Equations semi-géostrophiques pour la frontogenèse - Cas bidimensionnel

7 février 2009

Préliminaires

On se place dans le cadre de l'approximation du moment géostrophique où l'advection par la vitesse totale (géostrophique et agéostrophique) est prise en compte. Ce qu'on néglige est la dérivée temporelle de la vitesse agéostrophique dans l'équation du mouvement. Ceci est la base de l'approximation semi-géostrophique.

On écrit donc

$$\begin{aligned} D_t u_g - f v_a &= 0 \\ D_t v_g + f u_a &= 0 \end{aligned}$$

avec $D_t = \partial_t + (u_g + u_a)\partial_x + (v_g + v_a)\partial_y + w\partial_z$. On néglige seulement $D_t u_a$ et $D_t v_a$.

On se place pour simplifier, dans le cadre bidimensionnel où la seule dépendance en y est dans la vitesse géostrophique v_g le long du front et où la composante agéostrophique v_a est négligée.

On renonce à la notation prime pour les perturbations et on note $\tilde{b} = \bar{b}(z) + b(x,z,t)$, la température totale comprenant la moyenne $\bar{b}$ ne dépendant que de z et la fluctuation b dépendant de (x,z,t) Même convention concernant le géopotentiel ϕ qui s'écrit ainsi $\tilde{\phi} = \bar{\phi}(z) + \phi(x,y,z,t)$. De façon à satisfaire la simplification adoptée (pas de dépendance en y sauf pour établir la confluence) on est de plus amené à supposer $\phi(x,y,z,t) = y\varphi(x) + \phi'(x,z,t)$.

L'écoulement géostrophique et la température satisfont l'équilibre du vent thermique $f\partial_z v_g = \partial_x b$ et dérivent de la fonction de courant ϕ : $v_g = \frac{1}{f}\partial_x\tilde{\phi}$ et $b = \partial_z\phi$, $\bar{b} = \partial_z\bar{\phi}$.

On définit la vorticité quasi-géostrophique tri-dimensionnelle comme

$$\vec{\omega} = (-\partial_z v_g, \partial_z u_g, \zeta)$$

où $\zeta = f + \partial_x v_g$. Notez que la deuxième composante est nulle dans l'approximation adoptée. La vorticité potentielle est $q = \vec{\omega}.\vec{\nabla}\tilde{b}$.

Equations semi-géostrophiques

1. On introduit dans les équations du moment géostrophique la transformation $X = x + v_g/f$.
   Montrez que $D_t X = u_g$.
2. On effectue un changement de variables où x est remplacé par X. Pour préciser que les dérivations ont lieu à X et non plus x constant, on emploiera aussi les variables $Z = z$, $Y = y$ et $\tau = t$.
   Montrez que $\partial_x = \frac{\zeta}{f}\partial_X$ et $\partial_z = \partial_Z + \frac{1}{f^2}\partial_x b \partial_X$.
3. Montrez que $q = \zeta \partial_Z \tilde{b}$.
4. Montrez que
   $$(1 - \frac{1}{f}\partial_X v_g)(1 + \frac{1}{f}\partial_x v_g) = 1\,. \tag{1}$$
5. On définit $\tilde{\Phi} = \tilde{\phi} + \frac{1}{2}v_g^2$ que l'on pourra décomposer en $\tilde{\Phi} = \bar{\Phi} + \Phi$.
   Montrez que $\partial_X \Phi = \partial_x \phi$ et $\partial_Z \tilde{\Phi} = \partial_z \tilde{\phi}$. En déduire la relation
   $$\frac{1}{f^2}\partial^2_{X^2}\Phi + \frac{f}{q}\partial^2_{Z^2}\tilde{\Phi} = 1.$$
6. Montrez que $\partial_z v_g = \frac{\zeta}{f}\partial_Z v_g$. Déduisez la forme de l'équation du vent thermique en coordonnées (X,Z).
7. On introduit aussi $\mathcal{D}_\tau = \partial_\tau + u_g \partial_X + v_g \partial_Y$, l'advection par le vent géostrophique dans les coordonnées transformées.
   Montrez que $D_t = \mathcal{D}_\tau + w\partial_Z$.
8. Trouvez U_a et W tels que $\mathcal{D}_\tau v_g + fU_a = 0$ et $\mathcal{D}_\tau b + \frac{q}{f}W = 0$. Montrez que $\partial_X U_a + \partial_Z W = 0$.

9. Ceci permet de définir une fonction de courant Ψ de la circulation agéostrophique transformée, telle que $U_a = \partial_Z \Psi$ et $W = -\partial_X \Psi$.
   Par analogie avec le cas géostrophique, trouvez Q_1' tel que

$$-2Q_1' = \partial_X(\frac{q}{f}\partial_X \Psi) + f^2 \partial^2_{Z^2} \Psi. \qquad (2)$$