiques influencent le comportement des anomalies de plus basse fréquence et l'évolution des ondes planétaires. La complexité locale de l'écoulement intervient donc pour des phénomènes physiques ayant des échelles spatio-temporelles très diverses. Or, l'effort de recherche pour mettre en évidence l'effet de la complexité locale de l'écoulement semble n'avoir véritablement commencé qu'à partir du début des années 80 avec les travaux de Frederiksen (1983), Simmons et al. (1983) et Hoskins et al. (1983). C'est d'ailleurs dans les articles de Simmons et al. (1983) et Hoskins et al. (1983) qu'on introduit les termes locaux d'extraction et la notation du vecteur \vec{E} . Ces travaux sur les observations ont ensuite motivé des études théoriques sophistiquées comme par exemple celles de Pierrehumbert (1984), Mak et Cai (1989) et Cai et Mak (1990). L'analyse locale des termes de l'équation d'évolution de l'énergie totale (Mak et Cai 1989, Cai et Mak 1990) a permis de mettre en évidence l'importance des termes d'extraction locaux barotrope et barocline. A l'heure actuelle, le terme local d'extraction barotrope est la source de plusieurs études théoriques (Mak 2002, Iacono 2002) et sert à l'interprétation de phénomènes réels de cyclogénèse analysés dans la campagne FASTEX (Kucharski et Thorpe 2001, Arbogast 2001). Ce bref historique de la littérature permet d'apprécier l'importance de l'approche choisie dans la thèse et de montrer qu'elle est d'actualité.

Dans la suite de cette conclusion, résumons l'originalité de l'approche suivie dans la thèse et les résultats nouveaux qu'elle a apportés. L'approche lagrangienne suivie trouve d'abord sa source dans des travaux récents sur les gradients de traceur (Hua et Klein

1998, Hua et al. 1998, Lapeyre et al. 1999, Klein et al. 2000), puis dans l'analogie faite par Straub (2002) entre l'équation des gradients de traceur et l'équation linéarisée des perturbations de vitesse. L'intérêt de l'approche lagrangienne est qu'elle capture l'aspect local et dépendant du temps de la dynamique des perturbations et a le mérite de simplifier les équations par rapport à l'approche eulérienne. Contrairement à la situation physique choisie par Straub (2002), l'analogie entre l'équation d'évolution des gradients de traceur et celle des perturbations de vitesse est très restreinte dans le cadre des écoulements quasi-géostrophiques, car le gradient de la pression agéostrophique perturbée est clairement non négligeable et sa structure est déterminante pour comprendre la dynamique des perturbations. *Le caractère novateur de notre travail théorique a donc été d'analyser le gradient de la pression agéostrophique perturbée, de le paramétrer et d'étudier son influence sur l'évolution des perturbations de vitesse.* Son rôle est en fait central pour déterminer l'évolution, le long d'une trajectoire lagrangienne, de l'orientation du vecteur vitesse perturbée par rapport à la structure du champ de déformation de l'écoulement de base. Selon la direction du vecteur vitesse perturbée, on est capable de dire si localement la perturbation extrait ou non de l'énergie à l'écoulement de base. Plus précisément, l'extraction locale d'énergie dépend fortement de la valeur de l'angle entre deux vecteurs \vec{E} et \vec{D} (angle noté $\pi/2 + \zeta'$), où \vec{E} dépend de la perturbation et est relié au vecteur vitesse perturbée et où \vec{D} correspond au champ de déformation de l'écoulement de base. En étudiant la dynamique de l'angle ζ' , on a pu déterminer analytiquement ses valeurs les plus probables, une fois que la perturbation atteint un certain équilibre avec l'écoulement de base. Ces valeurs sont séparées en deux couples $\zeta_{\pm}^{r_{ow}}$ et ζ_{\pm}^r dont la pertinence dépend des régions de l'espace ; le premier couple est lié aux valeurs propres du tenseur du gradient de vitesse de l'écoulement de base tandis que l'autre couple est lié aux points fixes de l'équation en ζ' et prend en compte en plus l'évolution de ce tenseur le long d'une trajectoire lagrangienne. *A partir des orientations des couples $\zeta_{\pm}^{r_{ow}}$ et ζ_{\pm}^r , on a obtenu des diagnostics analytiques du taux d'extraction exponentiel qui se sont révélés pertinents au vu des tests numériques effectués.*

On a répondu de manière qualitative à la question pourquoi l'énergie cinétique des perturbations croît globalement au cours du temps. Alors que les structures destructives sont stables et celles productives instables, deux autres facteurs permettent de contrebalancer cet effet et de favoriser la croissance de l'énergie cinétique des perturbations : d'abord l'aspect exponentiel de l'extraction favorise la production et puis la conservation de la masse contraint la perturbation de telle sorte qu'elle possède des passages de structures destructives vers des structures productives.

L'approche analytique du cas barotrope a été généralisée à la situation complexe quel-

conque où l'énergie de la perturbation peut augmenter soit par interaction barotrope, soit par interaction barocline. *On a paramétrisé l'influence de chaque terme agéostrophique perturbé, pour obtenir la structure tridimensionnelle la plus probable de la perturbation à partir du champ de déformation horizontal et du cisaillement vertical de l'écoulement de base. Cette structure nous donne des diagnostics analytiques fiables de l'extraction d'énergie totale dans les écoulements quasigéostrophiques quelconques.*

Les chapitres 2 et 3 de la thèse ont montré qu'après un intervalle de temps fini, la perturbation se met sous une forme spécifique par rapport à l'écoulement de base et qu'elle peut être déterminée a priori. Les indices de croissance mis en évidence dans ces deux chapitres ont un caractère à la fois local et instantané. *Le but du quatrième chapitre a été de réconcilier le caractère local et instantané des chapitres 2 et 3 avec une approche de croissance globale des perturbations pendant un temps fini.* A partir du critère d'extraction barotrope du chapitre 2 et à partir de l'équation de la conservation de la masse, on est parvenu à initialiser une perturbation dont l'énergie est homogène spatialement et dont toute la structure repose sur la dynamique lagrangienne de l'angle ζ' . A partir d'un critère lagrangien, on est donc parvenu à initialiser une perturbation en chaque point de l'espace ce qui établit un pont entre le point de vue eulérien et lagrangien. *On a montré que la structure du mode analytique est initialement plus proche d'un bred mode que celle d'un vecteur singulier et que son évolution est caractérisée par une croissance durable.* L'évolution du mode analytique simule correctement, en termes de distribution spatiale, l'erreur moyenne obtenue par une méthode de Monte-Carlo.

Après avoir résumé les résultats des différents chapitres, nous explicitons maintenant les différentes améliorations possibles :

- En suivant les résultats de Lapeyre et al. (1999), le couple ζ_{\pm}^r aurait dû être plus pertinent que le couple $\zeta_{\pm}^{r_{ow}}$. Cependant, et c'est ce qui montre la difficulté supplémentaire par rapport aux gradients de traceur, l'équation d'orientation du vecteur vitesse perturbée n'est pas exacte puisqu'elle dépend de l'approximation de la pression agéostrophique perturbée. Si on effectuait une approximation plus fine de la pression agéostrophique perturbée expliquerait peut-être les bonnes performances du couple $\zeta_{\pm}^{r_{ow}}$ dans certaines régions. L'approximation des autres termes agéostrophiques perturbés du chapitre 3 pourrait être aussi améliorée.

- Les diagnostics de croissance du chapitre 3 reposent sur la partie cinématique de l'écoulement de base. La prise en compte de son accélération conduirait à une généralisation dans le cas tridimensionnel de la structure horizontale associée au paramètre r .

- Afin de consolider les déductions faites au chapitre 3 concernant l'interaction entre le champ de déformation horizontal de l'écoulement de base et son cisaillement vertical, nous

pourrions tester notre approche dans le cas d'un jet dont la dynamique est plus fortement dominée par l'instabilité barocline que celui examiné dans la thèse.

- L'algorithme d'initialisation du mode analytique du chapitre 4 pourrait être généralisé pour prendre en compte l'extraction par la perturbation d'énergie potentielle de l'écoulement de base. On devrait ainsi initialiser aussi la structure verticale la plus probable et on se ramènerait à un problème elliptique tridimensionnel.

Enfin, les informations essentielles contenues dans la thèse et les perspectives à long terme auxquels elle donne lieu sont résumées ci-après :

Au bout d'un temps fini, les perturbations tendent vers des structures bien particulières, "en équilibre" avec l'écoulement de base. Les propriétés statistiques de ces structures "en équilibre" sont caractérisées analytiquement par une structure la plus probable déterminée à partir des points fixes de l'équation d'orientation des isolignes de la fonction de courant perturbée. Cette structure la plus probable permet de quantifier les taux locaux de conversion d'énergie de l'écoulement de base vers les perturbations et donc d'estimer la prévisibilité d'un écoulement donné. Enfin, cette analyse locale et instantanée a abouti à une compréhension de la dynamique globale et durable des perturbations qui ont évolué pendant un temps fini avec l'écoulement de base.

Les résultats théoriques auxquels nous avons abouti durant cette thèse ont pour objet principal l'amélioration de la compréhension des phénomènes atmosphériques et océaniques de grande complexité spatio-temporelle tels qu'ils sont observés en réalité et l'amélioration de leur prévision. Une première application de ces résultats autour de la problématique de la prévisibilité a été ébauchée au chapitre 4 et pourrait être poursuivie dans des cas plus complexes. Les diagnostics de croissance des perturbations pourraient aussi être utilisés pour étudier des cas réels de cyclogénèse et notamment pourraient permettre de localiser a priori les régions préférentielles de formation des cyclones. Comme il a été évoqué dans le chapitre 2, les hypothèses sous-jacentes dans notre approche sont similaires à celles utilisées par Lee (1995) qui effectue une étude théorique de la dynamique des Storm-Tracks ; ainsi notre approche pourrait aussi être utile pour comprendre la dynamique atmosphérique à l'échelle des ondes planétaires.

A Article II : Perturbation growth in terms of barotropic alignment properties

Q. J. R. Meteorol. Soc. (2002), **128**, pp. 1–24

Perturbation growth in terms of barotropic alignment properties

By G. RIVIÈRE^{1*}, B.L. HUA² and P. KLEIN²

¹*Laboratoire de Météorologie Dynamique, France*

²*Laboratoire de Physique des Océans, France*

SUMMARY

In order to study the error growth due to initial uncertainties in the model state, this paper examines the alignment dynamics of the perturbation velocity vector in quasigeostrophic flows. In a barotropic context, the time evolution of the perturbation velocity field is the sum of two terms: (i) the stretching of the perturbation velocity vector by the basic state velocity gradient tensor (denoted $\nabla\bar{\mathbf{u}}$) and (ii) the perturbation ageostrophic pressure gradient which also depends on $\nabla\bar{\mathbf{u}}$. Different analytical results show that such a system has two types of preferred orientations which induces kinetic energy growth: one orientation concerns one eigenvector of $\nabla\bar{\mathbf{u}}$, the other one is linked to a fixed point of the orientation equation of the perturbation velocity vector written in strain coordinates. This analytical diagnostic is confirmed by using Monte-Carlo techniques in a quasigeostrophic oceanic basin model of a stratified wind-driven double gyre circulation and these orientations are shown to be the most probable. These preferred orientations are of great importance to diagnose the most probable kinetic energy generation rate at each grid point. An interesting outcome is that the kinetic energy error field is localized in regions where the norm of $\nabla\bar{\mathbf{u}}$ is large.

KEYWORDS: Perturbation growth Local instability Alignment dynamics

1. INTRODUCTION

Even though conventional parallel flow problems have proved useful to understand barotropic and baroclinic instabilities mechanisms involved in large-scale atmospheric and oceanic flows, actual flows are non-parallel and zonally varying. Many phenomena thus tend to occur in preferred regions, as for instance, the specific localization of cyclone emergence in midlatitudes. Understanding regional cyclogenesis is of great importance because the spatial distribution of the synoptic eddy fluxes determine the position of the storm tracks which themselves influence the planetary waves behavior and the atmospheric low-frequency variability (Simmons et al. 1983 and Hoskins et al. 1983). Frederiksen (1983) characterized the local stability properties of stationary zonally varying flows by looking at the geographical distribution of the unstable normal modes of the linear eigenvalue problem and found good correspondances with observations. But he could not explain the physical mechanism involved in the localization.

Pierrehumbert (1984) has applied the WKB method to this problem, by separating global modes and local modes that are localized at the point of maximum shear, but such an approach needs a scale separation between the basic flow and the perturbation. By completing a systematic study of the linearized energetics equations, Mak and Cai (1989) (referred to as MC in the following) in a barotropic case, and Cai and Mak (1990) in a baroclinic situation, have generalized the well known parallel flows result that “a perturbation extracts energy if its structure leans against the shear”. In a barotropic context, their generalization states that in order “to optimally extract kinetic energy from the basic flow, a perturbation must be elongated locally along the axis of contraction of the basic deformation field. If the perturbation is oriented locally along the axis of dilatation, it would lose kinetic energy to the basic flow”. In parallel flows

* Corresponding author: Laboratoire de Météorologie Dynamique, ENS, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France. e-mail: griviere@lmd.ens.fr

© Royal Meteorological Society, 2002.

problems, for the category of “unstable wavenumbers”, an equilibrated structure exists which corresponds to the unstable normal mode, with a specific orientation of the perturbation structure with respect to the shear.

Thus building upon the generalization proposed by Mak and Cai, the following question emerges naturally: is there a generalization for localized instability problems of the property of the unstable normal modes of parallel flow problems that favors specific orientations of growing perturbations? More specifically, can one analytically predict which orientations will favor energy perturbation growth and in which regions will these locally equilibrated structures emerge? This question is directly related to cyclogenesis problematics: for instance, Kucharski and Thorpe (2001) show that barotropic growth can dominate the initial phase of a cyclonic development and specific horizontal perturbation structures are needed within specific regions to lead to strong and fast cyclonic development. A related issue concerns predictability problems: if the most probable structure of growing perturbations can be determined analytically, then the average rate of energy extraction from the basic flow by the perturbations can be forecast which is an important diagnostic to characterize the limit of predictability of a given flow.

In the present paper, we attempt to answer this question by considering the linearized momentum equations, such as written by MC, but in their Lagrangian barotropic quasigeostrophic form, without taking friction into account.

The essential idea – cf Straub (2002), whose study is based on an observation of Warn – is that if the perturbation ageostrophic pressure gradient were negligible, a closed system would appear for the perturbation velocity vector, which time evolution would be simply determined through its stretching by the basic-state shear $\nabla\bar{\mathbf{u}}$.

This important observation, supplemented by an analytical approximation of the pressure gradient term, leads us to rationalize some features of the localized instability problem for a quasigeostrophic model, namely (i) the tendency for alignment of the perturbation velocities with predictable directions of the basic state flow, (ii) the spatial localization of its generation rates and (iii) the regionalization of the error fields.

We shall moreover use results for alignment properties which have been established recently for the growth of tracer gradients in two-dimensional turbulence (Lapeyre *et al.* 1999, L99 hereafter), that also amounts to the problem of the stretching of a vector field by the velocity gradient tensor $\nabla\bar{\mathbf{u}}$. Our approach for numerical diagnostics of perturbation growth differs from the studies of localized instability cited above, and relies instead on a Monte-Carlo approach, whereby an ensemble of simulations, initialized with small random perturbations of a reference flow, is allowed to evolve for a length of time that corresponds to about 5 to 10 straining time scales of the basic state. Statistical properties of the perturbations that have emerged after that finite time are then diagnosed for specific diagnostics.

The present paper is organized as follows: section 2 discusses the linearized momentum equations and their comparison with the equations for the growth of tracer gradients; section 3 reports on numerical diagnostics concerning alignment dynamics, generation rates and error fields; and section 4 provides a discussion of our results.

2. BAROTROPIC PERTURBATION EQUATIONS

(a) Time evolution of the perturbation velocity

To study the kinetic energy error growth, we have to consider the linearized equations for the perturbation velocity field. The ageostrophic momentum equations for the basic-state are written here for simplicity in their barotropic form and without the β -effect (the β -effect is considered later).

$$\frac{\bar{D}\bar{\mathbf{u}}}{Dt} = -\nabla\bar{p}_1, \quad (1)$$

where $\bar{D}/Dt = \partial/\partial t + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)$ denotes the geostrophic total derivative, $\bar{\mathbf{u}}$ is the basic-state geostrophic velocity field and \bar{p}_1 the ageostrophic pressure field. The momentum equations of the linearized perturbation system can be written as

$$\frac{\bar{D}\mathbf{u}'}{Dt} = -\nabla\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}' - \nabla p'_1, \quad (2)$$

where $\nabla\bar{\mathbf{u}}$ is the basic-state velocity gradient tensor. Bars in (2) denote quantities associated with the reference flow, while primes denote perturbations. By taking the curl of (2) we obtain the linearized perturbation vorticity equation

$$\frac{\bar{D}\omega'}{Dt} = -\mathbf{u}' \cdot \nabla(\bar{\omega}), \quad (3)$$

where $\omega \equiv \partial_x v - \partial_y u$ denotes the vertical component of relative vorticity. In order to localize the kinetic energy error growth, let us now consider the local kinetic energy equation derived from (2)

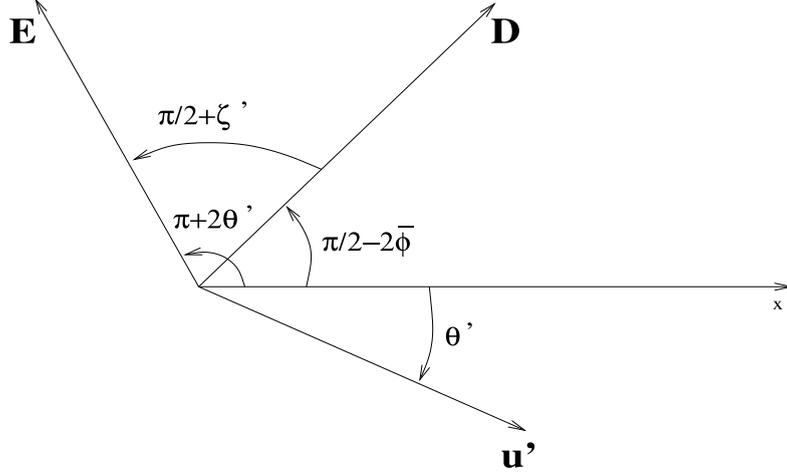
$$\frac{1}{2} \frac{\partial u'^2}{\partial t} = -\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \left(\frac{u'^2}{2} \right) - \mathbf{u}' \cdot (\nabla\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}') - \mathbf{u}' \cdot \nabla p'_1. \quad (4)$$

The physical interpretation of the three terms of the right hand side of (4) are developed in MC. The second term is the generation rate of the local perturbation energy whereas the two other ones (advection of the energy by the basic flow and the pressure work) redistribute the perturbation energy spatially and does not contribute to the global energetics. The generation rate can be viewed as the scalar product of two vectors \mathbf{E} and \mathbf{D} as defined in MC

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \left\{ \frac{1}{2}(v'^2 - u'^2), -u'v' \right\}, \\ \mathbf{D} &= (\partial_x \bar{u} - \partial_y \bar{v}, \partial_x \bar{v} + \partial_y \bar{u}). \end{aligned} \quad (5)$$

\mathbf{E} depends on the perturbation structure and \mathbf{D} represents the basic-state deformation field where $\bar{\sigma}_n \equiv \partial_x \bar{u} - \partial_y \bar{v}$ is the stretching component and $\bar{\sigma}_s \equiv \partial_x \bar{v} + \partial_y \bar{u}$ the shearing component. If $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} > 0$ (resp. $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} < 0$), the perturbation structure is such that it can extract energy from (resp. lose energy to) the basic flow. The angle between the two vectors \mathbf{E} and \mathbf{D} is thus essential to determine locally if the perturbation can extract or not energy from the basic flow. As our present study will focus on this angle, let us define different notations that will be useful in the following sections. We decompose the perturbation velocity vector into its modulus $\rho' \equiv |\mathbf{u}'|$ and into its angle θ'

$$\mathbf{u}' = \rho'(\cos \theta', \sin \theta') = \rho' \mathbf{e}', \quad (6)$$

Figure 1. Angles defining the directions of the vectors \mathbf{E} and \mathbf{D} .

with \mathbf{e}' denoting the unit vector which points in the same direction as \mathbf{u}' .

With these notations, \mathbf{E} can also be decomposed into its modulus (the kinetic energy of the perturbation) and angle

$$\mathbf{E} = \frac{\rho'^2}{2} \{\cos(\pi + 2\theta'), \sin(\pi + 2\theta')\}. \quad (7)$$

$\bar{\phi}$ is defined as the angle of the principal axes of the basic-state strain-rate tensor

$$(\partial_x \bar{v} + \partial_y \bar{u}, \partial_x \bar{u} - \partial_y \bar{v}) = (\bar{\sigma}_s, \bar{\sigma}_n) = \bar{\sigma} (\cos 2\bar{\phi}, \sin 2\bar{\phi}), \quad (8)$$

where $\bar{\sigma} = |\mathbf{D}| \geq 0$ is the magnitude of the strain rate. With such notations the angle of the vector \mathbf{D} with the x-axis is $\pi/2 - 2\bar{\phi}$. As shown in Fig. 1, the angle between \mathbf{E} and \mathbf{D} is equal to $\pi/2 + \zeta'$ with $\zeta' \equiv 2\theta' + 2\bar{\phi}$. In our notations the fundamental term for the local perturbation growth $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ can be expressed as

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = -\mathbf{u}' \cdot (\nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}') = -\frac{\rho'^2}{2} \bar{\sigma} \sin \zeta', \quad (9)$$

which depends on three terms, the already redistributed kinetic energy $\rho'^2/2 = |\mathbf{u}'|^2/2$, the rate of strain $\bar{\sigma}$ and the angle ζ' which will be studied hereafter in the section on alignment dynamics. Dividing equation (4) by kinetic energy $\rho'^2/2$, we obtain the Eulerian exponential kinetic energy growth rate and the generation term associated is thus

$$\delta \equiv \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{\rho'^2/2} = -\bar{\sigma} \sin \zeta',$$

which will be called hereafter the exponential kinetic energy generation rate using the terminology of MC.

(b) *Influence of $\nabla \bar{\mathbf{u}}$ on the orientation equation of the perturbation velocity*

Let us first consider separately the dynamical influence of $\nabla \bar{\mathbf{u}}$ on the orientation of the perturbation velocity vector, the ageostrophic pressure role

is considered in 2.3. The important point to note is that if the perturbation ageostrophic pressure gradient is dropped in equation (2), a closed form is obtained for \mathbf{u}'

$$\frac{\bar{D}\mathbf{u}'}{Dt} = -\nabla\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}', \quad (10)$$

i.e. the perturbation velocity field \mathbf{u}' is simply determined through its stretching by the basic-state shear $\nabla\bar{\mathbf{u}}$ which is a known entity. By taking the curl of the approximate equation (10), one can also recover the exact linearized perturbation vorticity equation (3), which is however not a closed system for ω' since (3) also depends on \mathbf{u}' . The approximate equation (10) amounts to studying the stretching of a vector field by a given tensor: this approach was first exploited by Straub (2002) to study hydrostatic 3D perturbations in a 2D reference flow. His motivation came from an observation that in an unstratified and non-rotating limit, equation (10) for the perturbation velocity is exact and similar in its structure to the tracer gradient and line element equations. However in our quasi-geostrophic model, equation (10) is only an approximation that permits to get some dynamical information when using the method introduced by L99 for the tracer gradient; this method needs to be adapted to take into account the influence of the ageostrophic pressure gradient term $\nabla p'_1$ in (2). The exact equation for the tracer gradient is

$$\frac{\bar{D}\nabla\bar{q}}{Dt} = -\nabla\bar{\mathbf{u}}^T\nabla\bar{q}, \quad (11)$$

\bar{q} denoting the tracer field. The difference between equations (10) and (11) is twofold: (i) for the tracer gradient evolution, the tensor involved is the transpose of the velocity gradient tensor and (ii) equation (11) applies to a gradient vector field while (10) applies to a non-divergent vector field (see section 2(c)). Recent theoretical results on the dynamics of tracer gradient formation have shown that the tracer gradient vector aligns with a preferential direction and the gradient magnitude grows exponentially in time. This preferential direction appears naturally when the gradient is decomposed into its norm and angle as shown in L99. Let us now derive the same equations as L99 but for the perturbation velocity. In a quasi-geostrophic context, incompressibility $\partial_x\bar{u} + \partial_y\bar{v} = 0$ leads to

$$\nabla\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \partial_x\bar{u} & \partial_y\bar{u} \\ \partial_x\bar{v} & \partial_y\bar{v} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_n & \bar{\sigma}_s \\ \bar{\sigma}_s & -\bar{\sigma}_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\bar{\omega} \\ \bar{\omega} & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

Let us first consider the case of equation (10) for the velocity perturbation. The projections of (10) on \mathbf{e}' and on $\mathbf{e}'_{\perp} \equiv (-\sin\theta', \cos\theta')$ lead to two equations, one for the norm ρ' and the other for the angle θ' of the perturbation velocity vector

$$\frac{1}{\rho'^2} \frac{\bar{D}\rho'^2}{Dt} = -\bar{\sigma} \sin(2\theta' + 2\bar{\phi}), \quad (13a)$$

$$2 \frac{\bar{D}\theta'}{Dt} = \bar{\sigma} \{-r_{ow} - \cos(2\theta' + 2\bar{\phi})\}, \quad (13b)$$

where

$$r_{ow} \equiv \frac{\bar{\omega}}{\bar{\sigma}}. \quad (14)$$

The dimensionless parameter r_{ow} is the ratio between the vorticity $\bar{\omega}$ and the magnitude of the strain rate $\bar{\sigma}$. The time evolution of ρ' and θ' depends on the relative angle ζ' between the perturbation velocity vector and the axis of contraction of the strain rate. For $|r_{ow}| < 1$, the eigenvectors of $\nabla \bar{\mathbf{u}}$ correspond to the solutions of equation ($\bar{D}\theta'/Dt = 0$), which leads to the orientations $\zeta' = \zeta_{\pm}^{r_{ow}} \equiv \pm \arccos(-r_{ow})$. The eigenvector of $\nabla \bar{\mathbf{u}}$ with the negative eigenvalue has a stable orientation $\zeta' = \zeta_{-}^{r_{ow}}$ leading to kinetic energy growth while the eigenvector with the positive eigenvalue has an unstable orientation $\zeta' = \zeta_{+}^{r_{ow}}$ leading to kinetic energy decrease.

A more accurate expression than in (13) can be derived in strain coordinates (following L99 and Straub 2002) that only involves ζ'

$$\frac{1}{\rho'^2} \frac{\bar{D}\rho'^2}{Dt} = -\bar{\sigma} \sin \zeta', \quad (15a)$$

$$\frac{\bar{D}\zeta'}{Dt} = \bar{\sigma}(-r' - \cos \zeta'), \quad (15b)$$

where

$$r' \equiv \frac{\bar{\omega} - 2\frac{\bar{D}\bar{\phi}}{Dt}}{\bar{\sigma}}. \quad (16)$$

The dimensionless parameter r' is the ratio between $\bar{\omega} - 2\bar{D}\bar{\phi}/Dt$ (which is the vorticity minus the rotation of the principal axes of the strain-rate tensor) and the magnitude of the strain rate $\bar{\sigma}$. If $|r'| < 1$, that is for regions where strain dominates, equation (15b) has two fixed points $\zeta_{\pm}^{r'} = \pm \arccos(-r')$, a stable one $\zeta' = \zeta_{-}^{r'}$ and an unstable one $\zeta' = \zeta_{+}^{r'}$. From (15a), the stable orientation $\zeta_{-}^{r'}$ corresponds to an exponential growth of the norm ρ' , while the unstable orientation $\zeta_{+}^{r'}$ corresponds to an exponential decay of ρ' . Note that the orientations $\zeta_{\pm}^{r'}$ have taken into account the rotation rate of \mathbf{D} which is exactly $-2\bar{D}\bar{\phi}/Dt$.

For the tracer gradient system, we have similar properties, i.e two fixed points $\zeta_{\pm} \equiv \pm \arccos(r)$ depending on a parameter

$$r \equiv \frac{\bar{\omega} + 2\frac{\bar{D}\bar{\phi}}{Dt}}{\bar{\sigma}}. \quad (17)$$

We note that $-\bar{\omega}$ in the formulation of the fixed points $\zeta_{\pm}^{r'} = \pm \arccos\{(-\bar{\omega} + 2\bar{D}\bar{\phi}/Dt)/\bar{\sigma}\}$ is changed into $\bar{\omega}$ in the tracer gradient formulation $\zeta_{\pm} = \pm \arccos(r) = \pm \arccos\{(\bar{\omega} + 2\bar{D}\bar{\phi}/Dt)/\bar{\sigma}\}$ because of the transpose operator in equation (11). Numerical simulations of 2D turbulence in L99 show that the tracer gradients orientation are statistically well aligned with the stable direction ζ_{-} corresponding to tracer gradients growth. This orientation is quite significantly more probable than that derived from the stable eigenvector of $\nabla \bar{\mathbf{u}}^T$ (Okubo-Weiss criterion (1970,1991)). The difference between the two orientations is that ζ_{-} takes into account the rotation rate of the strain axes whereas the eigenvector of $\nabla \bar{\mathbf{u}}^T$ does not (see L99).

From the perturbation velocity equations, two natural systems emerge. One implies the equivalent Okubo-Weiss criterion and the preferred orientations are those of the eigenvectors of $\nabla \bar{\mathbf{u}}$; the other one is analogous to the system of L99 with two preferred orientations $\zeta' = \zeta_{\pm}^{r'}$ for a different eigenvalue problem in the strain basis (cf appendix of L99).

Straub (2002) shows that the condition $|r'| < 1$ exactly implies the centrifugal instability criterion † whereas the equivalent Okubo-Weiss criterion $|r_{ow}| < 1$ does not yield the appropriate instability condition. On account of the simple system (15), of both the numerical simulations of L99 and the recent work of Straub, the expected result if equation (10) were exact would be that ζ' will preferentially align with ζ'_r and not with $\zeta'_{r_{ow}}$. However, the above inferences suppose that (10) is exact and we shall show in the next section that the influence of the ageostrophic pressure gradient in (2) is to introduce another term in the orientation equations (13b) and (15b).

(c) *The ageostrophic pressure gradient influence*

In this section, the complete equation (2) is studied analytically taking into account both $\nabla\bar{\mathbf{u}}$ and $-\nabla p'_1$ but using a simple approximation of the ageostrophic pressure gradient. As already noted in section 2(a), we are dealing with a stretched vector field \mathbf{u}' which is non-divergent, so that by taking the divergence of equation (2), we obtain the equation relating the perturbation velocity \mathbf{u}' to the perturbation ageostrophic pressure

$$\Delta p'_1 = 2\{J(\bar{u}, v') + J(u', \bar{v})\} \quad (18a)$$

$$= 2\{\bar{\sigma}_n \partial_{xy} \psi' - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_s - \bar{\omega}) \partial_x^2 \psi' + \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_s + \bar{\omega}) \partial_y^2 \psi'\}, \quad (18b)$$

where J denotes the Jacobian operator, ψ' the perturbation streamfunction and (u, v) the velocity vector in the Cartesian coordinates (Ox, Oy) . To solve for the perturbation ageostrophic pressure p'_1 , we have to invert a Laplacian. Some insight on the local dynamical influence of the pressure perturbation may still be obtained by the following analytical diagnostic that considers a monochromatic perturbation (caveat: even if a monochromatic function is non local, this approximation is a first step to diagnose the pressure gradient effect)

$$\psi'(x, y) = Re[A \exp\{i(kx + ly)\}]. \quad (19)$$

This particular perturbation form leads to a new expression of equation (18b)

$$\Delta p'_1 = 2\{-\bar{\sigma}_n kl + \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_s - \bar{\omega})k^2 - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_s + \bar{\omega})l^2\}\psi'. \quad (20)$$

If we consider $\bar{\sigma}_n$, $\bar{\sigma}_s$ and $\bar{\omega}$ as slowly varying by comparison with the perturbation variations (WKB assumption), the ageostrophic pressure is also monochromatic and its gradient is colinear to the streamfunction gradient $\nabla\psi'$ and thus perpendicular to the velocity vector \mathbf{u}'

$$-\nabla p'_1 = \frac{2}{k^2 + l^2} \{-\bar{\sigma}_n kl + \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_s - \bar{\omega})k^2 - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_s + \bar{\omega})l^2\} \nabla\psi'. \quad (21)$$

With the particular form (19), \mathbf{u}' can be written as

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \sin(kx + ly) \begin{pmatrix} l \\ -k \end{pmatrix}, \quad (22)$$

and the orientation θ' is thus

$$\begin{pmatrix} \cos \theta' \\ \sin \theta' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \frac{l}{\sqrt{k^2 + l^2}} \\ \frac{-k}{\sqrt{k^2 + l^2}} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

† for which it is known that azimuthal pressure gradient does not influence the instability

This leads to the following calculations

$$-\nabla p'_1 = 2\{\bar{\sigma}_n \cos \theta' \sin \theta' + \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_s + \bar{\omega}) \sin^2 \theta' - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_s + \bar{\omega}) \cos^2 \theta'\} \nabla \psi' \quad (24a)$$

$$= (\bar{\sigma}_n \sin 2\theta' - \bar{\sigma}_s \cos 2\theta' - \bar{\omega}) \nabla \psi' \quad (24b)$$

$$= \bar{\sigma} (r_{ow} + \cos \zeta') \rho' \mathbf{e}'_{\perp}. \quad (24c)$$

As the pressure gradient aligns with \mathbf{e}'_{\perp} , the local spatial influence of $\nabla p'_1$ is simply to modify the orientation equation (13b or 15b) and not the norm equation (13a or 15a). Let us denote $P_{\theta}(p'_1) \equiv -\nabla p'_1 \cdot \mathbf{e}'_{\perp} / \rho'$ the additional term on the orientation equation due to the ageostrophic pressure gradient; in a monochromatic context, we obtain the following formula

$$P_{\theta}(p'_1) = \bar{\sigma} (r_{ow} + \cos \zeta'), \quad (25)$$

which implies a new orientation equation

$$\frac{\bar{D}\theta'}{Dt} = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}(r_{ow} + \cos \zeta') + P_{\theta}(p'_1) = \frac{1}{2}\bar{\sigma}(r_{ow} + \cos \zeta'). \quad (26)$$

$\bar{D}\theta'/Dt$ is the sum of two terms: the first term on the rhs comes from the projection of $-\nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}'$, the second term is the pressure gradient component and is twice the opposite value of the first term. The pressure gradient in this equation is thus not at all negligible. Both terms are zero if \mathbf{u}' aligns with the eigenvectors of $\nabla \bar{\mathbf{u}}$ and we still have $\bar{D}\theta'/Dt = 0$ for those directions even in presence of the pressure term. If $\nabla \bar{\mathbf{u}}$ is slowly varying along a Lagrangian path, the eigenvectors directions would be therefore the preferred directions for \mathbf{u}' by considering the complete equation (2). However the studies of L99 and Straub (2002) have shown the dynamical importance of the variations of $\nabla \bar{\mathbf{u}}$, and more precisely, of the rotation of the principal axes of the strain-rate tensor. In strain coordinates, the orientation equation in this case is

$$\frac{\bar{D}\zeta'}{Dt} = \bar{\sigma}(r + \cos \zeta'), \quad (27)$$

where $r = (\bar{\omega} + 2\bar{D}\bar{\phi}/Dt)/\bar{\sigma}$ is the parameter defined in Eq.(17). The fixed points of equation (15b), ζ'_{\pm} , are not the fixed points of the complete equation (27). The complete equation (27) has two fixed points determined by $\zeta'_{\pm} \equiv \pm \arccos(-r)$. Our approximation of the pressure term leads us to two couples of preferred directions $(\zeta'^{r_{ow}}, \zeta'^{r_{ow}}_+)$ and (ζ'^r, ζ'^r_+) . These two couples seem to be more appropriate to describe the most probable values of ζ' because the pressure term is known to have a non negligible influence on the dynamics of \mathbf{u}' . An important point to note is that the productive preferred directions by considering the complete equation (2), $\zeta'^{r_{ow}}$ and ζ'^r , are unstable as shown in appendix A, whereas the productive preferred directions by considering only the simplified system (10), $\zeta'^{r_{ow}}$ and ζ'^r , are stable. The parametrization of the pressure gradient is derived from a strong monochromaticity assumption but as we will see with the numerical results the formulation obtained for the projection $P_{\theta}(p'_1)$ of the pressure gradient on the orientation equation is significant.

In appendix B, we verify by taking into account the β -term and by using the same monochromatic perturbation that the β -term does not appear in the orientation equation and has thus no influence on the preferred orientations.

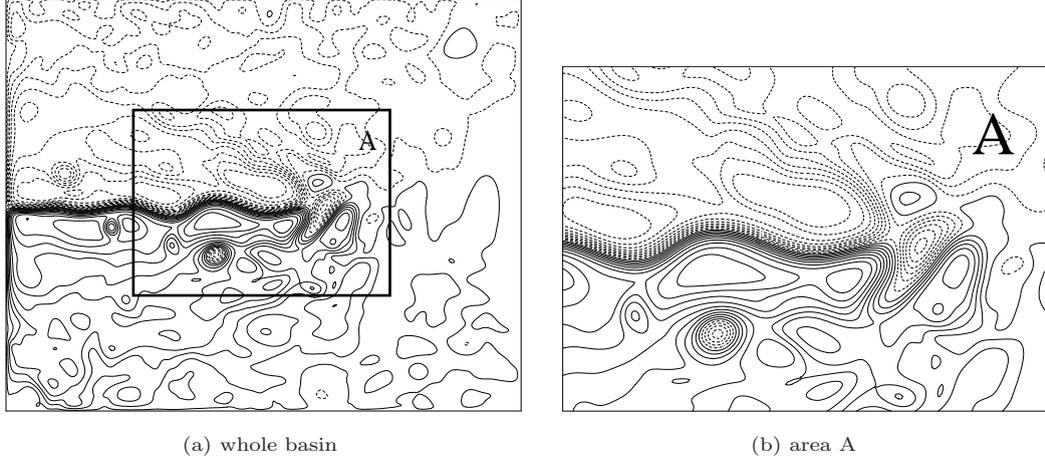


Figure 2. Streamfunction $\bar{\psi}$ of the reference flow (T=10 days) in the first layer; (a) the whole basin, (b) zoom at the end part of the jet: area A

To summarize; without the pressure term, two couples of preferred orientations emerge $\zeta_{\pm}^{r_{ow}}$ and $\zeta_{\pm}^{r'}$, with the approximation of the pressure term, another couple emerges ζ_{\pm}^r . By considering only the productive orientations $\zeta_{-}^{r_{ow}}$, $\zeta_{-}^{r'}$ and ζ_{-}^r , we can define three analytical estimates of the exponential generation rate

$$\delta_{ow} \equiv -\bar{\sigma} \cdot \sin(\zeta_{-}^{r_{ow}}) = \sqrt{\bar{\sigma}^2 - \bar{\omega}^2}, \quad |r_{ow}| < 1, \quad (28a)$$

$$\delta_{r'} \equiv -\bar{\sigma} \cdot \sin(\zeta_{-}^{r'}) = \sqrt{\bar{\sigma}^2 - \left(-\bar{\omega} + 2\frac{\bar{D}\bar{\phi}}{Dt}\right)^2}, \quad |r'| < 1, \quad (28b)$$

$$\delta_r \equiv -\bar{\sigma} \cdot \sin(\zeta_{-}^r) = \sqrt{\bar{\sigma}^2 - \left(\bar{\omega} + 2\frac{\bar{D}\bar{\phi}}{Dt}\right)^2}, \quad |r| < 1. \quad (28c)$$

We remark that the maximum of δ is equal to $\bar{\sigma}$. It corresponds to the most efficient structure $\zeta' = -\pi/2$, i.e when \mathbf{u}' is aligned with the axis of contraction of the strain rate and is hereafter denoted as $\delta_{eff} \equiv \bar{\sigma}$.

3. NUMERICAL RESULTS IN A QUASIGEOSTROPHIC MODEL

In the present study, results are developed for the classical oceanic case of a wind-driven double gyre with a 6-layer quasi-geostrophic code in a rectangular basin. A strong jet separates the southern anticyclonic gyre from the northern cyclonic one. The jet has meanders which can detach and form eddies that travel westward. An example of the flow is shown in Fig. 2 which represents the streamfunction $\bar{\psi}$ in the first layer. In the next sections, our study of the localized disturbances and the initial error growth for this control flow will focus on the limited area A located at the exit of the jet (Fig. 2(b)) because of its more turbulent and varied dynamical structures. The numerical code is presented in appendix C.

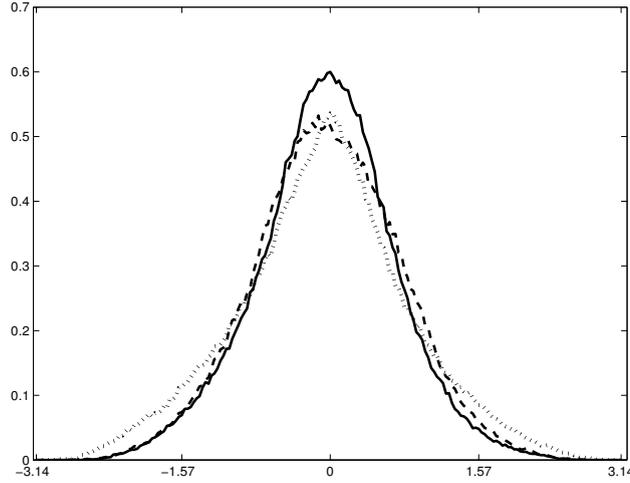


Figure 3. PDF at T=10 days of $\zeta' - \zeta_{-}^{r'}$ (dash line), of $\zeta' - \zeta_{-}^r$ (dotted line) and of $\zeta' - \zeta_{-}^{r_{ow}}$ (solid line) conditioned by $|r'| < 1$, $|r_{ow}| < 1$, $|r| < 1$ and $\delta > |\delta|_{max}/10$. This statistic is obtained with an ensemble of 200 perturbations.

The results are produced for a particular ensemble of random perturbations. The corresponding Monte-Carlo technique is developed in appendix D. Hereafter we study perturbations structures that have evolved for 10 days (corresponding to roughly 5 straining time scales of the basic state flow), from T=0 day to T=10 days. All figures and the different properties are given at T=10 days for the first layer of the 6-layer model.

(a) *Alignment dynamics*

(i) *Regions of large δ .* Our aim is to diagnose if the analytical orientations found in section 2 emerge or not, and to identify the most representative orientation for the perturbation structure. Figure 3 represents the probability density function (PDF) of the three different angles ($\zeta' - \zeta_{-}^{r'}$), ($\zeta' - \zeta_{-}^r$) and ($\zeta' - \zeta_{-}^{r_{ow}}$) calculated for 200 random perturbations conditioned by $|r'| < 1$, $|r_{ow}| < 1$, $|r| < 1$ and $\delta > |\delta|_{max}/10$. A point to note is that we consider the intersection between regions where the three analytical orientations exist, i.e where $|r'| < 1$, $|r_{ow}| < 1$, $|r| < 1$, in order to compare the three PDFs. For this threshold of large δ , there is a preferential orientation linked with the Okubo-Weiss criterion $\zeta_{-}^{r_{ow}}$ since the PDF of ($\zeta' - \zeta_{-}^{r_{ow}}$) has a stronger peak than the other two PDFs. In other words, in regions of large δ , **E** and **D** are statistically non colinear and form a non trivial angle determined by $\pi/2 + \zeta_{-}^{r_{ow}}$. The fact that the orientation $\zeta_{-}^{r_{ow}}$ is more probable than $\zeta_{-}^{r'}$ and ζ_{-}^r is an unexpected result since we saw in section 2 that the most accurate criteria should take into account the rotation of the vector **D**. As such criteria represented by the orientations $\zeta_{-}^{r'}$ and ζ_{-}^r are derived from two distinct approximations, it is unclear why the orientation $\zeta_{-}^{r_{ow}}$ included in the interval $[\zeta_{-}^{r'}, \zeta_{-}^r]$ ($r_{ow} \in [r', r]$) emerges. Even if the differences between $\zeta_{-}^{r_{ow}}$ and the other two orientations $\zeta_{-}^{r'}$ and ζ_{-}^r are not so large, these differences appear robust and are also found for other finite times (e.g at T=20

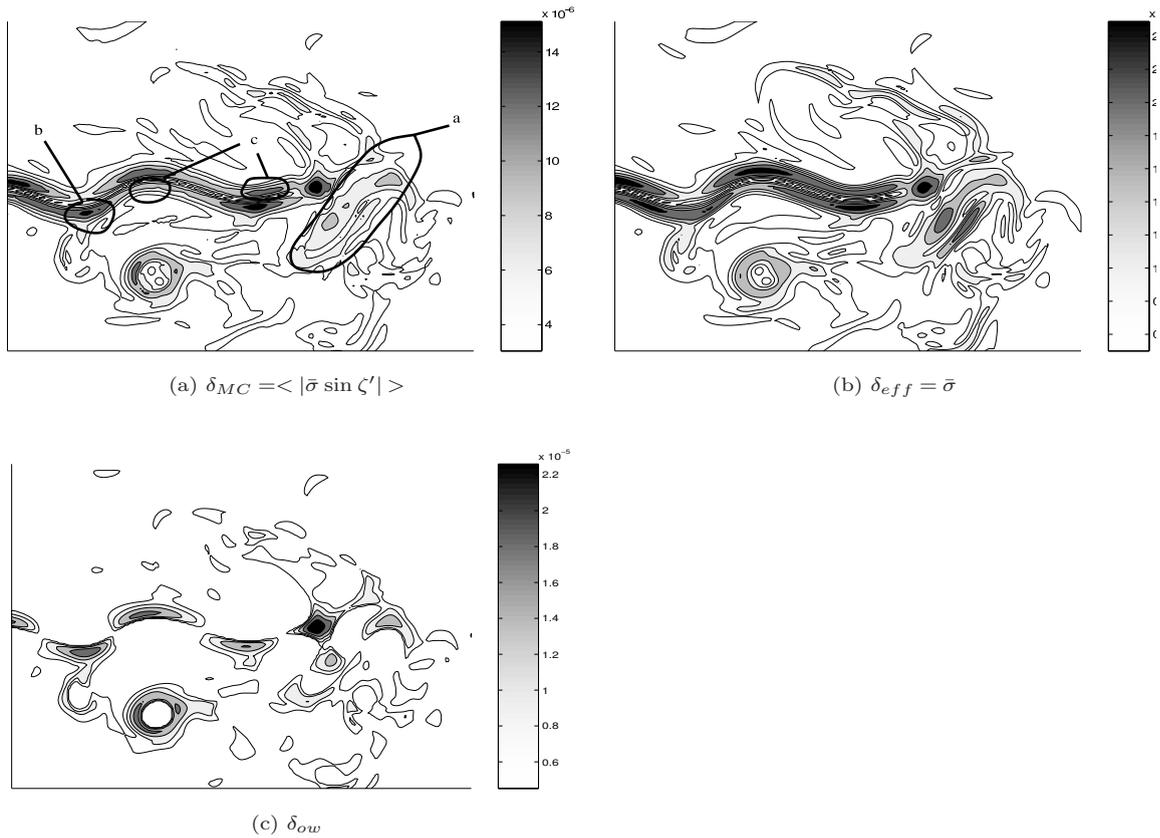


Figure 4. Spatial localization of exponential generation rates at $T=10$ days inside area A; (a) ensemble mean of the absolute exponential generation rate for 200 independent realizations, (b) rate of strain $\delta_{eff} = \bar{\sigma}$ and (c) estimated exponential generation rate δ_{ow} . Note that the gray scales are different for (a) and (b),(c).

days) and for other spatial scales perturbations. Despite the fact that other terms are involved in the dynamics of the numerical simulations (baroclinic stretching term and dissipation), the perturbation velocity vector aligns with an equilibrated orientation that can be analytically predicted from the combined action of the stretching mechanism by the basic-flow shear $\nabla \bar{\mathbf{u}}$ and by the pressure gradient correction term.

Let us focus on the exponential kinetic energy generation rate δ defined in section 2(a). The ensemble-mean of the absolute exponential generation rate for the 200 Monte-Carlo realizations $\delta_{MC} \equiv \langle |\bar{\sigma} \sin \zeta'| \rangle$ is compared to analytical estimates of the instantaneous exponential generation rate of the perturbation kinetic energy. The influence of the angle ζ' on the spatial localization of the Monte-Carlo exponential generation rate is noticeable in Fig. 4. If we look at the exit of the jet (subarea a in Fig. 4(a)), $\bar{\sigma}$ (Fig. 4(b)) presents two strong maxima which do not correlate with the Monte-Carlo generation rate (Fig. 4(a)) because

$|\sin \zeta'|$ is close to 0 in these regions. This behaviour of the Monte-Carlo generation rate in region a is clearly reproduced by the estimated generation rate δ_{ow} (Fig. 4(c)). Regions such as subdomain a are such that maxima of $\bar{\sigma}$ do not correspond to maxima of generation rate because of strong vorticity values which imply approximately that $\delta_{ow} = \sqrt{\bar{\sigma}^2 - \bar{\omega}^2} \simeq 0$. Other regions reveal good correlation of δ_{ow} with δ_{MC} , especially the subdomain b located near the jet core exhibits a local maximum for the fields δ_{MC} and δ_{ow} but not for the rate of strain $\bar{\sigma}$. These two different subdomains illustrate the important role played by the orientation of the structure on the spatial localization of the kinetic energy generation rate. The estimated exponential generation rate δ_{ow} is more representative of the Monte-Carlo exponential generation rate δ_{MC} than the rate of strain $\bar{\sigma}$. However the analytical estimate, δ_{ow} , cannot apply within regions where $|r_{ow}| > 1$ which clearly exist along the jet axis ; this is the case of subdomain c for instance where no special orientation can be diagnosed by our method. In such regions, there is no real eigenvalue whereas the mean exponential generation rate is not too small (nor too large) and our approach does not provide a particular orientation.

(ii) *Regions of large kinetic energy extraction.* In Fig. 5, the same PDFs as in Fig. 3 are shown but for regions characterized by large extraction $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \delta \cdot u'^2 / 2$, where the perturbation can extract the most kinetic energy. In these regions of large $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$, the fixed point calculated with pressure ζ_-^r is the most probable and performs slightly better than the eigenvector orientation $\zeta_-^{r_{ow}}$ and much better than the fixed point $\zeta_-^{r'}$ computed without considering the pressure term. This result is robust to different types of random perturbations, and has also been found in doubly-periodic QG flows (not shown here). In these regions, it is difficult to distinguish between ζ_-^r and $\zeta_-^{r_{ow}}$ which one is the most representative because in the one hand the PDF of $(\zeta' - \zeta_-^r)$ has a slightly higher peak around the abscissa 0 than the PDF of $(\zeta' - \zeta_-^{r_{ow}})$ but in the other hand regions where $|r_{ow}| < 1$ and $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} > |\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}|_{max} / 200$ represents 59 % of the regions determined by $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} > |\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}|_{max} / 200$ whereas regions where $|r| < 1$ and $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} > |\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}|_{max} / 200$ concern only 45 %.

Figures 3 and 5 show PDFs in regions of positive extraction, i.e in productive regions of kinetic energy ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} > |\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}|_{max} / 200$). But the joint PDF of the Monte-Carlo exponential generation rate with the analytical expression given by δ_{ow} shown in Fig. 6 considers both productive and destructive regions ($|\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}| > |\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}|_{max} / 200$). The analytical growth rate δ_{ow} corresponds to a good approximation of the Monte-Carlo growth rate because a strong branch which involves most of the points is superposed to the bisector of the right quadrant. This strong branch corresponds to a production of kinetic energy for the random perturbations and a correlation of +1 with the analytically estimated growth rate δ_{ow} . However another less visible branch is approximately superposed to the bisecting line of the left quadrant and is linked with a destruction of kinetic energy and a correlation of -1 with δ_{ow} . This destructive branch is connected with the destructive fixed point $\zeta_+^{r_{ow}}$. A similar diagram for the analytical generation rate δ_r shows the same properties. In the present ensemble with large scale initial perturbations, productive regions are much more space filling than the destructive ones and a clear alignment with ζ_-^r or $\zeta_-^{r_{ow}}$ is visible. The proportion between productive and destructive regions of kinetic energy depend on the spatial scales of random perturbations. The other cases examined revealed that destructive regions can be significantly important and that within these regions the angle ζ'

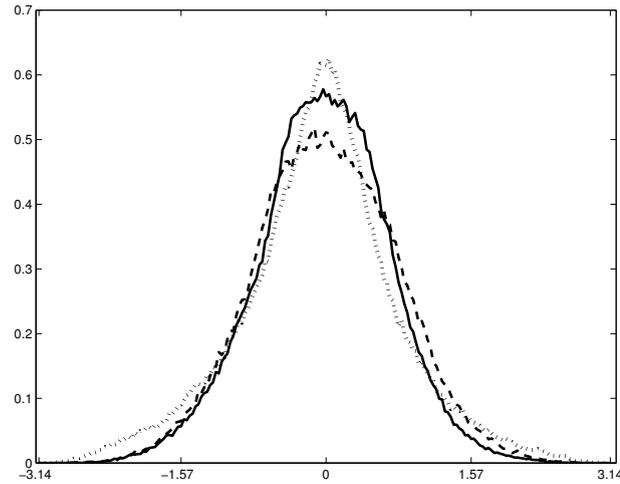


Figure 5. PDF at T=10 days of $\zeta' - \zeta_{-}^{r'}$ (dash line), of $\zeta' - \zeta_{-}^r$ (dotted line) and of $\zeta' - \zeta_{ow}^{r_{ow}}$ (solid line) conditioned by $|r'| < 1$, $|r_{ow}| < 1$, $|r| < 1$ and $\mathbf{E.D} > |\mathbf{E.D}|_{max}/200$. This statistic is obtained with an ensemble of 200 perturbations.

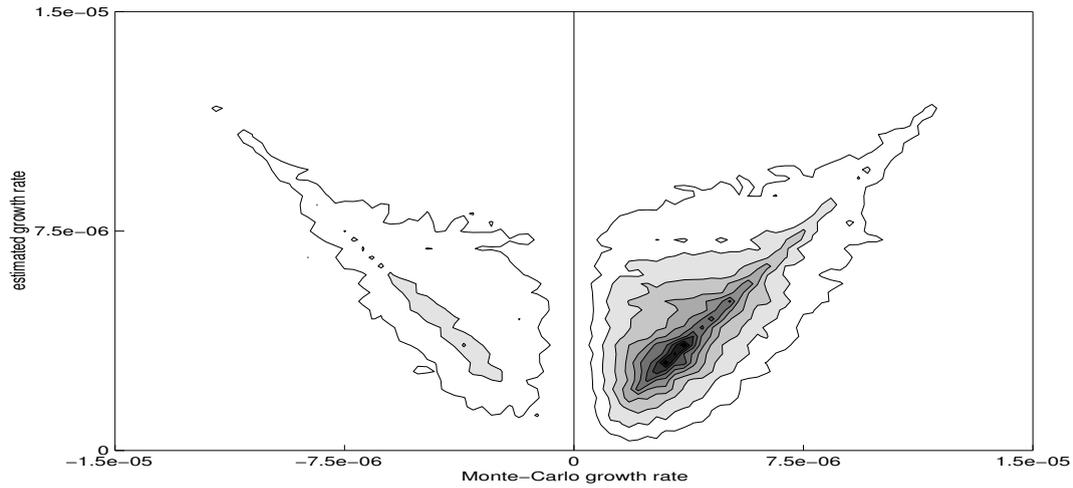


Figure 6. Joint PDF at T=10 days of the Monte-Carlo exponential generation rate with the estimate δ_{ow} conditioned by $|r_{ow}| < 1$ and $|\mathbf{E.D}| > |\mathbf{E.D}|_{max}/200$.

is close to the destructive orientations ζ_{+}^r or $\zeta_{+}^{r_{ow}}$. A generic property seems to emerge: in regions of production a strong alignment with ζ_{-}^r or $\zeta_{-}^{r_{ow}}$ occurs while in regions of destruction an alignment occurs with ζ_{+}^r or $\zeta_{+}^{r_{ow}}$.

To conclude with the PDFs results, Figs. 3, 5 and 6 show that the two types of preferred orientations ($\zeta_{\pm}^{r_{ow}}$ and ζ_{\pm}^r) derived by taking into account the pressure gradient are the most probable orientations; it is clearly proven that the orientations $\zeta_{\pm}^{r'}$ derived without the pressure term is less relevant.

Let us now compare more quantitatively the different growth rates obtained by performing both a spatial and an ensemble average, denoted by $\ll \gg$, inside the kinetic energy production regions defined by $|r'| < 1$, $|r_{ow}| < 1$, $|r| < 1$ and $\mathbf{E.D} > |\mathbf{E.D}|_{max}/200$. Such a threshold enables to consider regions where fixed points exist and where perturbations extract energy from the reference flow.

$$\begin{aligned}\ll \delta_{eff} \gg &= 1.1 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}, \\ \ll \delta_{r'} \gg &= 8.9 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}, \\ \ll \delta_{ow} \gg &= 8.5 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}, \\ \ll \delta_r \gg &= 6.1 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}, \\ \ll \delta_{MC} \gg &= 6.9 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}.\end{aligned}$$

All the above values are obtained with large spatial scales perturbations and can change if we choose another ensemble of perturbations. However the generic property is that $\delta_{eff} > \delta_{r'} > \delta_{ow} > \delta_{MC} > \delta_r$. This comparison shows that $\delta_{r'}$ has a more efficient structure to extract energy than δ_{ow} which itself is more efficient than δ_r . However δ_{ow} and δ_r better represent the Monte-Carlo growth rate since they are closer to $\ll \delta_{MC} \gg$ as shown above. From a predictability point of view, the information provided by δ_{ow} and δ_r is more useful and more accurate than that of $\delta_{r'}$ or δ_{eff} to approximate the kinetic energy error growth after a finite time. We remark also that δ_{ow} overestimates the kinetic energy error growth while δ_r slightly underestimates it. In the present case δ_r is closer to $\ll \delta_{MC} \gg$ than δ_{ow} but for other perturbations the inverse can occur.

(iii) *Regions of large kinetic energy.* In MC, the authors insisted on the fact that

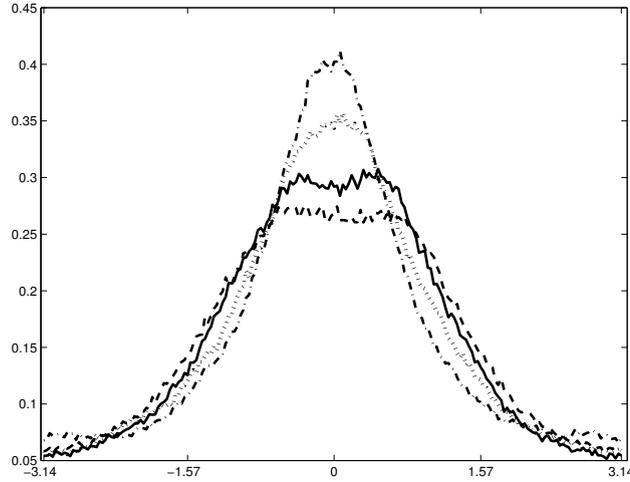


Figure 7. PDFs at T=10 days of $\zeta' - \zeta'_0$ (dash-dotted line), $\zeta' - \zeta'^-$ (dash line), $\zeta' - \zeta'^-$ (dotted line) and $\zeta' - \zeta'^{ow}$ (solid line) conditioned by $|r'| < 1$, $|r_{ow}| < 1$, $|r| < 1$ and $|u'| > |u'|_{max}/10$.

regions of energy extraction do not coincide spatially with regions of large energy because of the redistribution processes of the pressure work and the advection term. Which alignment is characteristic of large values of kinetic energy? To

answer this question let us define the following angle

$$\zeta'_0 \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } r_{ow} > 0 \\ -\pi & \text{if } r_{ow} < 0 \end{cases} . \quad (30)$$

This angle is characterized by no extraction: indeed if $\zeta' = \zeta'_0$, then the associated growth rate δ is equal to zero and the two vectors \mathbf{E} and \mathbf{D} are perpendicular. This angle has also the property to be continuous with the angle $\zeta^{r_{ow}}$ of the eigenvector direction of $\nabla \bar{\mathbf{u}}$ for $r_{ow} = \pm 1$. The PDF of $(\zeta' - \zeta'_0)$ is compared with that of the three analytical orientations in Fig. 7 in regions of large kinetic energy. The most probable angle in these regions is clearly the angle ζ'_0 corresponding to no extraction. This result shows that regions where the kinetic energy is already redistributed are characterized by an equilibrium where no production and no destruction occurs and where the two vectors \mathbf{E} and \mathbf{D} are perpendicular. The second better PDF concerns the fixed point with pressure ζ_-^r ; this is logical because among the three analytical orientations derived in section 2, it corresponds to the less efficient structure and thus defines an angle between \mathbf{E} and \mathbf{D} close to $\pi/2$. The spatial separation between regions of large extraction and regions of strong kinetic energy can be viewed now in terms of perturbation structure: regions of extraction are characterized by a non trivial angle between \mathbf{E} and \mathbf{D} determined by either $\pi/2 + \zeta_-^{r_{ow}}$ or $\pi/2 + \zeta_-^r$ and regions of large kinetic energy exhibit no tilt against the shear and \mathbf{E} and \mathbf{D} are perpendicular. An interesting feature is that for the tracer gradient dynamics, such a distinction is not discernible in Fig. 5(a) of L99, regions of strong PV gradient are also characterized by large growth rates of PV gradient.

(iv) *Check on the consistency of the parametrization of the ageostrophic pressure gradient.* One important conclusion from the analytical calculations of section 2 was that the ageostrophic pressure gradient plays a decisive role in favouring the eigenvectors directions of $\nabla \bar{\mathbf{u}}$ and the orientations ζ_{\pm}^r . This influence of the ageostrophic term was deduced from an analytical approximation of the projection of the pressure gradient $P_{\theta}(p'_1)$ on the orientation equation (see Eq. (25)). Figure 8 is a joint PDF of $P_{\theta}(p'_1)$ with the analytical approximation $\bar{\sigma}(r_{ow} + \cos \zeta')$. Figure 8 does not take into account the β -term; the equivalent figure with the β -term is shown in appendix B. The figure shows an ellipsoid centered around the point $(0, 0)$ which principal axis is close to the first bisecting line. The ratio between the major axis and the small axis is almost 1.5. It means that the analytical formula is significant and permits to capture the real pressure gradient behavior. Most of the points are localized around the point $(0,0)$: the fact that the pressure gradient projection is close to zero ($x=0$) for the eigenvectors directions ($y=0$) is thus confirmed numerically. The analytical approximation of $P_{\theta}(p'_1)$ even if it is derived from a strong assumption is thus significant and represents rather well the influence of the pressure gradient.

(v) *Alignment rationalization.* All previous results concerning the relative orientations of \mathbf{E} and \mathbf{D} are summarized by the sketch drawn in Fig. 9. The plot is obtained for a typical perturbation structure which is initially large scale. After 10 days, the spatial structure of the perturbation moves with the meanders of the jet and has a typical spatial scale comparable to the meanders. The dynamical characteristics of the different regions can be inferred from the orientation of the perturbation streamlines relatively to the shear. Regions between line a and line

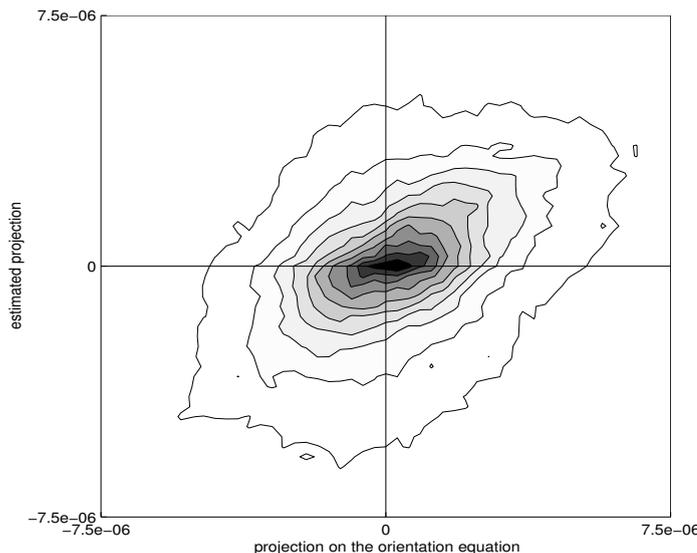


Figure 8. Joint PDF at $T=10$ days of the projection of the pressure gradient on the orientation equation $P_{\theta}(p'_1)$ with the analytical estimate $\bar{\sigma}(r_{ow} + \cos \zeta')$ conditioned by the same threshold as in Fig. 6.

d are productive regions: the perturbation can extract energy from the basic flow since the perturbation leans against the shear. Between line a and line c, the perturbation structure is the most efficient as \mathbf{E} and \mathbf{D} are close to colinearity: δ is large and the most probable orientation is $\zeta_{-}^{r_{ow}}$. Between line c and line d, the structure is less efficient but the kinetic energy is important (tight streamlines): this is a region of large extraction ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} > 0$) where the most probable orientations are $\zeta_{-}^{r_{ow}}$ and ζ_{-}^r . Line d is the line where \mathbf{E} and \mathbf{D} are perpendicular and corresponds almost to a line of maximum kinetic energy. Regions lying between lines d and e are destructive and the most probable structures are given by $\zeta_{+}^{r_{ow}}$ and ζ_{+}^r .

(b) Error fields

The following results present the spatial distribution of the error fields and their relation with the reference flow. An interesting result noticed by Snyder and Hamill (2002) for Lyapunov vectors, and Snyder et al. (2002) with a Monte-Carlo technique, is that the potential vorticity error field (q') is localized in regions of large gradients of potential vorticity of the reference flow ($|\nabla \bar{q}|$). This strong correlation is also present in our case at $T=10$ days (see Figs. 10(a) and (b)). This property was first proved analytically by Thompson (1986) for homogeneous, isotropic initial errors assumptions, and systematic numerical experiments in quasigeostrophic flows performed by the above authors suggest that this is a generic property. Even if a transient initial phase can occur for layers in the domain interior in which the PV error field is not yet stabilized, Snyder et al. (2002) systematically find that after 2 days (in an atmospheric quasi-geostrophic model) a concentration of PV error in regions of large PV gradient of the reference flow. In our case, at $T=10$ days all the layers present a strong correlation between the root-mean-square of the PV error field calculated with 200 perturbations (Fig.

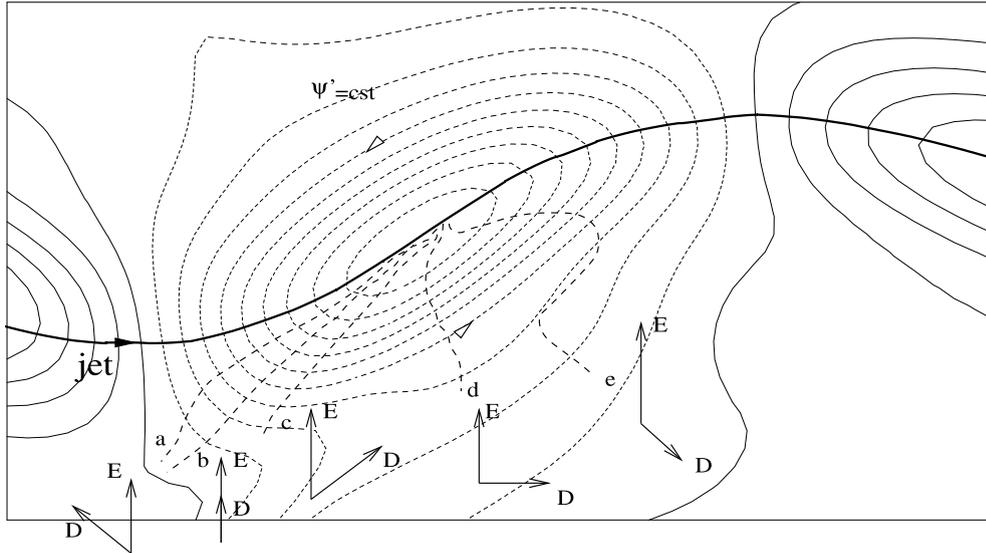


Figure 9. Sketch summarizing the different results of the alignment dynamics of a typical large spatial scale perturbation around the jet at $T=10$ days. The jet axis corresponds to the bold continuous line, perturbation streamfunction isolines are the thin continuous and dashed lines. Isolines of $\pi/2 + \zeta'$ for this particular perturbation correspond to the bold dashed lines: $-\pi/4$ (line a), 0 (line b), $\pi/4$ (line c), $\pi/2$ (line d), $3\pi/4$ (line e).

10(a)) and the PV gradient of the control flow (Fig. 10(b)). The same feature can be found with the relative vorticity variable as seen when comparing Fig. 10(c) with Fig. 10(d). Indeed relative vorticity errors (Fig. 10(c)) are localized in regions where the relative vorticity gradient of the reference flow (Fig. 10(d)) is large. For example, fields related to PV (Figs. 10(a) and (b)) only present one large maximum along the jet whereas those related to relative vorticity (Figs. 10(c) and (d)) have three bands of maximas along the jet with the largest one near the jet core. Moreover small scales structures of ω' in the region north of the jet axis are well represented by $|\nabla\bar{\omega}|$ and not at all by $|\nabla\bar{q}|$. This suggest that for a given scalar variable s , its error growth s' is localized in regions of strong $|\nabla\bar{s}|$ and the essential ingredient seems to be the linearization of $Ds/Dt = 0$ ($\bar{D}s'/Dt = -\mathbf{u}' \cdot \nabla\bar{s}$).

But what is occurring for the kinetic energy error growth? By analogy with scalar results and the linearized velocity equation (2), a comparison between the root-mean-square of the kinetic energy error field (u') and the velocity gradient tensor $\nabla\bar{\mathbf{u}}$ is tested in Fig. 11. u' maxima (Fig. 11(a)) are localized in regions where the norm of $\nabla\bar{\mathbf{u}}$ is large (Fig. 11(b)) (its norm is defined as $\sqrt{\bar{\sigma}^2 + \bar{\omega}^2}$) and is not always in regions of strong vorticity (Fig. 11(c)) or of strong rate of strain (Fig. 11(d)). For instance, the kinetic energy error field (Fig. 11(a)) presents a strong maximum at the jet exit that is also seen in $\bar{\sigma}$ (Fig. 11(d)) but not in $\bar{\omega}$ (Fig. 11(c)). By contrast, for the isolated eddy located in the lower left part of the figure, the kinetic error field, which is very strong inside the eddy core, is well correlated with $\bar{\omega}$ but not at all with $\bar{\sigma}$. The correct field which is well correlated with the kinetic error field is thus $\sqrt{\bar{\sigma}^2 + \bar{\omega}^2}$. This last result concerning

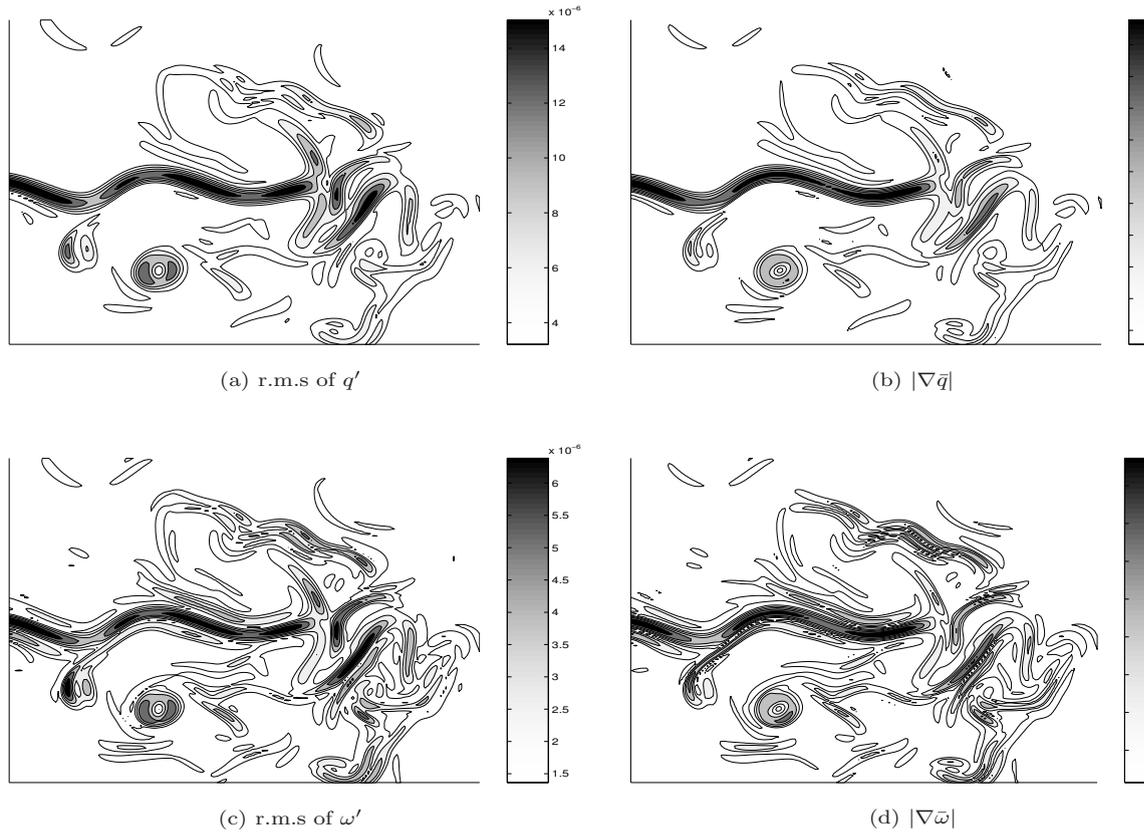


Figure 10. Comparison between the spatial structures of the perturbations and those of the reference flow; (a) root-mean-square of the potential vorticity (PV) error field (convergence to within 1% obtained with 200 perturbations), (b) magnitude of the horizontal PV gradient of the reference flow, (c) root-mean-square of the relative vorticity error field, (d) magnitude of the horizontal relative vorticity gradient of the reference flow.

kinetic energy errors localization is another property showing how the tensor $\nabla \bar{\mathbf{u}}$ influence the perturbation velocity field behavior. Another important remark is that regions of large perturbation kinetic energy (Fig. 11(a)) are well separated from regions where exponential generation rates are the strongest (Fig. 4(a)) as already noted in section 3(a). For example, along the jet, the largest growth rates are localized around the top of the meanders (regions b in Fig. 4(a)) whereas the kinetic energy error field has maxima in regions where the curvature of the jet is the smallest. This spatial separation is also clear for the isolated eddy: the perturbation kinetic energy is large in the center of the eddy whereas the exponential generation rates are localized around it (see Fig. 4(a)).

PERTURBATION GROWTH

19

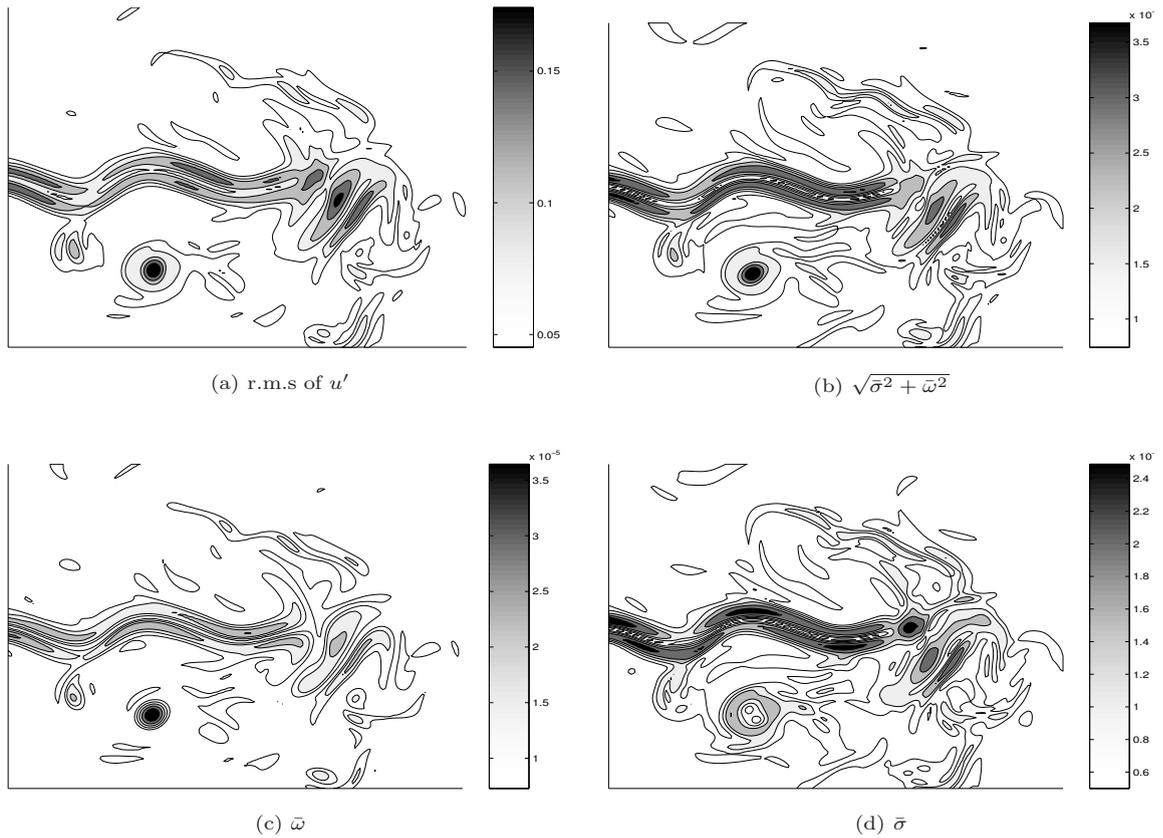


Figure 11. Comparison between spatial structures of the kinetic energy error field u' and spatial properties of the basic-state velocity gradient tensor $\nabla\bar{\mathbf{u}}$; (a) root-mean-square of the kinetic energy error field, (b) norm of $\nabla\bar{\mathbf{u}}$: $\sqrt{\bar{\sigma}^2 + \bar{\omega}^2}$, (c) relative vorticity $\bar{\omega}$, (d) rate of strain $\bar{\sigma}$.

4. CONCLUSION

In this paper, we focus on the generation term of the perturbation kinetic energy to get some information on how the error due to uncertain initial conditions in the model state can grow. As shown in MC, the generation term is the scalar product between two vectors \mathbf{E} and \mathbf{D} and is thus strongly dependent on the angle between \mathbf{E} and \mathbf{D} ($\pi/2 + \zeta'$ in our notations). We have shown that the preferred values of this angle ζ' can be found by analyzing the linearized momentum equations in their Lagrangian form and more precisely the orientation equations for the perturbation velocity which are inferred. A simple parametrization of the ageostrophic pressure term has been checked to be not too far from the real ageostrophic pressure gradient behavior. The preferred orientations which are predicted analytically are composed of two couples $(\zeta_{-}^{r_{ow}}, \zeta_{+}^{r_{ow}})$ and $(\zeta_{-}^r, \zeta_{+}^r)$. The couple $(\zeta_{-}^{r_{ow}}, \zeta_{+}^{r_{ow}})$ corresponds to the orientation of the eigenvectors of $\nabla\bar{\mathbf{u}}$, the couple $(\zeta_{-}^r, \zeta_{+}^r)$ corresponds to fixed

points of the orientation equation. It has been shown numerically with a Monte-Carlo technique that the perturbation angle ζ' is close to $\zeta_{-}^{r_{ow}}$ in regions of large exponential generation rate. In regions of large extraction, $\zeta_{-}^{r_{ow}}$ or ζ_{-}^r , are the two most probable values for ζ' . Finally in regions where extraction occurs the two significant orientations are those derived from the best approximate orientation equation which takes into account the ageostrophic pressure gradient. The unexpected result comes from the fact that the orientation associated to the eigenvector of $\nabla \bar{\mathbf{u}}$ is globally more relevant than the orientation which takes into account the rotation of \mathbf{D} . This result is still unclear to us but it should be kept in mind that our parametrization of the pressure gradient is rather coarse.

We have observed that the destructive orientations given by $\zeta' = \zeta_{+}^{r_{ow}}$ and by $\zeta' = \zeta_{+}^r$ are the preferred orientations in the energy destructive regions, which for other types of random ensembles can be almost as important as the productive regions. The generic property is the alignment with $\zeta_{-}^{r_{ow}}$ or ζ_{-}^r in productive regions and with $\zeta_{+}^{r_{ow}}$ or ζ_{+}^r in destructive regions, while the proportion between productive and destructive regions depends on the perturbation spatial scales and on the finite time length.

Concerning the alignment dynamics in regions of strong kinetic energy, we have found that \mathbf{E} and \mathbf{D} are perpendicular and these regions are characterized by no extraction.

These results on alignment dynamics provide an analytical tool for estimating the spatial localization of the exponential generation rate and its spatial average. The spatial average estimations $\ll \delta_{ow} \gg$ or $\ll \delta_r \gg$ are useful global diagnostics to quantify the kinetic energy exponential generation rate and provide a better evaluation of the predictability time of a given flow than the average rate of strain. The estimations of the local exponential generation rate could be used to locate the specific regions where unstable structures are the most probable; such regions would be characterized by both a strong rate of strain and a weak vorticity in the reference flow.

An intrinsic limitation of our Lagrangian approach is that we cannot systematically characterize the two main redistribution terms: the advection of the energy by the basic flow and the ageostrophic pressure work and we cannot explain why all the maxima of the kinetic energy error field are concentrated in regions where the norm of $\nabla \bar{\mathbf{u}}$ is large. We have found however numerically that this spatial distribution of the kinetic energy errors is mainly governed by the generation rate term which depends strongly on $\nabla \bar{\mathbf{u}}$.

The ageostrophic pressure gradient is also a function of the basic state strain field (see Eq. (18)) and thus participates to the spatial correspondences between $|\mathbf{u}'|$ and the norm of $\nabla \bar{\mathbf{u}}$. Further more accurate analytical analyses should be attempted to clarify the ageostrophic pressure gradient role.

Finally, we want to emphasize that our analytical diagnostics which have been obtained with a single simulation agree with the statistics obtained by the Monte-Carlo approach that have required 200 simulations. Such an analytical approach is thus much less CPU intensive than an ensemble prediction method.

ACKNOWLEDGEMENTS

We would like to thank Joe Tribbia for valuable comments on this manuscript. The calculations reported here were done on the NEC SX-5 of the IDRIS (Orsay,

France) (project # 021217) and during this work G. Rivière was supported by a DGA fellowship.

APPENDIX A

Stability analysis

Figure A.1 shows the stability diagram of (15b): the productive fixed point $\zeta_-^{r'}$ is stable whereas the destructive fixed point $\zeta_+^{r'}$ is unstable. Likewise $\zeta_-^{r_{ow}}$ is stable whereas $\zeta_+^{r_{ow}}$ is unstable (13b).

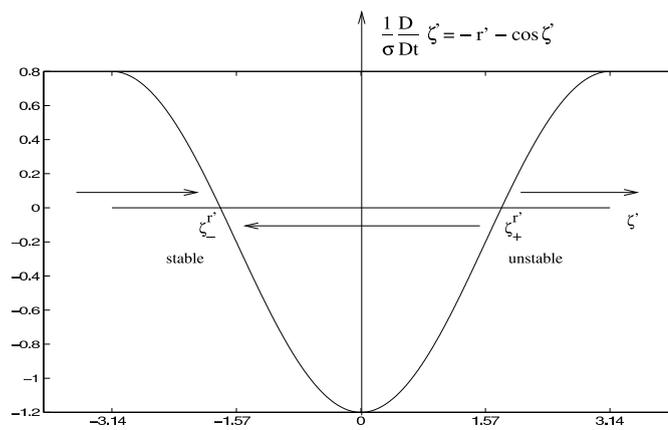


Figure A.1. Stability diagram of (15b) for $|r'| < 1$.

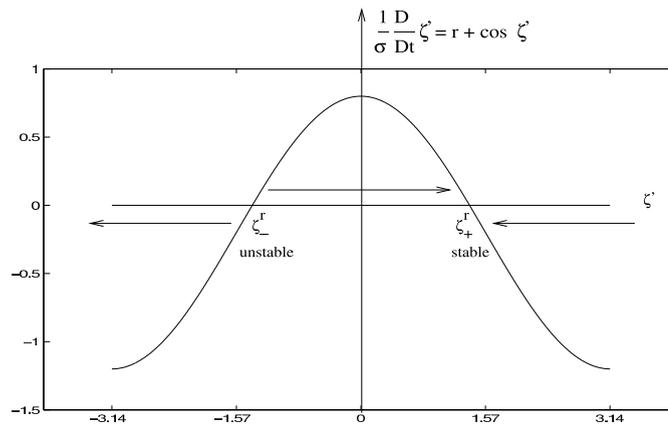


Figure A.2. Stability diagram of (27) for $|r| < 1$.

Figure A.2 corresponds to the stability analysis of the complete orientation equation (27): the productive fixed point ζ_-^r is unstable whereas the destructive one is stable. Similar results can be obtained for the eigenvectors directions when we consider the complete equation (26): the productive structure is unstable whereas the destructive one is stable. All these differences between the orientation

equations with the pressure term and those without it stem from the fact that the projection of the pressure gradient on the orientation equation is twice the opposite of the projection of $-\nabla\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}'$.

APPENDIX B

Influence of the β -effect on the orientation equation

In presence of β , equation (2) has the following form

$$\frac{\bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}'}{\mathbf{D}t} = -\nabla\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}' - \nabla p'_1 + \beta y \nabla \psi', \quad (\text{B.1})$$

which can also be written as

$$\frac{\bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}'}{\mathbf{D}t} = -\nabla\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}' - \nabla \hat{p}'_1 - \beta \psi' \mathbf{j}, \quad (\text{B.2})$$

where $\hat{p}'_1 \equiv p'_1 - \beta y \psi'$ (same definition as in equation 2.3 of Hua *et al.*, 1998) and \mathbf{j} is the unit vector in the meridional direction. By taking the divergence of (B.2), we obtain

$$\Delta \hat{p}'_1 = 2\{J(\bar{u}, v') + J(u', \bar{v})\} + \beta u', \quad (\text{B.3})$$

and then by inverting the Laplacian operator and applying the gradient operator

$$-\nabla \hat{p}'_1 - \beta \psi' \mathbf{j} = -\nabla[\Delta^{-1}\{2J(\bar{u}, v') + 2J(u', \bar{v})\}] - \nabla\{\Delta^{-1}(\beta u')\} - \beta \psi' \mathbf{j}. \quad (\text{B.4})$$

The first term on the rhs is analyzed in section 2(c) but the sum of the two other terms involves the β -term, and let us now consider the following vector $-\nabla(\Delta^{-1}(\beta u')) - \beta \psi' \mathbf{j}$ and its projection on the orientation equation. If we consider the monochromatic perturbation introduced in (19), we have $\beta u' = A\beta l \sin(kx + ly)$ and $-\beta \psi' \mathbf{j} = -A\beta \cos(kx + ly)\mathbf{j}$. By inverting the Laplacian for the first term $\Delta^{-1}(\beta u') = -A\beta l \sin(kx + ly)/(k^2 + l^2)$, and then by applying the gradient operator $-\nabla\{\Delta^{-1}(\beta u')\} = A\beta l \cos(kx + ly)\cdot\mathbf{k}/(k^2 + l^2)$. The vector that involves β , $-\nabla\{\Delta^{-1}(\beta u')\} - \beta \psi' \mathbf{j}$, is generally non zero but let us look at its projection on $\mathbf{e}'_{\perp} = \pm(k, l)/\sqrt{k^2 + l^2}$. As

$$-\nabla\{\Delta^{-1}(\beta u')\} \cdot \mathbf{e}'_{\perp} = \pm \frac{-A\beta l}{\sqrt{k^2 + l^2}} \cos(kx + ly)$$

and

$$-\beta \psi' \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}'_{\perp} = \pm \frac{A\beta l}{\sqrt{k^2 + l^2}} \cos(kx + ly),$$

we thus obtain $[-\nabla\{\Delta^{-1}(\beta u')\} - \beta \psi' \mathbf{j}] \cdot \mathbf{e}'_{\perp} = 0$ which means that for a monochromatic perturbation the β -term has no effect on the orientation equation.

This analytical estimate shows that taking into account the β -term does not change our main conclusion: the entire ageostrophic vector including the pressure and the β terms, $(-\nabla \hat{p}'_1 - \beta \psi' \mathbf{j})$, is zero for the eigenvectors directions of $\nabla\bar{\mathbf{u}}$.

APPENDIX C

The quasigeostrophic ocean model

The numerical code is an extension of the basic two-layer box ocean model by Holland (1978), and a detailed description can be found in Schmitz and Holland

(1986) or in Barnier et al. (1991). The physical variables are the streamfunction ψ_k in the layer k ($k=1,6$), the Coriolis parameter $f = f_0 + \beta y$, the steady sinusoidal wind stress τ at the ocean surface, the layer thickness H_k , the reduced gravity $g'_{k+\frac{1}{2}}$ between layers k and $k+1$, the biharmonic frictional coefficient A_4 and the bottom frictional coefficient R . The quasi-geostrophic equations of motion for potential vorticity q_k

$$q_k = \nabla^2 \psi_k + f + \frac{f_0^2}{H_k} \left\{ \frac{1}{g'_{k-\frac{1}{2}}} (\psi_{k-1} - \psi_k) - \frac{1}{g'_{k+\frac{1}{2}}} (\psi_k - \psi_{k+1}) \right\}, \quad (\text{C.1})$$

is given by

$$\frac{Dq_k}{Dt} = -A_4 \nabla^6 \psi_k + \delta_{k,1} \frac{\text{curl} \tau}{H_1} - \delta_{k,6} R \nabla^2 \psi_N. \quad (\text{C.2})$$

The vertical boundary conditions correspond to a rigid lid $w = 0$ at $z = 0$ and $z = H$, and the horizontal ones are determined by the free slip conditions $\nabla^2 \psi_k = 0$ on all horizontal boundaries. The auxilliary conditions $\int \int (\psi_k - \psi_{k+1}) dx dy = 0$ for each layer $k \in [1, 5]$ are used for model consistency. Equations (C.2) are finite-difference integrated on a rectangular basin with horizontal dimensions $L_x = 3600$ km and $L_y = 3200$ km. The horizontal grid resolution is of 10 km, and the different depths of the different layers are $H_1 = 300$ m, $H_2 = 350$ m, $H_3 = 400$ m, $H_4 = 500$ m, $H_5 = 1350$ m and $H_6 = 2100$ m. The steady wind stress is given by $\tau_0 = 0.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, the biharmonic coefficient by $A_4 = 1.5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-1}$ and the bottom friction coefficient by $R = 10^{-7} \text{ s}^{-1}$.

APPENDIX D

The Monte-Carlo method

In this section, the initialization method of this ensemble is presented. All wavenumbers are not excited in the same manner. In order to have physically relevant perturbations, we want that the kinetic energy of the perturbation field corresponds a k^{-3} spectrum. If a white noise is applied at each grid point for the perturbation horizontal PV gradient (in two dimensions a white noise corresponds to a k^{+1} spectrum), the spectrum of the perturbation potential vorticity q' is in k^{-1} and thus the kinetic energy has a k^{-3} spectrum. The horizontal PV gradient perturbation is initialized as

$$\nabla q' = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.1})$$

where ϵ_1, ϵ_2 are random numbers selected uniformly on the interval $[-1, 1]$ (white noise). By applying the divergence on $\nabla q'$ and then a three-dimensional Poisson solver, q' the perturbation potential vorticity has indeed a k^{-1} spectrum and the kinetic energy a k^{-3} spectrum for most of the wavenumbers. Such a spectrum is physically relevant and permits to obtain a mean error field which converges for an ensemble of 200 realizations.

REFERENCES

- Barnier, B., Hua, B. L. and Leprovoist, C. 1991 On the catalytic role of high baroclinic modes in eddy-driven large-scale circulations. *J. Phys. Oceanogr.*, **21**, 976–997

- 24
- G. RIVIÈRE *et al.*
- Cai, M. and Mak, M. 1990 On the basic dynamics of regional cyclogenesis. *J. Atmos. Sci.*, **47**, 1417–1442
- Frederiksen, J. S. 1983 Disturbances and eddy fluxes in Northern Hemisphere flows: Instability of three-dimensional January and July flows. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 836–855
- Hoskins, B. J., James, I. N. and White, G. H. 1983 The shape, propagation and mean-flow interaction of large-scale weather systems. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 1595–1612
- Holland, W. R. 1978 The role of mesoscale eddies in the general circulation of the ocean—Numerical experiment using a wind-driven quasi-geostrophic model. *J. Phys. Oceanogr.*, **8**, 363–392
- Hua, B. L., McWilliams, J. C. and Klein, P. 1998 Lagrangian accelerations in geostrophic turbulence. *J. Fluid Mech.*, **366**, 87–108
- Kucharski, F. and Thorpe, A. J. 2001 The influence of transient upper-level barotropic growth on the development of baroclinic waves. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **127**, 835–844
- Lapeyre, G., Klein, P. and Hua, B. L. 1999 Does the tracer gradient vector align with the strain eigenvectors in 2D turbulence. *Phys. Fluids A*, **11**, 3729–3737
- Mak, M. and Cai, M. 1989 Local barotropic instability. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 3289–3311
- Okubo, A. 1970 Horizontal dispersion of floatable particles in the vicinity of velocity singularities such as convergences. *Deep-Sea Res.*, **17**, 445–454
- Pierrehumbert, R. T. 1984 Local and global baroclinic instability of zonally varying flow. *J. Atmos. Sci.*, **41**, 2141–2162
- Schmitz, W. J. and Holland, W. R. 1986 Observed and modeled mesoscale variability near the Gulf Stream and Kuroshio Extension. *J. Geophys. Res.*, **91**, 9624–9638
- Simmons, A. J., Wallace, J. M. and Branstator, G. W. 1983 Barotropic wave propagation and instability, and the atmospheric teleconnection patterns. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 1363–1392
- Snyder, C. and Hamill, T. M. 2002 Lyapunov stability of a turbulent baroclinic jet. *Submitted to J. Atmos. Sci.*,
- Snyder, C., Hamill, T. M. and Trier, S. B. 2002 Linear evolution of error covariances in a quasigeostrophic model. *Submitted to Mon. Weather Rev.*,
- Straub, D. N. 2002 Instability of 2D flows to hydrostatic 3D perturbations. *J. Atmos. Sci.*, **60**, 79–102
- Thompson, P. D. 1986 A simple approximate method of stochastic-dynamic prediction for small initial errors and short range. *Mon. Weather Rev.*, **114**, 1709–1715
- Weiss, J. 1991 The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional turbulence. *Physica D*, **48**, 273–294

B Article III : Perturbation growth in terms of baroclinic alignment properties

Q. J. R. Meteorol. Soc. (2002), **128**, pp. 1–25

Perturbation growth in terms of baroclinic alignment properties

By G. RIVIÈRE^{1*}, B.L. HUA² and P. KLEIN²

¹*Laboratoire de Météorologie Dynamique, France*

²*Laboratoire de Physique des Océans, France*

SUMMARY

Mechanisms leading to perturbation growth in complex time-dependent quasigeostrophic (QG) flows is addressed in the present paper. The dynamics of small 3-dimensional perturbations is studied by writing the complete set of the linearized local QG equations. An analytical diagnostic based on an analysis of each term of these equations show that the preferred three-dimensional structures of the perturbations at each grid point are related to the eigenvectors directions of a matrix noted \mathbf{A} which is the 3D generalization of the basic-state strain-rate tensor. The matrix \mathbf{A} has a degenerate form and depends on both the horizontal deformation and the vertical shear of the unperturbed reference flow. By using a nonlinear Monte-Carlo technique, these preferred three-dimensional structures are shown to be the most probable ones. This provides a simple analytical diagnostic quantifying the barotropic and baroclinic energy conversion terms from the reference flow to the perturbations. An interesting outcome is that the maxima of the total energy error field are localized in regions where the norm of \mathbf{A} is large.

KEYWORDS: Perturbation growth Local baroclinic instability Alignment dynamics

1. INTRODUCTION

The understanding of perturbation dynamics in spatially and temporally complex flows is crucial to progress in various atmospheric and oceanic problems. Mechanisms leading to forecast errors in meteorology and oceanography due to uncertain initial conditions (the so-called initial error growth) can be viewed as the growth of small perturbations that extract energy from a reference flow. The study of perturbation growth not only permits to handle the predictability problem but is also useful to explore dynamical aspects of phenomena with various spatial-time scales such as cyclogenesis processes and Storm-Tracks behaviors.

Two types of research can be easily distinguished to study perturbation dynamics. Historically, since the works of Eady (1949) and Charney (1947) on normal modes in steady parallel flows, there has been an intensive area of research to develop analytical calculations to quantify the growth of disturbances in analytically predefined basic states. The different improvements have consisted of considering more complex basic states but also of taking into account the whole set of perturbations, i.e both modal and non modal perturbations (e.g Farrell, 1982; Farrell, 1989). However, there is usually a big gap between these basic states that permit analytical calculations and realistic flows. Another category of research involve numerical models that simulate more accurately the behavior of realistic flows and consist of perturbing the basic state with different types of dynamically relevant perturbations: singular vectors, normal modes, adjoint modes, Lyapunov vectors and bred modes (Buizza and Palmer, 1995; Szunyogh et al., 1997; Frederiksen, 2000). All the results developed by this second type of studies are numerical and not analytical and have the disadvantage to quantify the growth of perturbations only globally not locally. Our approach in the present paper is different from these two types of studies since our goal is to develop analytical and local diagnosis -in terms of alignment properties of the

* Corresponding author: Laboratoire de Météorologie Dynamique, ENS, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France. e-mail: griviere@lmd.ens.fr

© Royal Meteorological Society, 2002.

perturbations- to describe the statistical characteristics of the growth of small perturbations in any time-dependent quasi-geostrophic flow.

A first approach by considering only barotropic processes (Rivière *et al.*, 2002a; referred to as RHK in the following) leads us to the following result: the most probable horizontal structures of the perturbations that have evolved for a finite time (corresponding approximately to 5 straining time scales of the reference flow) can be analytically diagnosed with the knowledge of the reference flow, more specifically with the help of its velocity gradient tensor and the rotation rate of the principal axes of its strain rate tensor. The analytical diagnostics permit to get the average barotropic conversion rate of kinetic energy from the basic flow to the perturbations in terms of alignment dynamics. It was shown that the alignment dynamics of the perturbation by the basic flow can be expressed solely in terms of the properties of the basic flow. The paper was mainly motivated by the results of Mak and Cai (1989) concerning local barotropic instability. The same authors have then considered a case study where both barotropic and baroclinic processes govern the dynamics of the perturbations and have explained and analyzed the roles played by the different terms, especially the generation and redistribution terms involved in the local energy equations (Cai and Mak, 1990). In the same manner, the aim of the present paper is to generalize some results of RHK by analyzing the relations between barotropic and baroclinic conversion terms; one of the main question of the present paper is: can we analytically diagnose the most probable vertical structures and therefore the most probable baroclinic conversion rates with the help of the reference flow structure?

In RHK, the analogy with the dynamics of the horizontal tracer gradient growth was fruitful because of the similarity between the linearized momentum equations for the perturbations in their Lagrangian form and the horizontal tracer gradient equations. By drawing a parallel between the tracer gradient growth and the velocity perturbation growth, we suggest that the relationship between the vertical and the horizontal structures of the perturbations is similar to that between the vertical and the horizontal distributions of the tracer gradient. The present paper is therefore motivated by the work of Haynes and Anglade (1997) who have shown that the vertical-scale cascade of the tracers occurs at the same rate as the horizontal-scale cascade. More specifically, they show that because of the interaction between the horizontal strain and the vertical shear, the vertical tracer gradients increase at the same exponential rate as the horizontal tracer gradients. In the same direction, Hua *et al.* (1998) show that the vertical distribution of the tracer gradients is completely constrained by the horizontal one. Following the analogy with the 3-dimensional aspect of the tracer gradient evolution, the problematics of the present paper concern the dependence of the vertical structure of the perturbations on their horizontal structure, on the basic state horizontal deformation field and on the basic state vertical shear. These questions are related to the problem of the influence of the horizontal deformation field on the growth of baroclinic waves or frontal waves (Bishop 1993; Bishop and Thorpe 1994; Snyder and Joly 1998) which is complex when both the horizontal stretching and shearing terms act and are not yet well understood.

In section 2, the evolution of the perturbation is expressed in terms of a unique equation describing the evolution of a 3-dimensional vector which components are the spatial derivatives of the perturbation streamfunction. Analytical diagnostics of the preferred horizontal and vertical structures of the perturbations are inferred. Section 3 concerns numerical results about the most probable vertical

structures of the perturbations, the barotropic and baroclinic conversion terms, and the error fields. Section 4 is a discussion of our results.

2. PERTURBATION EQUATIONS IN QUASIGEOSTROPHIC FLOWS

(a) Time evolution of the perturbation energy

By following the decomposition done in Hua et al. (1998), the momentum equations with both barotropic and baroclinic terms (without β -effect and without viscous effects) can be written as

$$\frac{\bar{D}\bar{\mathbf{u}}}{Dt} = -\nabla\bar{p} - f_0\mathbf{k} \wedge \nabla\bar{\chi}, \quad (1)$$

where $\bar{D}/Dt = \partial/\partial t + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)$ denotes the geostrophic total derivative; $\bar{\mathbf{u}}$ is the basic-state geostrophic velocity field; \bar{p} is the sum of the ageostrophic pressure field and a scalar function derived from the rotational part of the ageostrophic horizontal velocity; $\bar{\chi}$ is the gradient part of the ageostrophic horizontal velocity. The β -effect is considered later in the paper. The ageostrophic vertical velocity \bar{w} is related to the divergence potential $\bar{\chi}$ by the divergence equation

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial z} = -\Delta\bar{\chi}, \quad (2)$$

and to the geostrophic streamfunction $\bar{\psi}$ by the prognostic equation characterizing the displacements of density isosurfaces

$$f_0 S \bar{w} = -\frac{\bar{D}}{Dt}(\partial_z \bar{\psi}), \quad (3)$$

where S is the mean stratification parameter. Linearization of equations (1)-(3) leads to the following equations

$$\frac{\bar{D}\mathbf{u}'}{Dt} = -\nabla\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}' - \nabla p' - f_0\mathbf{k} \wedge \nabla\chi', \quad (4)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial z} = -\Delta\chi', \quad (5)$$

$$\frac{\bar{D}}{Dt}(\partial_z \psi') = -(\mathbf{u}' \cdot \nabla)\partial_z \bar{\psi} - f_0 S w', \quad (6)$$

where $\nabla\bar{\mathbf{u}}$ is the basic-state velocity gradient tensor. Bars in (4), (5), (6) denote quantities associated with the reference flow, while primes denote perturbations. We define \mathbf{u}'_3 as a 3D vector representing the three components involved in the total perturbation energy, i.e., u' , v' (related to the kinetic energy) and $(\partial_z \psi')/\sqrt{S}$ (related to the potential energy). Equations (4) and (6) may be rewritten together to form a 3-dimensional vector equation

$$\frac{\bar{D}\mathbf{u}'_3}{Dt} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}'_3 - \nabla p' - f_0\mathbf{k} \wedge \nabla\chi' - f_0\sqrt{S}w'\mathbf{k}, \quad (7)$$

where

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \partial_x \bar{u} & \partial_y \bar{u} & 0 \\ \partial_x \bar{v} & \partial_y \bar{v} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z \bar{v} & -\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z \bar{u} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_3 \equiv \begin{pmatrix} -\partial_y \psi' \\ \partial_x \psi' \\ \frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z \psi' \end{pmatrix}, \quad (8)$$

4

G. RIVIÈRE *et al.*

and (u, v) is the velocity vector in the Cartesian coordinates (Ox, Oy) . Hereafter, we will call the gradient $-\nabla p'$, the barotropic ageostrophic vector and will be denoted as \mathbf{v}_p . The vector $-f_0 \mathbf{k} \wedge \nabla \chi' - f_0 \sqrt{S} w' \mathbf{k}$, will be called the baroclinic ageostrophic vector and will be denoted as $\mathbf{v}_{\chi, w}$. The advantage of formulation (7) is that the 3-dimensional perturbation properties can be studied by analyzing the preferential alignments of the vector \mathbf{u}'_3 as it was done for \mathbf{u}' in RHK in a barotropic context. The normalization of the vertical coordinate z of \mathbf{u}'_3 by \sqrt{S} relates its norm to the perturbation total energy T'

$$T' \equiv \frac{|\mathbf{u}'_3|^2}{2} = \frac{1}{2} \{ (\partial_x \psi')^2 + (\partial_y \psi')^2 + (\frac{1}{\sqrt{S}} \partial_z \psi')^2 \}. \quad (9)$$

By applying the operator $(-\partial_{y'}, \partial_{x'}, \partial_{z'}/\sqrt{S})$ to Eq. (7) we obtain the linearized perturbation potential vorticity equation without the β -term

$$\frac{\bar{D}q'}{Dt} = -\mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{q}, \quad (10)$$

where

$$q = \nabla^2 \psi + \partial_z \frac{1}{S} \partial_z \psi. \quad (11)$$

Let us recall the physical interpretation of the equations for the kinetic energy (denoted $K' \equiv |\mathbf{u}'|^2/2$), the potential energy (denoted $P' \equiv (\partial_z \psi')^2/2S$) and total energy (T') as done by Cai and Mak (1990). The kinetic energy equation can be obtained from (4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial K'}{\partial t} &= -\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla K' + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{u}' \cdot \nabla p' - \mathbf{u}' \cdot (f_0 \mathbf{k} \wedge \nabla \chi') \\ &= -\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla K' - \nabla \cdot (p' \mathbf{u}') - \nabla \cdot (\psi' f_0 \nabla \chi') - \frac{\partial}{\partial z} (f_0 \psi' w') + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{T}_3, \end{aligned} \quad (12)$$

and the potential energy equation can be obtained from (6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial P'}{\partial t} &= -\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla P' + \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \\ &= -\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla P' + \mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h + \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{T}_3, \end{aligned} \quad (13)$$

where

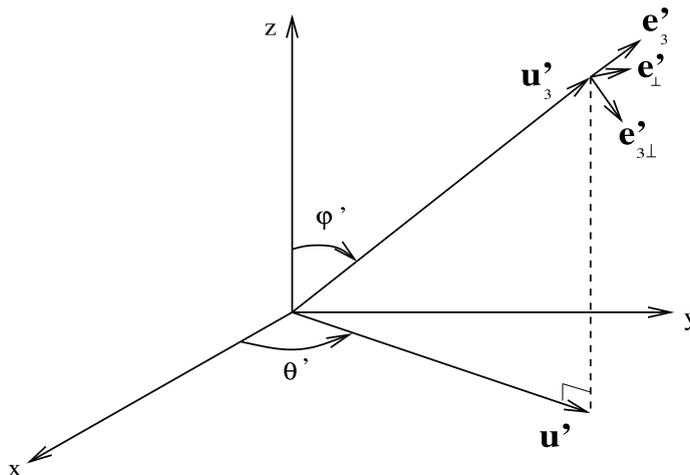
$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \left\{ \frac{1}{2} (v'^2 - u'^2), -u'v' \right\}, \\ \mathbf{D} &= (\bar{\sigma}_n, \bar{\sigma}_s), \end{aligned} \quad (14)$$

and

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (u', v', f_0 \sqrt{S} w') \frac{1}{\sqrt{S}} \partial_z \psi', \\ \mathbf{T} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{S}} \partial_z \bar{v}, \frac{1}{\sqrt{S}} \partial_z \bar{u}, -1 \right). \end{aligned} \quad (15)$$

The total energy equation can be obtained by summing (12) and (13)

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = -\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla T' - \nabla \cdot (p' \mathbf{u}') - \nabla \cdot (\psi' f_0 \nabla \chi') - \frac{\partial}{\partial z} (f_0 \psi' w') + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h. \quad (16)$$

Figure 1. Angles defining the direction of the vector \mathbf{u}'_3 .

The term $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ is called by Cai and Mak the barotropic energy generation rate because it enables the perturbation energy to grow globally by barotropic extraction, while the term $\mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h$ is the baroclinic energy generation rate that allows the perturbation to grow baroclinically. The term $-\mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{T}_3$ represents the conversion rate from potential to kinetic energy and is thus not included in the total energy equation (16). The other terms are just redistribution terms: the advection terms $-\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla K'$, $-\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla P'$ and $-\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla T'$ are respectively the horizontal redistribution terms of kinetic, potential and total energy due to the advection of the basic flow, $-\nabla \cdot (p' \mathbf{u}')$ redistributes energy horizontally and corresponds to the barotropic ageostrophic component, $-\nabla \cdot (\psi' f_0 \nabla \chi')$ represents the horizontal convergence of the energy flux by the irrotational ageostrophic wind and $-\frac{\partial}{\partial z}(f_0 \psi' w')$ is the vertical flux of energy. The last two terms form the baroclinic ageostrophic component.

Since we shall focus on the spatial structures of the perturbations, the 3-dimensional vector \mathbf{u}'_3 is decomposed in spherical coordinates (noted θ' , φ') as shown in Fig. 1. In these coordinates, the vector \mathbf{u}'_3 can be written as

$$\mathbf{u}'_3 = |\mathbf{u}'_3|(\cos \theta' \sin \varphi', \sin \theta' \sin \varphi', \cos \varphi') = |\mathbf{u}'_3|(\sin \varphi' \mathbf{e}' + \cos \varphi' \mathbf{k}) = |\mathbf{u}'_3| \mathbf{e}'_3, \quad (17)$$

with \mathbf{e}'_3 (resp. \mathbf{e}') denoting the unit vector which points in the same direction as \mathbf{u}'_3 (resp. \mathbf{u}'). Figure 1 summarizes the different definitions. The angle φ' is related to the ratio between the kinetic energy and potential energy of the perturbation

$$|\tan \varphi'| = \frac{|\mathbf{u}'|}{|\frac{1}{\sqrt{s}} \partial_z \psi'|} = \sqrt{\frac{K'}{P'}}. \quad (18)$$

Parameters such as the vorticity $\bar{\omega}$, the normal and shear strain rates, $\bar{\sigma}_n$, $\bar{\sigma}_s$ and the angle $\bar{\phi}$ of the principal axes of the basic-state strain-rate tensor can be

6

G. RIVIÈRE *et al.*

defined as in RHK

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_n &\equiv \partial_x \bar{u} - \partial_y \bar{v}, \quad \bar{\sigma}_s \equiv \partial_x \bar{v} + \partial_y \bar{u}, \\ \bar{\omega} &\equiv \partial_x \bar{v} - \partial_y \bar{u}, \quad \bar{\sigma} \equiv \sqrt{\bar{\sigma}_n^2 + \bar{\sigma}_s^2}, \\ (\bar{\sigma}_s, \bar{\sigma}_n) &= \bar{\sigma}(\cos 2\bar{\phi}, \sin 2\bar{\phi}), \quad \zeta' \equiv 2(\theta' + \bar{\phi}).\end{aligned}\tag{19}$$

We define also the vertical shear strain rate $\bar{\sigma}_z$ and the angle $\bar{\alpha}_z$ as

$$\left(\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z \bar{u}, \frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z \bar{v}\right) = \bar{\sigma}_z(\cos \bar{\alpha}_z, \sin \bar{\alpha}_z),\tag{20}$$

with $\bar{\sigma}_z \geq 0$. The generation terms $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ and $\mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h$ can be written with our notations as

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = -T' \bar{\sigma} \sin^2 \varphi' \sin \zeta',\tag{21}$$

$$\mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h = T' \bar{\sigma}_z \sin 2\varphi' \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z).\tag{22}$$

We define the following exponential generation rates for the total energy of the perturbations

$$\delta^b \equiv \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{T'} = -\bar{\sigma} \sin^2 \varphi' \sin \zeta',\tag{23}$$

$$\delta^c \equiv \frac{\mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h}{T'} = \bar{\sigma}_z \sin 2\varphi' \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z),\tag{24}$$

$$\delta^t \equiv \delta^b + \delta^c.\tag{25}$$

δ^b is the barotropic exponential generation rate of energy, δ^c the baroclinic exponential generation rate of energy and δ^t the total exponential generation rate of energy. In the usual baroclinic situation of a zonal jet with a positive vertical shear, we have $\partial_z \bar{v} = 0$ and $\partial_z \bar{u} > 0$ which leads to $\bar{\alpha}_z = 0$. In order to obtain a positive baroclinic growth rate $\delta^c > 0$, the condition $\sin \theta' \sin 2\varphi' > 0$ is required (see Eq. (24)) which leads to $\partial_x \psi' \partial_z \psi' > 0$. We recover the usual condition for perturbation growth: the structure of the perturbation must lean against the shear. The physical interpretation of the exponential barotropic generation rate of total energy have been already analyzed in RHK since δ^b is directly related to $\delta \equiv -\bar{\sigma} \sin \zeta'$ the exponential generation rate of kinetic energy ($\delta^b = \delta \sin^2 \varphi'$). In order to compare the relative importance of the baroclinic processes with respect to the barotropic ones, we define the ratio of the barotropic generation rate over the baroclinic one

$$R^{bc} \equiv \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{\mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h} = \frac{\delta^b}{\delta^c}.\tag{26}$$

The barotropic and baroclinic conversion rates of basic state energy into perturbation energy (Eqs. (23)-(24)) require to explicit the orientation (θ' and φ') of the perturbation in terms of properties of the reference flow. This is the focus of the next two sections.

(b) Influence of \mathbf{A} on the orientation equations

Let us first consider the dynamical influence of \mathbf{A} on the orientation of the perturbation velocity vector, the influence of the ageostrophic terms will be

considered in the next section. In that case, a closed form is obtained for \mathbf{u}'_3

$$\frac{\bar{D}\mathbf{u}'_3}{Dt} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}'_3, \quad (27)$$

i.e. the perturbation velocity field \mathbf{u}'_3 is simply determined through its stretching by the basic-state shear \mathbf{A} . With this simplified system, we can recover the exact linearized perturbation vorticity equation (10) by applying the operator $(-\partial_{y'}, \partial_{x'}, \partial_{z'}/\sqrt{S})$ to Eq. (27). Let us derive from Eq. (27) the equation for the norm $|\mathbf{u}'_3|$ and the orientation equations for θ' and φ' which are respectively obtained by projecting Eq. (27) on the 3 perpendicular unit vectors $\mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_{3\perp} \equiv \cos \varphi' \mathbf{e}' - \sin \varphi' \mathbf{k}$ and $\mathbf{e}'_{\perp} \equiv (-\sin \theta', \cos \theta')$

$$\frac{1}{|\mathbf{u}'_3|^2} \frac{\bar{D}|\mathbf{u}'_3|^2}{Dt} = -\bar{\sigma} \sin \zeta' \sin^2 \varphi' + \bar{\sigma}_z \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z) \sin 2\varphi', \quad (28a)$$

$$\frac{\bar{D}\theta'}{Dt} = \frac{1}{2}(-\bar{\omega} - \bar{\sigma} \cos \zeta') = -\frac{\bar{\sigma}}{2}(r_{ow} + \cos \zeta'), \quad (28b)$$

$$\frac{\bar{D}\varphi'}{Dt} = -\sin \varphi' \left\{ \frac{\bar{\sigma}}{2} \sin \zeta' \cos \varphi' + \bar{\sigma}_z \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z) \sin \varphi' \right\}, \quad (28c)$$

where

$$r_{ow} \equiv \frac{\bar{\omega}}{\bar{\sigma}}. \quad (29)$$

The evolution of θ' depends on θ' and on the basic-state components and is determined by the same equation as in RHK; φ' evolution depends on both θ', φ' and on the basic-state terms. The norm evolution (28a) depends on the two angles θ', φ' and on the basic-state components. Let us note a property that comes from the degenerate form of the matrix \mathbf{A} : the time evolution of the horizontal structure, defined by the angle θ' , only depends on itself whereas the evolution of the vertical structure, defined by the angle φ' , is dependent on both the horizontal structure θ' and the vertical structure φ' . The same properties have been shown for the 3-dimensional tracer gradient by Hua et al. (1998) which evolution depends on a degenerate matrix very similar to \mathbf{A} .

The evolution of the perturbation structure is therefore strongly dependent on the tensor \mathbf{A} . One type of preferential orientation is linked with the eigenvectors directions of \mathbf{A} by analogy with the 2-dimensional system of RHK. Eigenvalues of \mathbf{A} are real if $|r_{ow}| < 1$ and the two non trivial eigenvectors directions verifying $\bar{D}\theta'/Dt = 0$ and $\bar{D}\varphi'/Dt = 0$ are given by

$$\theta_{\pm}^{r_{ow}} \equiv \frac{1}{2} \{ \zeta_{\pm}^{r_{ow}} - 2\bar{\phi} \} = \frac{1}{2} (\pm \arccos(-r_{ow}) - 2\bar{\phi}), \quad (30a)$$

$$\varphi_{\pm}^{r_{ow}} \equiv \arctan \left\{ \frac{-\frac{\bar{\sigma}}{2} \sin \zeta_{\pm}^{r_{ow}}}{\bar{\sigma}_z \sin(\theta_{\pm}^{r_{ow}} - \bar{\alpha}_z)} \right\}. \quad (30b)$$

Each couple $(\theta_{-}^{r_{ow}}, \varphi_{-}^{r_{ow}})$ and $(\theta_{+}^{r_{ow}}, \varphi_{+}^{r_{ow}})$ only defines one orientation of the direction of each eigenvector; the other orientation is given by $(\theta_{-}^{r_{ow}} + \pi, \pi - \varphi_{-}^{r_{ow}})$ and $(\theta_{+}^{r_{ow}} + \pi, \pi - \varphi_{+}^{r_{ow}})$. We recover the result of RHK that the preferential horizontal direction is given by $\zeta_{\pm}^{r_{ow}} = \pm \arccos(-r_{ow})$, with $\zeta_{-}^{r_{ow}}$ inducing barotropic growth and $\zeta_{+}^{r_{ow}}$ barotropic decay. The additional information given by the eigenvectors of \mathbf{A} concerns the vertical structure and the associated baroclinic processes. For

$|r_{ow}| < 1$, there exists two preferential vertical directions, $\varphi' = \varphi_{\pm}^{r_{ow}}$, corresponding to the two eigenvectors with non zero eigenvalues; $\varphi_{-}^{r_{ow}}$ implies baroclinic growth and $\varphi_{+}^{r_{ow}}$ baroclinic decay. Formulae (30a) and (30b) can be expressed in terms of the basic-state strain-rate tensor as

$$\theta_{\pm}^{r_{ow}} = \frac{1}{2} \left\{ \pm \arccos\left(-\frac{\bar{\omega}}{\bar{\sigma}}\right) - 2\bar{\phi} \right\}, \quad (31a)$$

$$\varphi_{\pm}^{r_{ow}} = \arctan \left[\mp \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\bar{\sigma}^2 - \bar{\omega}^2}}{\bar{\sigma}_z \sin \left\{ \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{\bar{\omega}}{\bar{\sigma}}\right) - \bar{\phi} - \bar{\alpha}_z \right\}} \right]. \quad (31b)$$

The eigenvector direction determined by the couple $(\theta_{-}^{r_{ow}}, \varphi_{-}^{r_{ow}})$ corresponds to perturbation growth due to both barotropic and baroclinic growth and the corresponding exponential generation rates are

$$\delta_{ow}^b \equiv -\bar{\sigma} \sin \zeta_{-}^{r_{ow}} \sin^2 \varphi_{-}^{r_{ow}} > 0, \quad (32a)$$

$$\delta_{ow}^c \equiv \bar{\sigma}_z \sin 2\varphi_{-}^{r_{ow}} \sin(\theta_{-}^{r_{ow}} - \bar{\alpha}_z) = -\bar{\sigma} \sin \zeta_{-}^{r_{ow}} \cos^2 \varphi_{-}^{r_{ow}} > 0, \quad (32b)$$

$$\delta_{ow}^t \equiv -\bar{\sigma} \sin \zeta_{-}^{r_{ow}} = \sqrt{\bar{\sigma}^2 - \bar{\omega}^2} > 0, \quad (32c)$$

while the eigenvector direction determined by the couple $(\theta_{+}^{r_{ow}}, \varphi_{+}^{r_{ow}})$ leads to perturbation decay. We remark that the total exponential generation rate of the eigenvectors is only dependent on the horizontal components of the basic-state tensor \mathbf{A} because of its degenerate form; it does not mean however that baroclinic processes are less effective than barotropic ones: for example, if $0 < \varphi_{-}^{r_{ow}} < \pi/4$, we have $\delta_{ow}^c > \delta_{ow}^b$ and the baroclinic conversion rate is larger than the barotropic one.

An analytical estimate of the ratio between barotropic and baroclinic generation rates R^{bc} is given by the productive eigenvector structure of \mathbf{A}

$$R_{ow}^{bc} \equiv \frac{\delta_{ow}^b}{\delta_{ow}^c} = \tan^2 \varphi_{-}^{r_{ow}}, \quad (33)$$

which corresponds exactly to the ratio of the kinetic energy over the potential energy of the perturbation for the same structure. Indeed if $\varphi' \simeq \varphi_{-}^{r_{ow}}$, we have both $K'/P' = \tan^2 \varphi' \simeq \tan^2 \varphi_{-}^{r_{ow}}$ and $R^{bc} \simeq R_{ow}^{bc} = \tan^2 \varphi_{-}^{r_{ow}}$, i.e. for the productive eigenvector structure, the ratio of the kinetic energy over the potential energy of the perturbation is equal to the ratio of the barotropic conversion term over the baroclinic one. This analytical estimate of the two ratios K'/P' and $R^{bc} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} / \mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h$ can be expressed in terms of the basic-state by using (31b) as

$$R_{ow}^{bc} = \tan^2 \varphi_{-}^{r_{ow}} = \frac{\frac{1}{4}(\bar{\sigma}^2 - \bar{\omega}^2) \{ (\bar{\sigma}_s - \bar{\omega})^2 + (\bar{\sigma}_n + \sqrt{\bar{\sigma}^2 - \bar{\omega}^2})^2 \}}{\left\{ \frac{1}{\sqrt{S}} \partial_z \bar{u} (\bar{\sigma}_n + \sqrt{\bar{\sigma}^2 - \bar{\omega}^2}) + \frac{1}{\sqrt{S}} \partial_z \bar{v} (\bar{\sigma}_s - \bar{\omega}) \right\}^2}. \quad (34)$$

(c) Analytical approximations of the ageostrophic terms

The ageostrophic terms have to be taken into account, and the main purpose of this section is to parametrize their influence. Another form of Eq. (7) can be useful to diagnose the perturbation ageostrophic terms

$$\frac{\bar{\mathbf{D}}}{\bar{\mathbf{D}}t} \nabla_3 \psi' = \begin{bmatrix} \partial_x \bar{u} & \partial_x \bar{v} & 0 \\ \partial_y \bar{u} & \partial_y \bar{v} & 0 \\ \partial_z \bar{u} & \partial_z \bar{v} & 0 \end{bmatrix} \cdot \nabla_3 \psi' - \mathbf{k} \wedge \nabla p' - f_0 \nabla \chi' - f_0 S w' \mathbf{k}, \quad (35)$$

where

$$\nabla_3 \psi' = \begin{pmatrix} \partial_x \psi' \\ \partial_y \psi' \\ \partial_z \psi' \end{pmatrix}. \quad (36)$$

By taking the 3-dimensional curl of (35) (denoted $\nabla_3 \wedge$), we obtain diagnostics of the perturbation ageostrophic terms

$$\mathbf{C}' \equiv -\nabla_3 \wedge \frac{\bar{D}}{Dt} \nabla_3 \psi' = - \begin{pmatrix} J_{yz}(\bar{u}, v') + J_{yz}(u', \bar{v}) \\ J_{zx}(\bar{u}, v') + J_{zx}(u', \bar{v}) \\ J_{xy}(\bar{u}, v') + J_{xy}(u', \bar{v}) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -f_0 \partial_y (S w') + \partial_{yz} (f_0 \chi') \\ f_0 \partial_x (S w') - \partial_{xz} (f_0 \chi') \\ \Delta p' \end{pmatrix}, \quad (37)$$

where J denotes the Jacobian operator. The \mathbf{C}' -vector defined above is the linearization of the \mathbf{C} -vector introduced by Xu (1992) which characterizes the secondary ageostrophic circulation. As the horizontal component of the \mathbf{C} -vector (denoted \mathbf{C}_H) is related to the vector $\mathbf{Q} \equiv -J_{xy}(\nabla \psi, \partial_z \psi)$ introduced by Hoskins, Draghici and Davies (1978) ($\mathbf{C}_H = \mathbf{Q} \wedge \mathbf{k}$), the linearized vectors verify the same relation $\mathbf{C}'_H = \mathbf{Q}' \wedge \mathbf{k}$. With Eq. (37) and Eq. (5), it is straightforward to obtain the linearized ageostrophic terms p' , χ' , w'

$$\Delta p' = 2\{J_{xy}(\bar{u}, v') + J_{xy}(u', \bar{v})\}, \quad (38a)$$

$$(\Delta + \partial_z \frac{1}{S} \partial_z) \Delta f_0 \chi' = -2 \partial_z \frac{1}{S} \nabla \cdot \mathbf{Q}', \quad (38b)$$

$$(\Delta + \frac{1}{S} \partial_z^2) w' = \frac{2}{f_0 S} \nabla \cdot \mathbf{Q}', \quad (38c)$$

where $\mathbf{Q}' = (J_{zx}, J_{zy})(\bar{u}, v') + (J_{zx}, J_{zy})(u', \bar{v})$. Some insight on the local dynamical influence of the ageostrophic terms may still be obtained by the following analytical diagnostic that considers a monochromatic perturbation

$$\psi'(x, y, z) = \text{Re}[A \exp\{i(kx + ly + mZ)\}], \quad (39)$$

where the Z -coordinate is related to the vertical coordinate z by the relation $\partial Z / \partial z = 1 / \sqrt{S}$. In appendix A, for this particular perturbation form, it is shown that if \mathbf{u}'_3 is an eigenvector of \mathbf{A} , the \mathbf{C}' -vector is trivial, $\mathbf{C}' = \mathbf{0}$ because of the Jacobian properties. The calculation is further extended to obtain the ageostrophic vectors in Eq. (7) by two additional assumptions: we will consider the coefficients of the matrix \mathbf{A} as slowly varying and S a constant. The relation obtained in RHK for the perturbation ageostrophic pressure gradient

$$\mathbf{v}_p = -\nabla p' = \bar{\sigma} (\cos \zeta' + r_{ow}) |\mathbf{u}'| \mathbf{e}'_{\perp}, \quad (40)$$

is still valid (see section 2.(c) of RHK), showing that the pressure gradient has just a projection on the orientation equation for θ' which is equal to

$$P_{\theta}(p') \equiv \frac{\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{e}'_{\perp}}{|\mathbf{u}'|} = \bar{\sigma} (\cos \zeta' + r_{ow}). \quad (41)$$

In appendix B, we detail the steps which lead to a similar result for the baroclinic ageostrophic vector

$$\mathbf{v}_{\chi, w} = 2 \sin \varphi' \left\{ \frac{\bar{\sigma}}{2} \sin \zeta' \cos \varphi' + \bar{\sigma}_z \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z) \sin \varphi' \right\} |\mathbf{u}'_3| \mathbf{e}'_{3\perp}. \quad (42)$$

The baroclinic ageostrophic vector has thus no projection on both \mathbf{e}'_3 , \mathbf{e}'_\perp but has a non trivial projection on $\mathbf{e}'_{3\perp}$

$$P_\varphi(\chi', w') \equiv \frac{\mathbf{v}_{\chi,w} \cdot \mathbf{e}'_{3\perp}}{|\mathbf{u}'_3|} = 2 \sin \varphi' \left\{ \frac{\bar{\sigma}}{2} \sin \zeta' \cos \varphi' + \bar{\sigma}_z \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z) \sin \varphi' \right\}. \quad (43)$$

The main result of our analytical approach, based on a monochromatic perturbation and a WKB assumption, is that the two ageostrophic vectors, \mathbf{v}_p and $\mathbf{v}_{\chi,w}$, locally influence the orientation of the vector \mathbf{u}'_3 but does not modify its norm: the barotropic ageostrophic vector \mathbf{v}_p modifies the horizontal orientation of \mathbf{u}'_3 while the baroclinic ageostrophic vector $\mathbf{v}_{\chi,w}$ modifies its vertical orientation. With the above assumptions, the ageostrophic redistribution terms in the total energy equation are trivial and equal to zero: it is not the case generally (see Cai and Mak, 1990). A weakness of our present approach is the absence of diagnostics of the ageostrophic redistribution terms, yet it provides an analytical approximation of the ageostrophic terms that intervene in the orientation equations of the vector \mathbf{u}'_3 . In section 3.1.4, the consistency of our approach is checked numerically.

In a monochromatic context, by assuming that the coefficients of the matrix \mathbf{A} are slowly varying, the complete perturbation system evolution has thus the following form

$$\frac{1}{|\mathbf{u}'_3|^2} \frac{\bar{D}|\mathbf{u}'_3|^2}{Dt} = -\bar{\sigma} \sin \zeta' \sin^2 \varphi' + \bar{\sigma}_z \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z) \sin 2\varphi', \quad (44a)$$

$$\frac{\bar{D}\theta'}{Dt} = -\frac{\bar{\sigma}}{2}(r_{ow} + \cos \zeta') + P_\theta(p') = \frac{\bar{\sigma}}{2}(r_{ow} + \cos \zeta'), \quad (44b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{D}\varphi'}{Dt} &= -\sin \varphi' \left\{ \frac{\bar{\sigma}}{2} \sin \zeta' \cos \varphi' + \bar{\sigma}_z \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z) \sin \varphi' \right\} + P_\varphi(\chi', w') \\ &= \sin \varphi' \left\{ \frac{\bar{\sigma}}{2} \sin \zeta' \cos \varphi' + \bar{\sigma}_z \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z) \sin \varphi' \right\}. \end{aligned} \quad (44c)$$

The ageostrophic terms do not change the directions of the preferred orientations determined by $\bar{D}\theta'/Dt = 0$ and $\bar{D}\varphi'/Dt = 0$ which are still the couples $(\theta_\pm^{r_{ow}}, \varphi_\pm^{r_{ow}})$. However we note that the direction given by the couple $(\theta_-^{r_{ow}}, \varphi_-^{r_{ow}})$ (resp. $(\theta_+^{r_{ow}}, \varphi_+^{r_{ow}})$) was stable (resp. unstable) without the ageostrophic terms and becomes unstable (resp. stable) by considering these additional terms (see appendix A of RHK for the stability analysis).

In appendix C, we show that in presence of the β -effect, for a monochromatic perturbation, the orientation equations are not modified (only the equation of $|\mathbf{u}'_3|$ is changed) and the eigenvectors directions $(\theta_-^{r_{ow}}, \varphi_-^{r_{ow}})$ and $(\theta_+^{r_{ow}}, \varphi_+^{r_{ow}})$ are thus still preferred directions for any quasigeostrophic flows on a β -plane.

In RHK, we have also found another preferred horizontal structure for the perturbation by deriving the horizontal orientation equation in strain coordinates of the basic-state. In the present case, we can also derive 3-dimensional equations in the horizontal strain coordinates and find another preferred 3-dimensional perturbation structure but numerical results have revealed that this second type of structure is less relevant than the eigenvectors structure of \mathbf{A} ; for simplicity, results for this second type of structure will be not shown. An approach that takes into account both horizontal and vertical strain coordinates has not been found.

3. NUMERICAL RESULTS IN A QUASIGEOSTROPHIC MODEL

As in RHK, results are given for the classical oceanic case of a wind-driven double gyre with a 6-layer quasi-geostrophic code in a rectangular basin. An example of such a circulation is shown in Fig. 1 of RHK for the reference flow and the detailed information about the numerical code is given in their appendix C. The same ensemble of 200 random perturbations that have evolved for 10 days is used here. Even if our analytical results come from linearized equations, we emphasize that the numerical results shown here are done with multiple runs of the fully non linear model, i.e each perturbation at $T=10$ days (and 20 days), is defined as the difference between two runs of the non linear code: a perturbed run and the reference run. All numerical results are obtained for perturbations within the area A at the end part of the jet (see Fig. 1 of RHK).

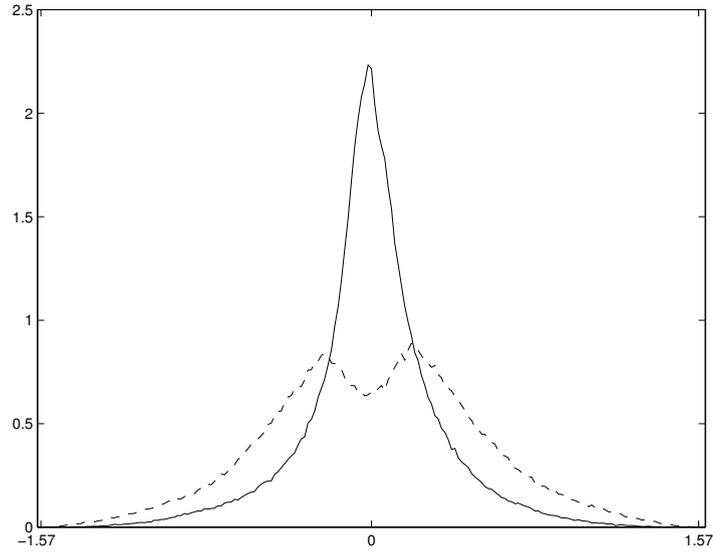
(a) *Alignment dynamics*(i) *Regions of large total energy extraction*

We first want to check numerically if the vertical structure defined by the eigenvector of \mathbf{A} corresponding to perturbation growth $(\theta_{-}^{r_{ow}}, \varphi_{-}^{r_{ow}})$ is the most probable vertical structure of the perturbations. As the eigenvector defines a direction property and not simply an orientation, we have to compare (θ', φ') with both $(\theta_{-}^{r_{ow}}, \varphi_{-}^{r_{ow}})$ and $(\theta_{-}^{r_{ow}} + \pi, \pi - \varphi_{-}^{r_{ow}})$. PDFs determining the most probable angle ζ' are plotted in RHK and $\theta_{-}^{r_{ow}}$ and $\theta_{-}^{r_{ow}} + \pi$ are represented by the same angle $\zeta_{-}^{r_{ow}} = 2(\theta_{-}^{r_{ow}} + \bar{\phi}) = 2(\theta_{-}^{r_{ow}} + \pi + \bar{\phi})$. In the present case, in order to know if φ' is aligned with the direction associated with an angle γ , the function $T(\varphi', \gamma)$ is defined as follows

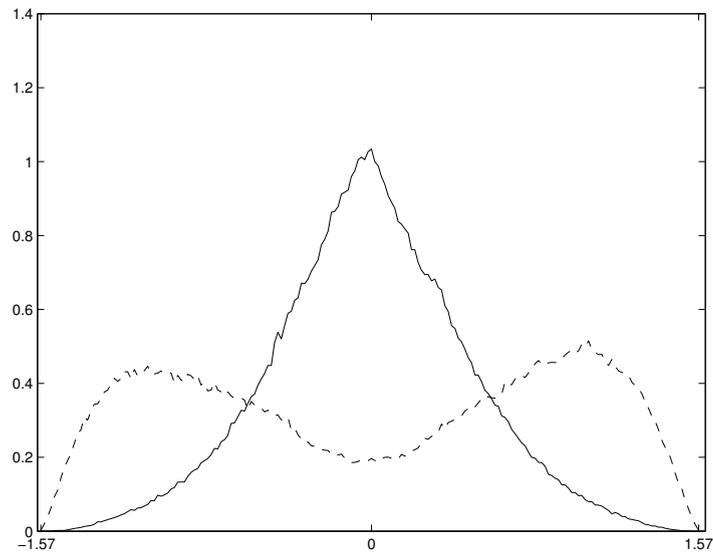
$$T(\varphi', \gamma) \equiv \begin{cases} \varphi' - \gamma & \text{if } |\varphi' - \gamma| < \pi/2 \\ \varphi' - (\pi - \gamma) & \text{if } |\varphi' - \gamma| > \pi/2 \end{cases} . \quad (45)$$

In Fig. 2, PDFs of $T(\varphi', \pi/2)$ (dash line) and $T(\varphi', \varphi_{-}^{r_{ow}})$ (continuous line) are shown. The PDF of $T(\varphi', \pi/2)$ in Fig. 2(a) shows that in the first layer, φ' is overall close to $\pi/2$, meaning that the perturbation is essentially horizontal and that the perturbation kinetic energy is stronger than the potential one. However the PDF of $T(\varphi', \pi/2)$ does not present a sharp peak and a non trivial vertical structure exists which is clearly much better diagnosed by the orientation $\varphi_{-}^{r_{ow}}$ as shown by the PDF of $T(\varphi', \varphi_{-}^{r_{ow}})$ in Fig. 2(a). There is therefore a clear alignment of φ' with the direction defined by $\varphi_{-}^{r_{ow}}$ in the first layer. This result is comparable to the result of Fig. 3 in RHK which shows that θ' aligns with $\theta_{-}^{r_{ow}}$. In the third layer (Fig. 2(b)), the alignment of φ' with $\varphi_{-}^{r_{ow}}$ is also present but has a less strong peak than in the first layer. The dash line in Fig. 2(b) representing the PDF of $T(\varphi', \pi/2)$ shows that by contrast with the first layer, the perturbation structure in the third layer, is far from a horizontal structure and has almost as much potential energy as kinetic energy. The same PDFs as in Fig. 2 were done for $T=20$ days (not shown here) and lead to the same conclusions. Interestingly, even if time scales of the baroclinic processes in such an oceanic case are approximately 20 days, a well-defined vertical structure appears already after 10 days as seen in Fig. 2.

In section 2.1, we have defined the total energy exponential generation rate derived from the eigenvector direction δ_{ow}^t and an intercomparison with the Monte-Carlo generation rate δ^t for 200 perturbations is performed in Fig. 3,

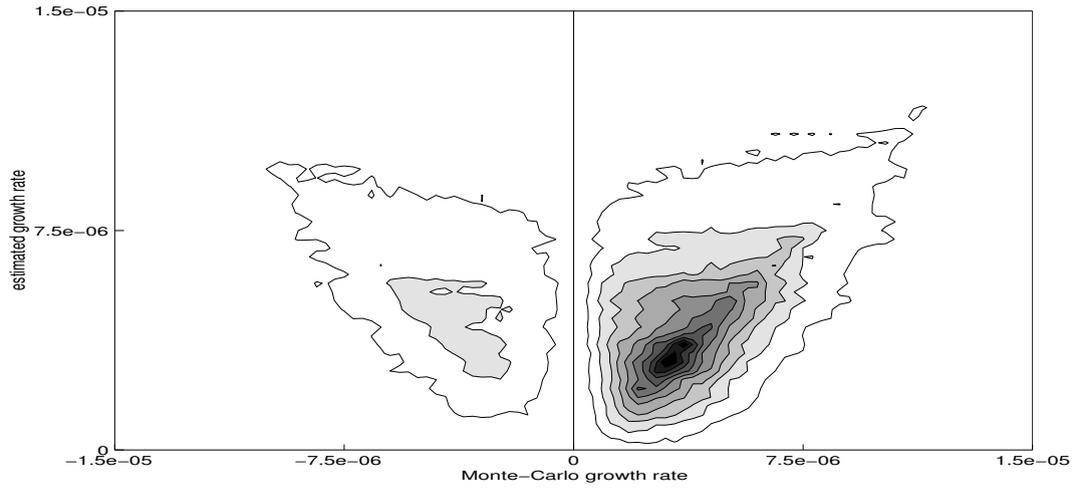


(a) 1st layer

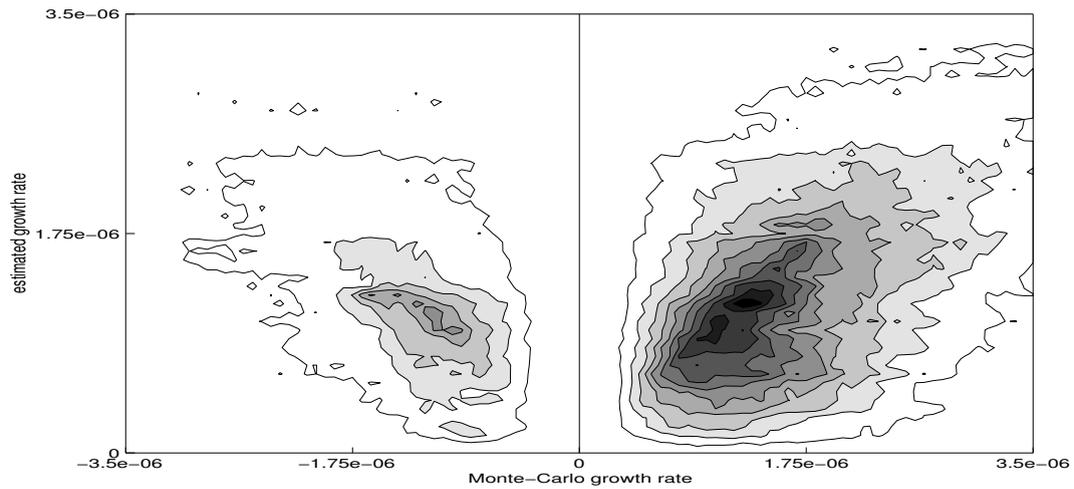


(b) 3rd layer

Figure 2. PDF at $T=10$ days of $T(\varphi', \pi/2)$ (dash line) and $T(\varphi', \varphi^{row})$ (solid line) conditioned by $|r_{ow}| < 1$ and $|\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h| > |\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h|_{max}/50$; (a) 1st layer, (b) 3rd layer. This statistic is obtained with an ensemble of 200 perturbations.



(a) 1st layer



(b) 3rd layer

Figure 3. Joint PDF at T=10 days of the total energy Monte-Carlo growth rate δ^t with the estimate δ_{ow}^t conditioned by $|r_{ow}| < 1$ and $|\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h| > |\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h|_{max}/200$.

by a joint PDF of δ^t with δ_{ow}^t in the first layer (Fig. 3(a)) and in the third layer (Fig. 3(b)). In the two layers, most of the points are clustered near the bisector of the right quadrant which corresponds to a correlation of +1; the superposition is better in the first layer than in the third one as already noticed with the PDFs of Fig. 2. As in RHK for the kinetic energy generation rate, there exists a less visible branch in the left quadrant corresponding to a correlation -1. This second

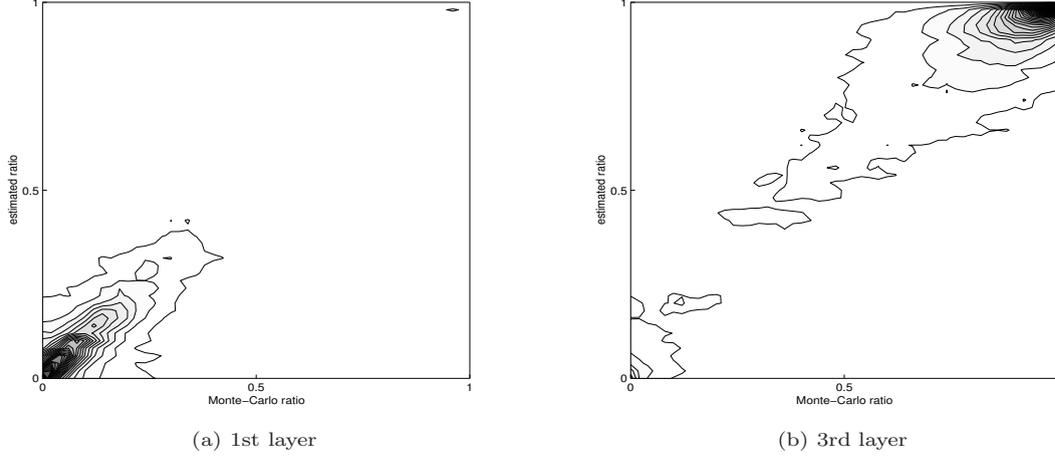


Figure 4. Joint PDF at T=10 days of the Monte-Carlo ratio between the baroclinic generation rate and the total generation rate $1/(1 + R^{bc}) = \mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h / (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h) = \delta^c / \delta^t$ with the analytical estimate of the ratio $1/(1 + R_{ow}^{bc}) = \delta_{ow}^c / \delta_{ow}^t$ conditioned by $|r_{ow}| < 1$ and $|\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h| > |\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h|_{max}/100$.

branch means that a non negligible ratio of the couple points (θ', φ') are very close to the destructive structure determined by the couple $(\theta_{+}^{r_{ow}}, \varphi_{+}^{r_{ow}})$. The relative importance of $(\theta_{+}^{r_{ow}}, \varphi_{+}^{r_{ow}})$ and $(\theta_{-}^{r_{ow}}, \varphi_{-}^{r_{ow}})$ appears to be sensitive to the spatial scale of the random perturbations of Monte-Carlo technique (not shown here).

We investigate now the ratio of the barotropic conversion term over the baroclinic one, R^{bc} defined in section 2.1. Figures 4(a) and (b) show the joint PDF of $1/(1 + R^{bc}) = \delta^c / \delta^t$ with the analytical estimate $1/(1 + R_{ow}^{bc}) = \delta_{ow}^c / \delta_{ow}^t$, respectively in the first and third layer in regions of large total energy extraction. The two dash lines in Figs.2(a)-(b) suggest, as already noted previously, that the flow in the first layer is much more barotropic than baroclinic and that the opposite seems to occur in the third layer. This intuitive result inferred from the PDFs of $\varphi' - \pi/2$ is clearly confirmed by Figs.4(a)-(b). Indeed, in the first layer (Fig. 4(a)), most of the points are close to (0, 0) which means that R^{bc} (as well as R_{ow}^{bc}) is very large whereas in Fig. 4(b), most of the points are close to (1, 1) which means that R^{bc} (as well as R_{ow}^{bc}) is very small in the third layer, even though a few points are around the point (0, 0). Another result is that the first bisecting line is clearly the privileged axis in the two figures; it shows that R_{ow}^{bc} , the ratio estimated with the productive eigenvector of \mathbf{A} which formula is given in terms of the basic-state terms in (34) is a good diagnostic of the actual ratio R^{bc} at each grid point in each layer. A simpler rough analytical diagnostic of R^{bc} could have been the ratio of the rate of strain $\bar{\sigma} = \max(\delta^b)$ over the vertical shear $\bar{\sigma}_z = \max(\delta^c)$. However a plot of the joint PDF of $1/(1 + R^{bc})$ with $1/(1 + \bar{\sigma}/\bar{\sigma}_z)$ (not shown here), show that most of the points are far from the first bisecting line. We conclude that our analytical formula R_{ow}^{bc} (see Eq. (34)) is relevant to diagnose the ratio R^{bc} whereas the simple ratio $\bar{\sigma}/\bar{\sigma}_z$ is not. R_{ow}^{bc} can be therefore

useful to localize for a given flow regions where barotropic or baroclinic processes prevail.

(ii) *Comparison with the Eady index* The Eady index is used in numerous papers (e.g., Hoskins and Valdes 1990; Buizza and Palmer 1995) to localize regions of strong baroclinicity

$$\sigma_{eady} = 0.31 \frac{f}{N} \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z} \right| = 0.31 \bar{\sigma}_z, \quad (46)$$

and corresponds to the largest growth rate of the unstable normal mode in the Eady model. The Eady index thus corresponds to the multiplication of the maximum of δ^c , i.e. $\bar{\sigma}_z$, by 0.31. The aim of the present section is to compare the performance of σ_{eady} with our analytical diagnostic δ_{ow}^c to estimate the Monte-Carlo baroclinic generation rate (noted δ_{MC}^c). A first comparison is done by averaging over the 200 perturbations and over the grid points characterized by strong positive baroclinic extraction ($|r_{ow}| < 1$ and $\mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h > |\mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h|_{max}/100$). The average obtained will be noted as $\langle\langle \rangle\rangle$ and the results for $\langle\langle \delta_{MC}^c \rangle\rangle$, $\langle\langle \bar{\sigma}_z \rangle\rangle$, $\langle\langle \sigma_{eady} \rangle\rangle$ and $\langle\langle \delta_{ow}^c \rangle\rangle$ are the following at T=10 days

	$\langle\langle \delta_{MC}^c \rangle\rangle$	$\langle\langle \bar{\sigma}_z \rangle\rangle$	$\langle\langle \sigma_{eady} \rangle\rangle$	$\langle\langle \delta_{ow}^c \rangle\rangle$
1st layer	$3.1 \cdot 10^{-6}$	$6.9 \cdot 10^{-6}$	$2.1 \cdot 10^{-6}$	$2.9 \cdot 10^{-6}$
3rd layer	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$5.0 \cdot 10^{-6}$	$1.5 \cdot 10^{-6}$	$1.5 \cdot 10^{-6}$

and at T=20 days

	$\langle\langle \delta_{MC}^c \rangle\rangle$	$\langle\langle \bar{\sigma}_z \rangle\rangle$	$\langle\langle \sigma_{eady} \rangle\rangle$	$\langle\langle \delta_{ow}^c \rangle\rangle$
1st layer	$3.5 \cdot 10^{-6}$	$7.4 \cdot 10^{-6}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$	$3.2 \cdot 10^{-6}$
3rd layer	$3.0 \cdot 10^{-6}$	$5.7 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-6}$

$\langle\langle \bar{\sigma}_z \rangle\rangle$ strongly overestimates the Monte-Carlo baroclinic generation rate, especially in the first layer. The values of $\langle\langle \sigma_{eady} \rangle\rangle$ and $\langle\langle \delta_{ow}^c \rangle\rangle$ are close to each other, they slightly underestimates $\langle\langle \delta_{MC}^c \rangle\rangle$, but are more precise than $\langle\langle \bar{\sigma}_z \rangle\rangle$ especially in the first layer. In the first layer, $\langle\langle \delta_{ow}^c \rangle\rangle$ is the best analytical estimate of $\langle\langle \delta_{MC}^c \rangle\rangle$ and in the third layer, $\langle\langle \sigma_{eady} \rangle\rangle$ and $\langle\langle \delta_{ow}^c \rangle\rangle$ are equivalent. An average is however not sufficiently precise to distinguish the performance of the two estimates. This is the reason why joint PDFs are plotted in Fig. 5. Figure 5(a) is the joint PDF of δ_{MC}^c with the Eady parameter and Fig. 5(b) is the joint PDF of δ_{MC}^c with our analytical estimate δ_{ow}^c in regions of large baroclinic extraction in the first layer. In Fig. 5(b), the first bisecting line is the privileged axis of the joint PDF whereas in Fig. 5(a) there is no privileged axis. The same results are present in the third layer too and it clearly shows that our analytical diagnostic δ_{ow}^c is much more relevant at each grid point to diagnose the real generation rate δ_{MC}^c than the Eady parameter.

(iii) *Spatial localization of the generation rates* Let us define at each grid point the average of the absolute barotropic generation rate over the 200 perturbations as $\langle |\delta_{MC}^b| \rangle$. In the third layer, the field $\langle |\delta_{MC}^b| \rangle = \langle |\bar{\sigma} \sin^2 \varphi' \sin \zeta'| \rangle$ (Fig. 6(a)) depending on both ζ' and φ' , is compared with the field $\delta_{ow}^b = -\bar{\sigma} \sin^2 \varphi_{-ow}^r \sin \zeta_{-ow}^r$ (Fig. 6(b)) and to the field $-\bar{\sigma} \sin \zeta_{-ow}^r$ (Fig. 6(c)).

The aim is to diagnose the impact of the angle φ' on the spatial localization of $\langle |\delta_{MC}^b| \rangle$. Maxima of $\langle |\delta_{MC}^b| \rangle$ around the jet and around the isolated eddy are pointed with arrows in Fig. 6(a). The same arrows are put in Fig. 6(b) and in Fig. 6(c). In Fig. 6(b), the arrows point quite well on local maxima of δ_{ow}^b whereas in Fig. 6(c), the arrows does not point exactly on local maxima of the

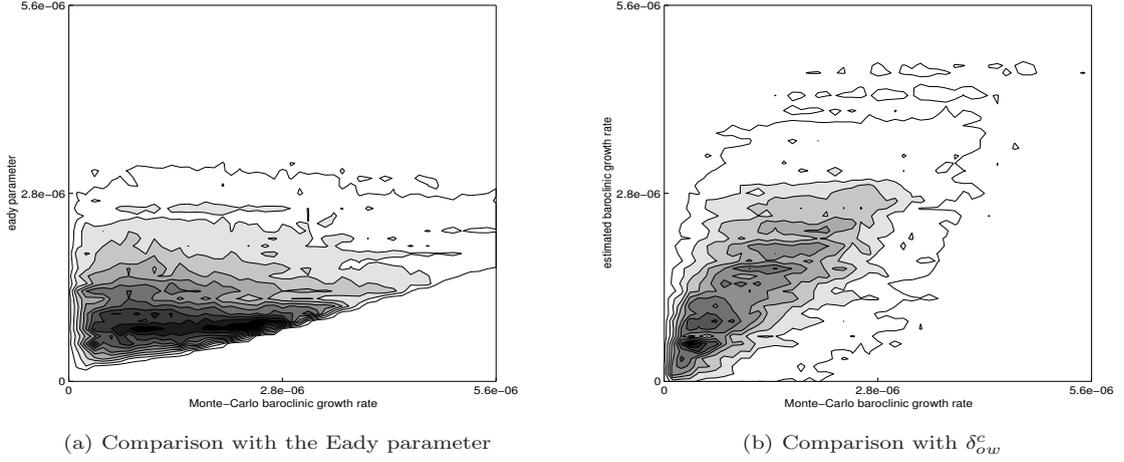


Figure 5. joint PDFs at T=10 days in the first layer of the Monte-Carlo baroclinic generation rate with (a) the Eady index, (b) the analytical estimate δ_{ow}^c in regions of large baroclinic conversion ($|r_{ow}| < 1$ and $|\mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h| > |\mathbf{F}_h \cdot \mathbf{T}_h|_{max}/100$).

field $-\bar{\sigma} \sin \zeta_{-ow}^r$: around the jet, maxima of $-\bar{\sigma} \sin \zeta_{-ow}^r$ are much more closer to the jet core than the maxima of $\langle |\delta_{MC}^b| \rangle$ or δ_{ow}^b and around the isolated eddy, there is a maximum of $\langle |\delta_{MC}^b| \rangle$ which is slightly localized eastward from the maximum of $-\bar{\sigma} \sin \zeta_{-ow}^r$. The slight but significant differences between the spatial localization of the maxima of $\langle |\delta_{MC}^b| \rangle$ or δ_{ow}^b in the one hand, and the maxima of $-\bar{\sigma} \sin \zeta_{-ow}^r$ in the other hand, show the impact of the angle φ' on the localization of the barotropic generation rate. One more time, we verify that φ' is close to φ_{-ow}^r but in terms of the spatial localization of generation rates. Maxima of the baroclinic generation rate δ^c (not shown here) by contrast with maxima of the barotropic generation rate are localized precisely on the jet core. Another point to note is that maxima of δ^b are localized in regions where $|r_{ow}| < 1$, i.e. where our analytical estimate exists (cf Fig. 6), while we have found that maxima of δ^c are localized in both regions where $|r_{ow}| < 1$ and where $|r_{ow}| > 1$ (not shown here).

(iv) *Check on the consistency of the parametrization of the ageostrophic terms*
 By considering the basis $(\mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_{3\perp}, \mathbf{e}'_{\perp})$, the analytical expressions of the baroclinic ageostrophic vector $\mathbf{v}_{\chi,w}$ and the barotropic ageostrophic vector \mathbf{v}_p (Eq. (40) and Eq. (42)) show that the two vectors align respectively with $\mathbf{e}'_{3\perp}$ and \mathbf{e}'_{\perp} . This is usually not true in our numerical simulations, their projections onto \mathbf{e}'_3 is not trivial as they correspond to the essential redistribution processes of energy as shown by Mak and Cai. However we verify numerically that there is a tendency for the two ageostrophic vectors to be close to the directions of $\mathbf{e}'_{3\perp}$ and \mathbf{e}'_{\perp} . By considering a spatial average over the whole area A in the first layer

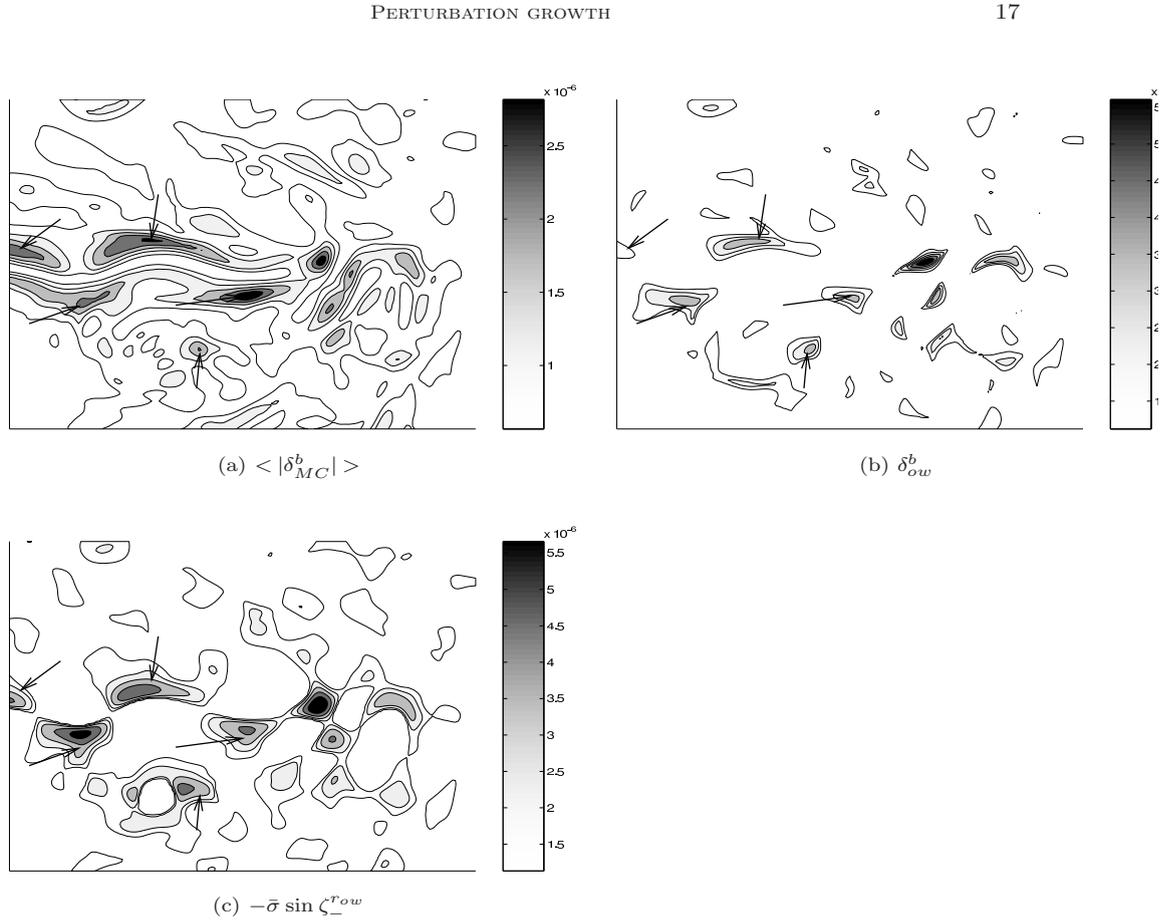


Figure 6. Spatial localization at T=10 days inside area A in the third layer of (a) the ensemble mean of the absolute barotropic growth rate for 200 independent realizations $\langle |\delta_{MC}^b| \rangle = \langle |\bar{\sigma} \sin^2 \varphi' \sin \zeta'| \rangle$, (b) the estimated barotropic growth rate $\delta_{ow}^b = -\bar{\sigma} \sin^2 \varphi_{ow}^r \sin \zeta_{ow}^r$ and (c) $-\bar{\sigma} \sin \zeta_{ow}^r$. Note that the gray scales are different for (a) and (b),(c). See the text for the definitions of the arrows.

and over 200 perturbations (denoted $\langle \rangle_A$), we obtain the following results

$$\begin{aligned} \langle \frac{|\mathbf{v}_{X,w} \cdot \mathbf{e}'_3|}{|\mathbf{v}_{X,w}|} \rangle_A &= 0.41, & \langle \frac{|\mathbf{v}_{X,w} \cdot \mathbf{e}'_{3\perp}|}{|\mathbf{v}_{X,w}|} \rangle_A &= 0.69, & \langle \frac{|\mathbf{v}_{X,w} \cdot \mathbf{e}'_{\perp}|}{|\mathbf{v}_{X,w}|} \rangle_A &= 0.35 \\ \langle \frac{|\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{e}'_3|}{|\mathbf{v}_p|} \rangle_A &= 0.54, & \langle \frac{|\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{e}'_{3\perp}|}{|\mathbf{v}_p|} \rangle_A &= 0.18, & \langle \frac{|\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{e}'_{\perp}|}{|\mathbf{v}_p|} \rangle_A &= 0.67. \end{aligned}$$

If the probability density function of each component were a white noise, the different values given above would be 0.5; there is thus a clear tendency for the baroclinic and barotropic vectors to be respectively close to the directions of $\mathbf{e}'_{3\perp}$ and \mathbf{e}'_{\perp} . The rough analytical diagnostic is therefore numerically discernible even if projections onto \mathbf{e}'_3 are important for the redistribution processes.

Fig. 7 is a numerical test of the analytical approximation (43). Most of the points are clustered around the point (0,0): this is logical since the estimated projection, is equal to zero for the eigenvectors directions (corresponding to $y=0$ in Fig. 7), and we have previously seen that most of the structures align

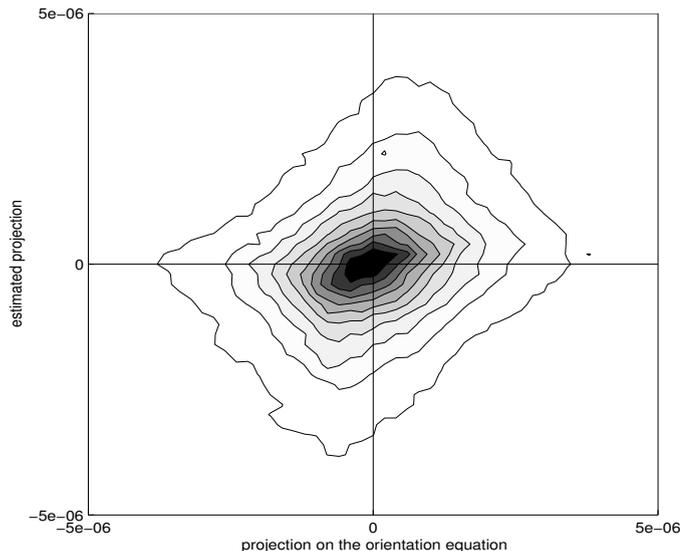


Figure 7. Joint PDF at T=10 days of the projection of the baroclinic ageostrophic vector $\mathbf{v}_{\chi,w}$ on the equation for φ' , $P_\varphi(\chi', w')$, with the analytical estimate $2 \sin \varphi' (\frac{\bar{\sigma}}{2} \sin(\zeta') \cos(\varphi') + \bar{\sigma}_z \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z) \sin \varphi')$ conditioned by the same threshold as in Fig. 3

around these directions. This also means that for the eigenvectors directions, the baroclinic ageostrophic vector is close to zero ($x = 0$ in Fig. 7) which confirms our analytical prediction. The cloud of points obtained in Fig. 7 forms an ellipsoid which principal axis is not so far from the first bisecting line. This numerical result shows that the analytical approximation is significant and that the baroclinic ageostrophic vector acts in such a way that φ'_{\pm} are still the preferred directions of the complete equation of φ' . This result is equivalent to the result shown in Fig. 8 of RHK for the diagnostic of the pressure effect. The analytical formulae provide a rationale for the ageostrophic terms effects and explain why the eigenvectors structures of \mathbf{A} are the most probable perturbation structures in quasi-geostrophic flows since their directions correspond to the preferred directions by considering the complete system (7).

(b) Error fields

The alignment analyses of the previous section have shown that we can predict with the basic-state structure the most probable angle φ' and thus the most probable ratio of the perturbation kinetic energy over its potential energy at each grid point. However the error fields themselves, i.e the kinetic energy error field K' , the potential energy error field P' or the total energy error field T' cannot be deduced from our instantaneous local methodology which does not take into account the past evolution of the perturbations. However results in RHK concerning the kinetic energy error field K' show that maxima of K' are localized in specific regions where the norm of $\nabla \bar{\mathbf{u}}$ is large as well as errors maxima of PV (potential vorticity) are localized in regions of large PV gradient of the reference flow. This interesting feature can be completely generalized for the potential energy and the total energy fields as we will see in this section.

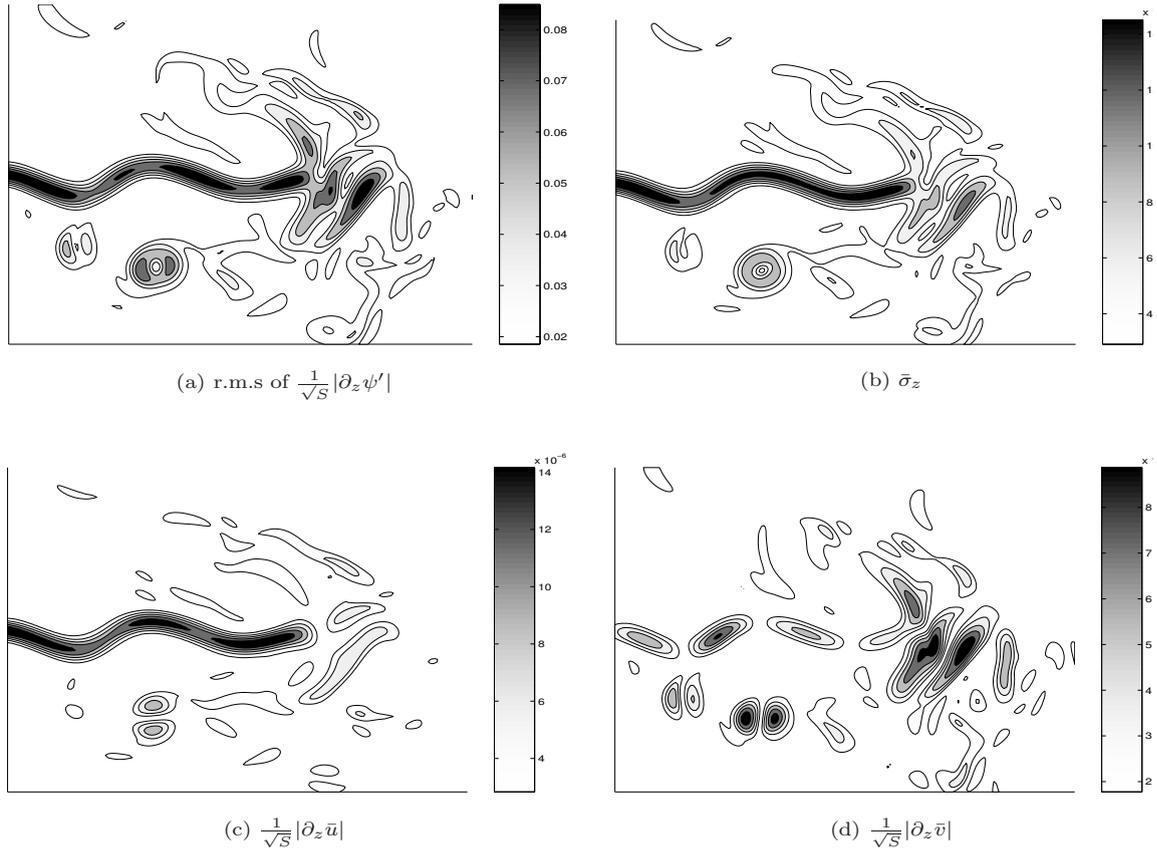


Figure 8. Comparison between spatial structures of the potential energy error field $|\partial_z\psi'|/\sqrt{S}$ and spatial properties of the basic-state vertical shear strain rate $\bar{\sigma}_z$ in the first layer; (a) root-mean-square of the potential energy error field, (b) vertical shear strain rate $\bar{\sigma}_z$, (c) vertical zonal shear strain rate $|\partial_z\bar{u}|/\sqrt{S}$, (d) vertical meridional shear strain rate $|\partial_z\bar{v}|/\sqrt{S}$.

Let us first focus on potential energy; the root-mean-square of P' again calculated with 200 perturbations is plotted in the area A after 10 days in Fig. 8(a). We compare the r.m.s. of P' (Fig. 8(a)) with $|\partial_z\bar{u}|/\sqrt{S}$ (Fig. 8(c)), $|\partial_z\bar{v}|/\sqrt{S}$ (Fig. 8(d)) and $\bar{\sigma}_z = \sqrt{(\partial_z\bar{u})^2 + (\partial_z\bar{v})^2}/\sqrt{S}$ (Fig. 8(b)). It is clear that the details of the local structures of P' (Fig. 8(a)) are very well represented by the field $\bar{\sigma}_z$ (Fig. 8(b)) and not completely by $|\partial_z\bar{u}|/\sqrt{S}$ (Fig. 8(c)) or by $|\partial_z\bar{v}|/\sqrt{S}$ (Fig. 8(d)): the correlations between the r.m.s. of P' with $\bar{\sigma}_z$, $|\partial_z\bar{u}|/\sqrt{S}$ and $|\partial_z\bar{v}|/\sqrt{S}$ are respectively equal to 0.98, 0.85 and 0.84. As errors in PV are localized in regions of strong basic-state PV gradient (see RHK) and errors in potential energy are localized in regions of large values of $\bar{\sigma}_z$, a generic property seems to emerge. For a given geostrophic scalar variable \bar{s} (e.g. all the derivatives of the geostrophic streamfunction), which time evolution

is described by an equation such as, $\bar{D}\bar{s}/Dt = \text{ageostrophic terms}$, the error field associated to this variable, s' , is localized in regions of large $|\nabla\bar{s}|$. This characteristic is suggested by the linearization of the previous equation, $\bar{D}s'/Dt = -\mathbf{u}' \cdot \nabla\bar{s} + \text{perturbation ageostrophic terms}$, in which $\nabla\bar{s}$ appears.

In RHK, maxima of K' are shown to be localized in regions where the norm of $\nabla\bar{\mathbf{u}}$ is large. In the same manner, by drawing a parallel between (4) and (7), maxima of total energy should be localized in regions where the norm of \mathbf{A} is large. This intuitive result was confirmed by our numerical results (not shown here).

4. CONCLUSION

We can summarize the main results of the paper as follows:

The most probable 3-dimensional perturbation structure in quasi-geostrophic flows is analytically given at each time by the eigenvectors of the 3-dimensional basic-state velocity gradient tensor (noted \mathbf{A}) in specific regions where the strain rate is larger than the relative vorticity ($|r_{ow}| < 1$). This result was first diagnosed by analyzing analytically the linearized perturbation equations and the ageostrophic terms and has been confirmed by numerical results using Monte-Carlo techniques.

The eigenvector structure inducing perturbation growth enables to diagnose the most probable total energy generation rate in regions where $|r_{ow}| < 1$. The total generation rate of the productive eigenvector is decomposed into the sum of a positive barotropic generation rate and a positive baroclinic generation rate.

The productive eigenvector is also useful to give an approximation of the ratio of the perturbation kinetic energy over its potential energy at each grid point, as well as a diagnostic of the ratio of the barotropic conversion term over the baroclinic one.

An intercomparison between the Eady index and our analytical diagnostic of the exponential baroclinic generation rate (δ_{ow}^c) have shown that our analytical diagnostic derived from the productive eigenvector of \mathbf{A} is more relevant than the Eady index to estimate at each grid point the value of the Monte-Carlo exponential baroclinic generation rate (δ^c).

Concerning the relevance of the regions where $|r_{ow}| < 1$ in the topology of the perturbation, it is clear that these regions contain the local maximum barotropic generation rate and represent quite well regions of barotropic extraction. It is not the case for the baroclinic generation rate which maxima are localized as well in regions where $|r_{ow}| < 1$ as in regions where $|r_{ow}| > 1$. Further studies are needed to detect the preferential perturbation structure in the last regions.

The spatial localization of the error fields can be diagnosed quite well by analytical diagnostics even if we cannot explain these relations by our approach. Indeed, our Lagrangian approach gives information about the perturbation structures and the generation rates but as it cannot give information about the redistribution processes, we cannot explain the local Eulerian growth rate. The spatial relations between the error fields and their corresponding basic-state fields are however strong. For example, the maxima of the total energy error field are localized in regions where the norm of \mathbf{A} is large and those of the potential energy error field in regions where the vertical strain rate is the largest.

APPENDIX A

The \mathbf{C}' -vector for a monochromatic perturbation

For a monochromatic perturbation, by using equations (37) and (39), the \mathbf{C}' -vector can be written as

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} Q'_y \\ -Q'_x \\ C'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (lm\partial_y\bar{v} + km\partial_y\bar{u} - kl\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\bar{u} - l^2\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\bar{v})\sqrt{S} \\ -(lm\partial_x\bar{v} + km\partial_x\bar{u} - k^2\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\bar{u} - lk\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\bar{v})\sqrt{S} \\ (lk\partial_x\bar{u} - k^2\partial_y\bar{u} - kl\partial_y\bar{v} + l^2\partial_x\bar{v}) \end{pmatrix} \psi', \quad (\text{A.1})$$

and \mathbf{u}'_3 has the following form

$$\mathbf{u}'_3 = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ \frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\psi' \end{pmatrix} = -U_0 \sin(kx + ly + mZ) \begin{pmatrix} -l \\ k \\ m \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

If \mathbf{u}'_3 is an eigenvector of \mathbf{A} , i.e if $(-l, k, m)$ is an eigenvector of \mathbf{A} with eigenvalue λ , we have then the following equations

$$\begin{aligned} -l\partial_x\bar{u} + k\partial_y\bar{u} &= -l\lambda, \\ -l\partial_x\bar{v} + k\partial_y\bar{v} &= k\lambda, \\ -l\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\bar{v} - k\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\bar{u} &= \lambda m, \end{aligned}$$

which lead to

$$\begin{aligned} C'_x &= (-lm\partial_x\bar{u} + km\partial_y\bar{u} - kl\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\bar{u} - l^2\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\bar{v})\sqrt{S}\psi' = (-k\lambda m + k\lambda m)\sqrt{S}\psi' = 0, \\ C'_y &= -(lm\partial_x\bar{v} - km\partial_y\bar{v} - k^2\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\bar{u} - lk\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\bar{v})\sqrt{S}\psi' = -(-l\lambda m + l\lambda m)\sqrt{S}\psi' = 0, \\ C'_z &= (lk\partial_x\bar{u} - k^2\partial_y\bar{u} - kl\partial_y\bar{v} + l^2\partial_x\bar{v})\psi' = (l\lambda k - l\lambda k)\psi' = 0. \end{aligned}$$

For a monochromatic perturbation, if \mathbf{u}'_3 is an eigenvector of \mathbf{A} , \mathbf{C}' is thus trivial, $\mathbf{C}' = \mathbf{0}$, which is attributable to the Jacobian operators which appear in Eq. (37).

APPENDIX B

The ageostrophic baroclinic vector in a monochromatic case

In this appendix, we show that we can obtain a formulation of the ageostrophic baroclinic vector, $\mathbf{v}_{\chi,w}$, by considering a monochromatic perturbation, the coefficients of the matrix \mathbf{A} as slowly varying and S a constant. In a monochromatic case, the angles θ' and φ' defining the vector \mathbf{u}'_3 are related to the different wavenumbers

$$\begin{pmatrix} \cos \theta' \sin \varphi' \\ \sin \theta' \sin \varphi' \\ \cos \varphi' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \frac{-l}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}} \\ \frac{k}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}} \\ \frac{m}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

From Eq. (A.1) and the above assumptions, the \mathbf{Q}' -vector can be written as $\mathbf{Q}' = (a, b)\psi'$ where a and b are constant and verify

$$\begin{aligned} a &= (lm\partial_x\bar{v} + km\partial_x\bar{u} - k^2\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\bar{u} - lk\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\bar{v})\sqrt{S}, \\ b &= (lm\partial_y\bar{v} + km\partial_y\bar{u} - kl\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\bar{u} - l^2\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\bar{v})\sqrt{S}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Equation (38b) leads to

$$(k^2 + l^2 + m^2)(k^2 + l^2)f_0\chi' = 2m(ak + bl)\psi',$$

and thus

$$-f_0\mathbf{k} \wedge \nabla\chi' = \frac{-2m(ak + bl)}{(k^2 + l^2)(k^2 + l^2 + m^2)}|\mathbf{u}'|\mathbf{e}'. \quad (\text{B.3})$$

Equation (5) can be written as $imw' = (k^2 + l^2)\chi'/\sqrt{S}$, and with the expression of χ' given previously, we get

$$-f_0\sqrt{S}w'\mathbf{k} = \frac{2(ak + bl)}{m(k^2 + l^2 + m^2)}\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\psi'\mathbf{k}. \quad (\text{B.4})$$

The relation (B.1) between the wavenumbers and the angles modifies (B.2) as follows

$$\begin{aligned} \frac{a}{k^2 + l^2 + m^2} &= \sin\varphi' \cos\varphi' (-\cos\theta'\partial_x\bar{v} + \sin\theta'\partial_x\bar{u}) - \sin^2\varphi' \sin\theta'\bar{\sigma}_z \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z), \\ \frac{b}{k^2 + l^2 + m^2} &= \sin\varphi' \cos\varphi' (-\cos\theta'\partial_y\bar{v} + \sin\theta'\partial_y\bar{u}) + \sin^2\varphi' \cos\theta'\bar{\sigma}_z \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Let us recall that

$$\cos\varphi' = \frac{\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\psi'}{|\mathbf{u}'_3|}, \quad \sin\varphi' = \frac{|\mathbf{u}'|}{|\mathbf{u}'_3|}. \quad (\text{B.6})$$

By summing (B.3) and (B.4), and by using the previous relations (B.5) and (B.6), this leads to

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\chi,w} &= \frac{-2m(ak + bl)}{(k^2 + l^2)(k^2 + l^2 + m^2)}|\mathbf{u}'|\mathbf{e}' + \frac{2(ak + bl)}{m(k^2 + l^2 + m^2)}\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\psi'\mathbf{k} \\ &= \frac{-2|\mathbf{u}'_3|}{k^2 + l^2 + m^2}\left(\frac{ak + bl}{\sqrt{k^2 + l^2}}\right)\left(\frac{m}{\sqrt{k^2 + l^2}}\frac{|\mathbf{u}'|}{|\mathbf{u}'_3|}\mathbf{e}' - \frac{\sqrt{k^2 + l^2}}{m}\frac{1}{\sqrt{S}}\partial_z\psi'\mathbf{k}\right) \\ &= \frac{-2|\mathbf{u}'_3|}{k^2 + l^2 + m^2}(a \sin\theta' - b \cos\theta')(\cos\varphi'\mathbf{e}' - \sin\varphi'\mathbf{k}) \\ &= 2 \sin\varphi' \cos\varphi' \{-\cos^2\theta'\partial_y\bar{v} + \cos\theta' \sin\theta'\partial_y\bar{u} + \sin\theta' \cos\theta'\partial_x\bar{v} - \sin^2\theta'\partial_x\bar{u} \\ &\quad + \bar{\sigma}_z \sin^2\varphi' \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z)\}\mathbf{e}'_{3\perp} \\ &= 2 \sin\varphi' \left\{\frac{\bar{\sigma}}{2} \sin\zeta' \cos\varphi' + \bar{\sigma}_z \sin(\theta' - \bar{\alpha}_z) \sin\varphi'\right\} \cdot |\mathbf{u}'_3|\mathbf{e}'_{3\perp} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Since the ageostrophic baroclinic vector is colinear to $\mathbf{e}'_{3\perp}$, it only influences the equation for φ' and not the equations for θ' and $|\mathbf{u}'_3|$.

Influence of the β -effect on the orientation equations

We consider the influence of the β -effect on the orientation equations for a monochromatic perturbation. In presence of β , Eq. (7) can be written as

$$\frac{\bar{D}\mathbf{u}'_3}{Dt} = -\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}'_3 - \nabla p' + \beta y \nabla \psi' - f_0 \mathbf{k} \wedge \nabla \chi' - f_0 \sqrt{S} w' \mathbf{k}, \quad (\text{C.1})$$

and by using the same transformation as in RHK ($\hat{p}' \equiv p' - \beta y \psi'$), this leads to

$$\frac{\bar{D}\mathbf{u}'_3}{Dt} = -\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}'_3 - \nabla \hat{p}' - \beta \psi' \mathbf{j} - f_0 \mathbf{k} \wedge \nabla \chi' - f_0 \sqrt{S} w' \mathbf{k}, \quad (\text{C.2})$$

where \mathbf{j} is the unit vector in the meridional direction. The three ageostrophic terms \hat{p}' , χ' , and w' depend on β and Eq. (38) becomes

$$\Delta p' = 2\{J_{xy}(\bar{u}, v') + J_{xy}(u', \bar{v})\} + \beta u', \quad (\text{C.3a})$$

$$(\Delta + \partial_z \frac{1}{S} \partial_z) \Delta f_0 \chi' = -2 \partial_z \frac{1}{S} \nabla \cdot \mathbf{Q}' - \beta \partial_z \frac{1}{S} \partial_z v', \quad (\text{C.3b})$$

$$(\Delta + \frac{1}{S} \partial_z^2) w' = \frac{2}{f_0 S} \nabla \cdot \mathbf{Q}' + \frac{\beta}{f_0 S} \partial_z v'. \quad (\text{C.3c})$$

Let us now write for the monochromatic perturbation defined in (35) the unique vector, denoted \mathbf{a}_β , depending on β that intervenes in (C.2). This vector is the sum of three β terms included in the vectors $-\nabla p' + \beta y \nabla \psi'$, $-f_0 \mathbf{k} \wedge \nabla \chi'$ and $-f_0 \sqrt{S} w' \mathbf{k}$ and are respectively noted $(-\nabla p' + \beta y \nabla \psi')_\beta$, $(-f_0 \mathbf{k} \wedge \nabla \chi')_\beta$ and $(-f_0 \sqrt{S} w' \mathbf{k})_\beta$. The first β -term $(-\nabla p' + \beta y \nabla \psi')_\beta$ was calculated in RHK (see their appendix B) and by using (B.1), the result is

$$(-\nabla p' + \beta y \nabla \psi')_\beta = \frac{\beta A k \cos(kx + ly + mZ)}{k^2 + l^2} (\mathbf{i} - k \mathbf{j}) = -\frac{\beta A k \cos(kx + ly + mZ)}{\sqrt{k^2 + l^2}} (\pm \mathbf{e}'). \quad (\text{C.4})$$

In the same manner, Eqs. (C.3b)-(C.3c) can be easily inverted for the monochromatic perturbation and by focusing on the inversion of the β -terms, we obtain

$$(-f_0 \mathbf{k} \wedge \nabla \chi')_\beta = \frac{\beta A k m^2}{\sqrt{k^2 + l^2} (k^2 + l^2 + m^2)} \cos(kx + ly + mZ) (\pm \mathbf{e}'), \quad (\text{C.5a})$$

$$(-f_0 \sqrt{S} w' \mathbf{k})_\beta = -\frac{\beta A k m}{k^2 + l^2 + m^2} \cos(kx + ly + mZ) \mathbf{k}. \quad (\text{C.5b})$$

The unique vector depending on the β -term has thus the following form by using (B.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\beta &= \frac{\beta A k}{\sqrt{k^2 + l^2}} \cos(kx + ly + mZ) \left(-1 + \frac{m^2}{k^2 + l^2 + m^2}\right) (\pm \mathbf{e}') \\ &\quad - \frac{\beta A k m}{k^2 + l^2 + m^2} \cos(kx + ly + mZ) \mathbf{k} \\ &= -\frac{\beta A k (\sqrt{k^2 + l^2})}{k^2 + l^2 + m^2} \cos(kx + ly + mZ) (\pm \mathbf{e}') - \frac{\beta A k m}{k^2 + l^2 + m^2} \cos(kx + ly + mZ) \mathbf{k} \\ &= \frac{\beta A k}{\sqrt{k^2 + l^2 + m^2}} \{-\sin \phi'(\pm \mathbf{e}') - \cos \phi'(\pm \mathbf{k})\} \cos(kx + ly + mZ) \\ &= \frac{-\beta A k}{\sqrt{k^2 + l^2 + m^2}} \cos(kx + ly + mZ) (\pm \mathbf{e}'_3). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

The vector characterizing the β influence, \mathbf{a}_β , aligns with \mathbf{e}'_3 and has therefore no component on the two orientation equations.

REFERENCES

- Bishop, C. H. 1993 On the behavior of baroclinic waves undergoing horizontal deformation. I: The 'RT' phase diagram. *Q. J. R. Meteor. Soc.*, **119**, 221–240
- Bishop, C. H. and Thorpe, A. J. 1994 Frontal wave stability during moist deformation frontogenesis. Part I: Linear wave dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **51**, 852–873
- Buizza, R. and Palmer, T. N. 1995 The singular vector structure of the atmospheric global circulation. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 1434–1456
- Cai, M. and Mak, M. 1990 On the basic dynamics of regional cyclogenesis. *J. Atmos. Sci.*, **47**, 1417–1442
- Charney, J. G. 1947 The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J. Meteor.*, **4**, 135–163
- Eady, E. T. 1949 Long waves and cyclone waves. *Tellus* **1**, 33–52
- Farrell, B. F. 1982 The initial growth of disturbances in a baroclinic flow. *J. Atmos. Sci.*, **39**, 1663–1686
- Farrell, B. F. 1989 Transient development in confluent and diffluent flow. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 3279–3288
- Frederiksen, J. S. 2000 Singular vectors, finite-time normal modes, and error growth during blocking. *J. Atmos. Sci.*, **57**, 312–333
- Haynes, P. and Anglade, J. 1997 The vertical-scale cascade in atmospheric tracers due to large-scale differential advection. *J. Atmos. Sci.*, **54**, 1121–1136
- Hoskins, B. J., Draghici, I. and Davies, H. C. 1978 A new look at the ω -equation. *Q. J. R. Meteor. Soc.*, **104**, 31–38
- Hoskins, B. J. and Valdes, P. J. 1990 On the existence of storm tracks. *J. Atmos. Sci.*, **47**, 1854–1864
- Hua, B. L., McWilliams, J. C. and Klein, P. 1998 Lagrangian accelerations in geostrophic turbulence. *J. Fluid Mech.*, **366**, 87–108
- Mak, M. and Cai, M. 1989 Local barotropic instability. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 3289–3311
- Rivière, G., Hua, B. L., and Klein, P. 2002 Error growth in terms of localized barotropic instability. *accepted to Q. J. R. Meteor. Soc.*
- Snyder, C. and Joly, A. 1998 Development of perturbations within a growing baroclinic wave. *Q. J. R. Meteor. Soc.* **124**, 1961–1983
- Szunyogh, I., Kalnay, E. and Toth, Z. 1997 A comparison of Lyapunov and Singular vectors in a low resolution GCM. *Tellus*, **49A**, 200–227
- Xu, Q. 1992 Ageostrophic pseudo-vorticity and geostrophic C-vector forcing - A new look at the Q vector in three dimensions. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 981–990

Références

- Arbogast, P., 2001** : Frontal wave development by interaction between a front and a cyclone : application to the FASTEX IOP 17. *préparé pour Q.J.R. Meteorol. Soc.*, **125**.
- Badger, J. et B. J. Hoskins, 2001** : Simple initial value problems and mechanisms for baroclinic growth. *J. Atmos. Sci.*, **58**, 38–49.
- Baehr, C., B. Pouponneau, F. Ayrault, et A. Joly, 1999** : Dynamical characterization of the FASTEX cyclogenesis cases. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, **125**, 3469–3494.
- Barkmeijer, J., 1992** : Local error growth in a barotropic model. *Tellus A*, **44**, 314–323.
- Barnier, B., B. L. Hua, et C. Leprovost, 1991** : On the catalytic role of high baroclinic modes in eddy-driven large-scale circulations. *J. Phys. Oceanogr.*, **21**, 976–997.
- Bishop, C. H., 1993a** : On the behavior of baroclinic waves undergoing horizontal deformation. Part I : The "RT" phase diagram. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, **119**, 221–240.
- , **1993b** : On the behavior of baroclinic waves undergoing horizontal deformation. Part II : Error bound amplification and Rossby wave diagnostics. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, **119**, 241–269.
- **et A. J. Thorpe, 1994a** : Frontal wave stability during moist deformation frontogenesis. Part I : Linear wave dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **51**, 852–873.
- **et** ———, **1994b** : Frontal wave stability during moist deformation frontogenesis. Part II : The suppression of nonlinear wave development. *J. Atmos. Sci.*, **51**, 874–888.
- Borges, M. D. et D. L. Hartmann, 1992** : Barotropic instability and optimal perturbations of observed nonzonal flows. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 335–354.
- Buizza, R. et T. N. Palmer, 1995** : The singular vector structure of the atmospheric global circulation. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 1434–1456.
- , **J. Tribbia, F. Molteni, et T. Palmer, 1993** : Computation of optimal unstable structures for a numerical weather prediction model. *Tellus*, **45A**, 388–407.
- Cai, M. et M. Mak, 1990** : On the basic dynamics of regional cyclogenesis. *J. Atmos. Sci.*, **47**, 1417–1442.
- Carton, X., 2001** : Hydrodynamical modeling of oceanic vortices. *Surveys in Geophysics*, **22**, 179–263.
- Case, K. M., 1960** : Stability of inviscid plane Couette flow. *Phys. Fluids.*, **3**, 143–149.
- Charney, J. G., 1947** : The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current.

- J. Meteor.*, **4**, 135–163.
- et M. E. Stern, 1962 : On the instability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **19**, 169–182.
- Corazza, M., E. Kalnay, D. J. Patil, R. Morss, M. Cai, I. Szunyogh, B. R. Hunt, E. Ott, et J. A. Yorke, 2002 : Use of the breeding technique to determine the structure of the "errors of the day". *soumis à Nonlinear Processes in Geophysics*.
- Davies, H. et C. Bishop, 1994 : Eady edge waves and rapid development. *J. Atmos. Sci.*, **51**, 1930–1946.
- Dijkstra, H. A. et C. A. Katsman, 1997 : Temporal variability of the wind-driven quasi-geostrophic double gyre ocean circulation : basic bifurcation diagrams. *Geophys. Astrophys. Fluid. Dyn.*, **85**, 195–232.
- Eady, E. T., 1949 : Long waves and cyclone waves. *Tellus*, **1**, 33–52.
- Ehrendorfer, M. et J. Tribbia, 1997 : Optimal prediction of forecast error covariance through singular vectors. *J. Atmos. Sci.*, **54**, 286–313.
- et R. M. Errico, 1995 : Mesoscale predictability and the spectrum of optimal perturbations. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 3475–3500.
- Farrell, B. F., 1982 : The initial growth of disturbances in a baroclinic flow. *J. Atmos. Sci.*, **39**, 1663–1686.
- , 1984 : Modal and non-modal baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **41**, 668–673.
- , 1989a : Optimal excitation of baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 1193–1206.
- , 1989b : Transient development in confluent and diffluent flow. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 3279–3288.
- , 1990 : Small error dynamics and the predictability of atmospheric flows. *J. Atmos. Sci.*, **47**, 2409–2416.
- et A. M. Moore, 1992 : An adjoint method for obtaining the most rapidly growing perturbation to oceanic flows. *J. Phys. Oceanogr.*, **22**, 338–349.
- et P. J. Ioannou, 1996a : Generalized stability theory. part I : autonomous operators. *J. Atmos. Sci.*, **53**, 2025–2040.
- Fischer, C., 1998 : Linear amplification and error growth in the 2D Eady problem with uniform potential vorticity. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 3363–3380.
- Frederiksen, J. S., 1983 : Disturbances and eddy fluxes in Northern Hemisphere flows : Instability of three-dimensional January and July flows. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 836–855.
- , 1997 : Adjoint sensitivity and finite-time normal mode disturbances during blocking. *J. Atmos. Sci.*, **54**, 1144–1165.
- , 2000 : Singular vectors, finite-time normal modes, and error growth during

- blocking. *J. Atmos. Sci.*, **57**, 312–333.
- Hartmann, D. L., R. Buizza, et T. N. Palmer, 1995** : Singular vectors : the effect of spatial scale on linear growth of disturbances. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 3885–3894.
- Haynes, P. et J. Anglade, 1997** : The vertical-scale cascade in atmospheric tracers due to large-scale differential advection. *J. Atmos. Sci.*, **54**, 1121–1136.
- Held, I., 1985** : Pseudomomentum and the orthogonality of modes in shear flow. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 2280–2288.
- Hoskins, B. J. et P. J. Valdes, 1990** : On the existence of storm tracks. *J. Atmos. Sci.*, **47**, 1854–1864.
- , **I. Draghici, et H. C. Davies, 1978** : A new look at the ω -equation. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, **104**, 31–38.
- , **I. N. James, et G. H. White, 1983** : The shape, propagation and mean-flow interaction of large-scale weather systems. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 1595–1612.
- , **R. Buizza, et J. Badger, 2000** : The nature of singular vector growth and structure. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, **126**, 1565–1580.
- Hua, B. L. et P. Klein, 1998** : An exact criterion for the stirring properties of nearly two-dimensional turbulence. *Physica D*, **113**, 98–110.
- , **J. C. McWilliams, et P. Klein, 1998** : Lagrangian accelerations in geostrophic turbulence. *J. Fluid Mech.*, **366**, 87–108.
- Iacono, R., 2002** : Local energy generation in barotropic flows. *J. Atmos. Sci.*, **59**, 2153–2163.
- Jiang, S., F. F. Jin, et M. Ghil, 1995** : Multiple equilibria, periodic, and aperiodic solutions in a wind-driven, double-gyre, shallow-water model. *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 764–786.
- Jimenez, J., A. A. Wray, P. G. Saffman, et R. S. Rogallo, 1993** : The structure of intense vorticity in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, **255**, 65–90.
- Joly, A., 1995** : The stability of steady fronts and the adjoint method : Nonmodal frontal waves. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 3082–3108.
- **et A. J. Thorpe, 1991** : The stability of time-dependant flows : an application to fronts in developing baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **48**, 163–182.
- , **K.A. Browning, P. Bessemoulin, J.P. Cammas, G. Caniaux, J.P. Chalon, S.A. Clough, R. Dirks, K. A. Emanuel, L. Eymard, R. Gall, T. D. Hewson, P. H. Hidebrand, D. Jorgensen, F. Lalaurette, R. H. Langland, Y. Lemaitre, P. Mascart, J. A. Moore, P. O. G. Persson, F. Roux, M. A. Shapiro, C. Snyder, Z. Toth, et R. M. Wakimoto, 1999** : Overview of Fastex. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, **125**, 3131–3165.

- Kelvin, Lord., 1887** : Stability of fluid motions : Rectilinear motion of a viscous fluid between two parallel plates. *Phil. Mag.*, **24**, 188–196.
- Klein, P., B. L. Hua, et G. Lapeyre, 2000** : Alignment of tracer gradient vectors in 2D turbulence. *physica D*, **146**, 246–260.
- Kucharski, F. et A. J. Thorpe, 2001** : The influence of transient upper-level barotropic growth on the development of baroclinic waves. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, **127**, 835–844.
- Kuo, H. L., 1949** : Dynamic instability of two dimensional nondivergent flow in a barotropic atmosphere. *J. Meteor.*, **6**, 105–122.
- Lacarra, J. F. et O. Talagrand, 1988** : Short-range evolution of small perturbations in a barotropic model. *Tellus*, **40A**, 81–95.
- Lapeyre, G., 2000** : *Topologie du mélange dans un fluide turbulent géophysique*, Thèse de doctorat, LMD, Paris VI.
- , **2002** : Characterization of finite-time Lyapunov exponents and vectors in two-dimensional turbulence. *Chaos*, **12**, 688–698.
- , **P. Klein, et B. L. Hua, 1999** : Does the traceur gradient vector align with the strain eigenvectors in 2D turbulence. *Phys. Fluids A*, **11**, 3729–3737.
- Leblanc, S. et C. Cambon, 1997** : On the three-dimensional instabilities of plane flows subjected to Coriolis force. *Phys. Fluids*, **9**, 1307–1316.
- Lee, S., 1995** : Localized Storm-Tracks in the absence of local instability. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 977–989.
- Legras, B. et R. Vautard, 1995** : A guide to Lyapunov vectors. *Proc. ECMWF Seminar on Predictability, Vol. I*, 143–156.
- Leith, C. E., 1974** : Theoretical skill of Monte-Carlo forecasts. *Mon. Wea. Rev.*, **102**, 409–418.
- Lifschitz, A., 1994** : On the instability of certain motions of an ideal incompressible fluid. *Advances in applied mathematics*, **15**, 404–436.
- **et E. Hameiri, 1991** : Local stability conditions in fluid dynamics. *Phys. Fluids A*, **3**, 2644–2651.
- Lorenz, E. N., 1963** : Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130–141.
- , **1965** : A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model. *Tellus*, **17**, 321–333.
- , **1972** : A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 258–264.
- Mak, M., 2002** : Wave-packet resonance : instability of a localized barotropic jet. *J. Atmos. Sci.*, **59**, 823–836.

- _____ et M. Cai, 1989 : Local barotropic instability. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 3289–3311.
- Merkine, L., 1977 : Convective and absolute instability of baroclinic eddies. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **9**, 129–157.
- Molteni, F. et T. N. Palmer, 1993 : Predictability and finite-time instability of the northern winter circulation. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, **119**, 269–298.
- _____, R. Buizza, T. N. Palmer, et T. Petroliagis, 1996 : The ECMWF ensemble prediction system : Methodology and validation. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, **122**, 73–120.
- Moore, A. M., 1999 : The dynamics of error growth and predictability in a model of the Gulf Stream. Part II : Ensemble prediction. *J. Phys. Oceanogr.*, **29**, 762–778.
- _____ et A. J. Mariano, 1999 : The dynamics of error growth and predictability in a model of the Gulf Stream. Part I : Singular vector analysis. *J. Phys. Oceanogr.*, **29**, 158–176.
- _____ et B. F. Farrell, 1993 : Rapid perturbation growth on spatially and temporally varying oceanic flows determined using an adjoint method : Application to the Gulf Stream. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1682–1702.
- O'Brien, E., 1992 : Optimal growth rates in the quasi geostrophic initial value problem. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 1557–1570.
- Okubo, A., 1970 : Horizontal dispersion of floatable particles in the vicinity of velocity singularities such as convergences. *Deep-Sea Res.*, **17**, 445–454.
- Orr, W. M. F., 1907 : Stability or instability of the steady motions of a perfect liquid. *Proc. Roy. Irish Acad.*, **27**, 9–69.
- Palmer, T. N., R. Gelaro, J. Barkmeijer, et R. Buizza, 1998 : SVs, metrics and adaptive observations. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 633–653.
- Patil, D. J., B. R. Hunt, E. Kalnay, J. A. Yorke, et E. Ott, 2001 : Local low dimensionality of atmospheric dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 5878.
- Pedlosky, J., 1964 : An initial-value problem in the theory of baroclinic instability. *Tellus*, **16**, 12–17.
- _____, 1989 : Simple models for local instabilities in zonally inhomogeneous flows. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 1769–1778.
- Peng, M. S. et R. T. Williams, 1986 : Spatial instability of the barotropic jet with slow streamwise variation. *J. Atmos. Sci.*, **43**, 2430–2442.
- Phillips, N. A., 1954 : Energy transformations and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-level, quasi-geostrophic model. *Tellus*, **6**, 273–286.
- Pierrehumbert, R. T., 1984 : Local and global baroclinic instability of zonally

- varying flow. *J. Atmos. Sci.*, **41**, 2141–2162.
- Rayleigh, J. W. S., 1880** : On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proc. London Math. Soc.*, **9**, 57–70.
- Reynolds, C., P. J. Webster, et E. Kalnay, 1993** : Random error growth in the NMC’s global forecasts. *Mon. Wea. Rev.*, **122**, 1281–1305.
- Rivière, G., B. L. Hua, et P. Klein, 2001** : Influence of the β -effect on nonmodal baroclinic instability. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, **127**, 1375–1388.
- , ———, et ———, **2002a** : Perturbation growth in terms of barotropic alignment properties. *accepté pour Q.J.R.Meteorol.Soc.*
- , ———, et ———, **2002b** : Perturbation growth in terms of baroclinic alignment properties. *soumis à Q.J.R.Meteorol.Soc.*
- Rotunno, R. et M. Fantini, 1989** : Peterssen’s “Type B” cyclogenesis in terms of discrete, neutral Eady modes. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 3599–3604.
- Schmitz, W. J. et W. R. Holland, 1986** : Observed and modeled mesoscale variability near the Gulf Stream and Kuroshio Extension. *J. Geophys. Res.*, **91**, 9624–9638.
- Simmons, A. J., J. M. Wallace, et G. W. Branstator, 1983** : Barotropic wave propagation and instability, and the atmospheric teleconnection patterns. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 1363–1392.
- Simonnet, E., M. Ghil, K. Ide, R. Temam, et S. Wang, 2002** : Low-frequency variability in shallow-water models of the wind-driven ocean circulation. Part II : time-dependent solutions. *à paraître dans J. Phys. Oceanogr.*
- Snyder, C. et A. Joly, 1998** : Development of perturbations within a growing baroclinic wave. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, **124**, 1961–1983.
- et **T. M. Hamill, 2002** : Lyapunov stability of a turbulent baroclinic jet. *Soumis à J. Atmos. Sci.*
- , ———, et **S. B. Trier, 2002** : Linear evolution of error covariances in a quasigeostrophic model. *Soumis à Mon. Wea. Rev.*
- Straub, D. N, 2002** : Instability of 2D flows to hydrostatic 3D perturbations. *Soumis à J. Atmos. Sci.*
- Szunyogh, I., E. Kalnay, et Z. Toth, 1997** : A comparison of Lyapunov and optimal vectors in a Low-resolution GCM. *Tellus*, **49A**, 200–227.
- Thompson, P. D., 1957** : Uncertainty of initial state as a factor in the predictability of large scale atmospheric flow patterns. *Tellus*, **9**, 275–295.
- , **1986** : A simple approximate method of stochastic-dynamic prediction for small initial errors and short range. *Mon. Wea. Rev.*, **114**, 1709–1715.

- Toth, Z. et E. Kalnay, 1993 :** Ensemble forecasting at NMC : the generation of perturbations. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **74**, 2317–2330.
- et ———, **1997 :** Ensemble forecasting at NCEP and the breeding method. *Mon. Wea. Rev.*, **125**, 3297–3319.
- Tupaz, J. B., R. T. Williams, et C. P. Chang, 1978 :** A numerical study of barotropic instability in a zonally varying easterly jet. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 275–295.
- Vallis, G. K., 1983 :** On the predictability of quasi-geostrophic flow : the effects of beta and baroclinicity. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 10–27.
- Vannitsem, S. et C. Nicolis, 1997 :** Lyapunov vectors and error growth patterns in a T21L3 quasigeostrophic model. *J. Atmos. Sci.*, **54**, 347–361.
- Warrenfeltz, L. L. et R. L. Elsberry, 1989 :** Superposition effects in rapid cyclogenesis-Linear model studies. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 789–802.
- Weiss, J., 1991 :** The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional turbulence. *Physica D*, **48**, 273–294.
- Whitaker, J. S. et R. M. Dole, 1995 :** Organization of Storm Tracks in zonally varying flows. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 1178–1191.
- Xu, Q., 1992 :** Ageostrophic pseudo-vorticity and geostrophic C-vector forcing - A new look at the Q vector in three dimensions. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 981–990.
- Yoden, S. et M. Nomura, 1993 :** Finite-time Lyapunov stability analysis and its application to atmospheric predictability. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 1531–1543.