EXERCICES
Dynamique atmosphérique

1

On considère une cuve cylindrique remplie d'eau et tournant autour de son axe. Comment change la vorticité (relative à la cuve) d'une colonne de fluide qui est déplacée depuis le centre de la cuve jusqu'à une distance de 50 cm du centre ? La cuve tourne à la vitesse de 20 tours par minute, le fond est plat, la profondeur au centre est 10 cm et le fluide est initialement en rotation solide.

1.1 Solution

Si r est le rayon, la hauteur $\eta(r)$ de la surface par rapport au centre de la cuve est telle que le gradient de pression radial procure l'accélération centripète nécessaire à la rotation solide de la cuve à la vitesse angulaire ω, c.a.d.

$$\omega^2 r = g\frac{\partial \eta}{\partial r}\,,$$

d'où

$$\eta(r) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2\,.$$

Si la colonne se déplace en bloc, sa hauteur varie avec la distance au centre de la cuve. Par le théorème de Kelvin, la vorticité $\zeta(r)$ de la colonne varie selon la relation

$$\frac{\zeta(r)}{H_0 + \frac{1}{2}\omega^2 r^2} = \frac{\zeta(0)}{H_0}$$

où H_0 est la hauteur au centre de la cuve. Sachant que $\zeta(0) = 2\omega$, la vorticité est

$$\zeta(r) = 2\omega\frac{H_0 + \frac{1}{2}\omega^2 r^2}{H_0}\,.$$

Application numérique :

$$\omega = \frac{2\pi}{3} = 4{,}19\ \mathrm{s}^{-1}\,,$$

$$\zeta(r = 50 \text{ cm}) = 2\omega \times \frac{0{,}1 + \frac{1}{2}\omega^2(0{,}5)^2}{0{,}1} = 18{,}4 \text{ s}^{-1}\,.$$

2

Un pilote traversant l'océan à la latitude 45N dispose d'un baromètre altimétrique et d'un radar altimétrique, ce dernier mesurant directement son altitude par rapport à la mer. Volant à 100 m/s par rapport à l'air environnant, le pilote maintient son altitude en se référant à son baromètre altimétrique (c'est à dire qu'il vole à pression constante). A un instant donné, il note que son radar altimétrique indique 5700 m et une heure plus tard, il note que la valeur est 5950 m. Dans quelle direction et de quelle distance le pilote a-t-il devié de son cap pendant cette heure ?

2.1 Solution

On utilise la relation géostrophique entre le gradient horizontal du géopotentiel $\phi = gz$ et la force de Coriolis. Si x est la direction de cap de l'avion et v la vitesse du vent selon la direction transverse y, on a :

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} = -fv\,,$$

où $f = 2\Omega \sin\varphi$ (φ latitude) est le paramètre de Coriolis.Puisque le gradient de ϕ est positif selon la direction de vol, la vitesse latérale du vent est positive, c'est à dire que l'avion est dévié vers la gauche de son cap. Si U est la vitesse de l'avion par rapport à l'air (pourquoi faut-il prendre cette vitesse et pas la vitesse au sol ?) le déplacement pendant Δt est $\Delta x = U\Delta t$. Avec une variation altimétrique de Δz, la vitesse latérale est

$$v = \frac{g\delta z}{fU\Delta t}\,,$$

et la déviation de cap est

$$\Delta y = v\Delta t = \frac{g\delta z}{fU}\,.$$

Application numérique

$$\Delta y = \frac{9{,}81 \times 250 \times 86400}{4\pi \times 100} = 169 \text{ km}\,.$$

Remarque : ne pas confondre ce calcul avec celui de l'effet de la force de Coriolis sur l'avion lui même qui induirait une dérive du cap. On suppose que le pilote corrige cette dérive en maintenant son cap.

3

On définit la fonction d'Exner $\Pi = C_p(p/p_0)^\kappa$ avec $\kappa = R/C_p$. Montrez que la loi hydrostatique s'écrit

$$\frac{\partial \phi}{\partial \Pi} + \theta = 0$$

où $\phi = gz$ est le géopotentiel et θ est la température potentielle. On définit aussi la fonction de Montgomery $M = \phi + C_pT$. Montrez que la loi hydrostatique s'écrit

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = \Pi$$

.

3.1 Solution

La loi hydrostatique s'écrit

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{1}{\rho} = 0\,.$$

Or $dp = p/(\kappa\Pi)d\Pi$ et $\theta = C_pT/\Pi$, ce qui permet d'obtenir, en utilisant la loi du gaz parfait

$$\frac{\partial \phi}{\partial \Pi} = -\frac{p}{\kappa\Pi\rho} = -\frac{C_pT}{\Pi} = -\theta\,.$$

On peut exploiter cette propriété pour dériver $M = \phi + \Pi\theta$, soit

$$\frac{\partial M}{\partial \Pi} = -\theta + \theta + \Pi\frac{\partial \theta}{\partial \Pi}\,,$$

d'où

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = \Pi\,.$$

4

Une cuve cylindrique de rayon a et de profondeur constante H tournant à une vitesse angulaire Ω autour de son axe de symétrie est remplie d'eau initialement au repos (par rapport a la cuve). Un volume V de fluide est soutiré a travers un orifice de petit diamètre au centre du cylindre. Pourquoi se produit-il un vortex ? En négligeant la friction, trouvez une expression de la vitesse azimuthale résultante, relative à la cuve, en fonction du rayon. On supposera que le mouvement est indépendant de la profondeur et que $V \ll \pi a^2 H$. Calculez aussi la vorticité relative et la circulation relative.

4.1 Solution

On applique le théorème de conservation de la circulation (utilisable en raison de l'incompressibilité) à un contour matériel circulaire centré dans la cuve. Lorsque le fluide est soutiré au centre, la surface du contour diminue. Par suite, son rayon passe de r_0 à $r < r_0$. La vitesse azimuthale passe de v_0 à v telle que $r_0 v_0 = rv$. Si la cuve est initialement en rotation solide, on a $v_0 = \Omega r_0$, d'où $v = \Omega r_0^2/r$ qui est supérieur à la vitesse azimuthale Ωr de la rotation solide en r. Par conséquent, le fluide se met en rotation cyclonique par rapport à la cuve (c.a.d. dans le même sens que la rotation de la cuve).

Si on suppose pour simplifier que le mouvement est indépendant de la profondeur, le volume retiré $V = \pi a^2 H$ implique que la relation entre r_0 et r est $r^2 = r_0^2 - a^2$. La vitesse azimuthale par rapport à la cuve est v' telle que

$$v' = \Omega \frac{r_0^2}{r} - \Omega r = \Omega \frac{a^2}{r} = \Omega \frac{a^2}{\sqrt{r_0^2 - a^2}} = \ .$$

La vorticité relative est $\zeta(r) = (1/r)\partial(rv')/\partial r$, soit $\zeta(r) = 0$. Le fluide à distance du centre n'a pas acquis de vorticité, ce qui est en accord avec le fait que des forces visqueuses ou de paroi sont nécessaires pour faire varier la vorticité. Au centre de la cuve, le profil de v' présente une singularité en 0. Un quanta de vorticité Γ est crée au dessus de l'orifice d'évacuation, responsable de la circulation qui s'établit à distance. On obtient

$$\Gamma = 2\pi r v'(r) = 2\pi\Omega a^2 \ ,$$

qui, comme on s'y attendait, ne dépend pas de r.

5

La température moyenne dans la couche 750-500 hPa décroît vers l'est de 3 K pour 100 km. Si le vent géostrophique à 750 hPa est du sud-est et de 20 m/s, quelle est la direction et la vitesse du vent géostrophique à 500 hPa. On prendra f= 10^{-4} s^{-1}.

5.1 Solution

On utilise la relation du vent thermique obtenue en combinant l'équilibre géostrophique et l'équilibre hydrostatique

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial(-\ln p))} = \frac{R}{f} \vec{k} \times \vec{\nabla} T$$

Cette relation nous dit que le gradient vertical du vent est proportionnel au gradient horizontal de température tourné de 90 degrés. Ici le gradient vertical de vent est dirigé vers le sud et la variation entre 750 et 500 hPa est

$$DeltaV = \frac{287 \times 3\ 10^{-5}}{10^{-4}} \ln \frac{750}{500} = 34.9 \text{ m s}^{-1}.$$

Les composantes du vent résultant à 500 hPa sont donc -14.1 m s^{-1} et -20.8 m s^{-1}, soit un module de 25.1 m s^{-1} et une direction de -124°.

Ici le gradient du vent est dirigé vers le nord-nord-est (angle de tangente 3), le gradient horizontal de température dans la couche est donc dirigé vers le sud-est-est (angle de tangente -1/3). La projection de la vitesse sur ce gradient est négative au niveau du sol comme des nuages. Il y a donc advection d'air chaud et la température va se réchauffer.

6

Supposez qu'une colonne d'atmosphère à 43°N est initialement isotherme de 900 à 500 hPa. Le vent géostrophique est du sud et de 10 m/s à 900 hPa, de l'ouest et de 10 m/s à 700 hPa et de l'ouest de 20 m/s à 500 hPa. Calculez le gradient moyen de température dans les deux couches 900-700 hPa et 700-500 hPa. Calculez le taux de variation de la température dans chaque couche dû au transport par l'écoulement géostrophique. Combien de temps faut-il pour établir un gradient adiabatique sec entre 800 et 600 hPa à partir d'un profil isotherme ? (On admettra que l'épaisseur de la couche 800-600 hPa est initialement 2,25 km).

6.1 Solution

On applique la relation du vent thermique (voir exercice précédent). Entre 900 et 700 hPa, l'intensité du vent ne change pas mais il tourne de 90 degrés vers l'est. La différence est orientée vers le sud-est et le gradient de température est orienté vers le sud-ouest avec comme intensité

$$\frac{10^{-4} \times 10\sqrt{2}}{287 \times \ln(900/700)} = 1{,}96 \text{ K/100 km}.$$

Entre 700 et 500 hPa, le vent change d'intensité mais pas de direction. Le gradient de température est orienté vers le sud et d'intensité

$$\frac{10^{-4} \times 10}{287 \times \ln(700/500)} = 1{,}04 \text{ K/100 km}.$$

Entre 700 et 500 hPa, l'advection de température est nulle car le vent est perpendiculaire au gradient de température. Entre 700 et 900 hPa, le gradient de température se projete sur la direction du vent. Au milieu de la couche, à 800 hPa, on peut estimer par interpolation que le vent a pour intensité $10\sqrt{2} = 7{,}07$ m/s et est dirigé de façon opposée au gradient de température. Il existe donc un réchauffement par advection qui est $\partial T/\partial t = 1{,}9610^{-5} \times 7{,}07 = 1{,}4$ K/s $= 0{,}5$ K/h.

La température entre 700 et 500 hPa ne changeant pas, l'établissement d'un profil adiabatique dépend seulement de la variation de la température dans la couche entre 800 et 600 hPa. est constante entre 800 et 600 hPa).

Sachant que $\partial\phi/\partial \ln p + RT = 0$, l'épaisseur de la couche 600-800 hPa nous fournit la température initiale du profil isotherme

$$T = \frac{\Delta\phi}{R \ln p_2/p_1} = \frac{9{,}81 \times 2250}{287 \ln 8/6} = 267 \text{ K}\,.$$

Le temps τ nécessaire pour que la température potentielle à p_1 (800 hPa) soit la même qu'à p_2 (600 hPa) est donnée par

$$T\left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\kappa} = (T + \tau\frac{\partial T}{\partial t}\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\kappa}$$

soit

$$\tau = \frac{T\left(\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\kappa} - 1\right)}{\frac{\partial T}{\partial t}} = \frac{267\left(\left(\frac{8}{6}\right)^{\kappa} - 1\right)}{0{,}5} = 1{,}9 \text{ jour}$$

7

La planète Vénus tourne si lentement autour de son axe qu'il est raisonnable de négliger la force de Coriolis. Pour une circulation stationnaire, sans friction et parallèlle aux cercles de latitudes, montrez que l'équation du mouvement se ramène à l'équilibre cyclostrophique :

$$u^2 \tan\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\varphi}$$

où φ est la latitude.

En transformant cette expression en coordonnées isobares, calculez l'équation du vent thermique. En supposant que le gradient horizontal de température est indépendant de l'altitude, comment doit varier $< T >$ (la moyenne verticale de la température) en fonction de φ pour que le moment angulaire soit indépendant de la latitude à tous les niveaux ? En supposant une vitesse vers l'Est de 100 m/s à une altitude d'environ 60 km au dessus de l'équateur ($p_1 = 2.9 \times 10^5$ Pa) et une vitesse nulle au sol ($p_0 = 9.5 \times 10^6$ Pa), quelle est la différence de température moyenne entre l'équateur et les pôles ? Le rayon de la planète est $a = 6100$ km et la constante des gaz est $R = 187$ J kg^{-1} K^{-1}.

7.1 Solution

La relation cyclostrophique exprime l'équilibre entre l'accélération d'entraînement et la composante radiale de la pression horizontale (l'autre composante étant selon la verticale et absorbée dans la gravité)

$$u^2 \tan\varphi = -\frac{1}{\rho a \sin\varphi}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\,.$$

En coordonnées isobares, cette relation s'écrit

$$\frac{u^2}{a\cos\varphi} = -\left.\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\right|_p\,.$$

On dérive cette dernière expression par rapport à p et on utilise la loi hydrostatique $\partial\phi/\partial p = -1/\rho = -RT/p$ pour obtenir

$$\frac{\partial}{\partial p}u^2 \tan\varphi = -\frac{\partial^2\phi}{\partial p \partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left.\frac{RT}{p}\right|_p = \frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\,.$$

Ceci constitue l'équation du vent thermique pour l'équilibre cyclostrophique. On peut l'exprimer en fonction du moment angulaire $\omega = u/(a\cos\varphi)$, soit

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial p} = \frac{R}{a^2\sin\varphi\cos\varphi}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\,.$$

En supposant le gradient méridien de température indépendant de l'altitude, on a

$$\omega^2(p_1) - \omega^2(p_0) = \frac{R\ln(p_0/p_1)}{a^2\sin\varphi\cos\varphi}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\,.$$

Pour que le moment angulaire soit indépendant de la latitude, il faut donc que le profil de température moyenne satisfasse

$$\frac{\partial < T >}{\partial\varphi} = -C\sin 2\varphi\,,$$

où C est une constante indépendante de la latitude. La différence de température entre pôle et équateur est $\Delta T = C/2$. Avec les paramètres indiqués, on a

$$C = \frac{u_{\mathrm{eq}}^2(p_1))}{R\ln(p_0/p_1)} = \frac{10^4}{187\ln(95/2.9)} = 15{,}33\text{ K}\,,$$

d'où $\Delta T = 7{,}7$ K.

8

On veut étudier le démarrage de la brise de mer qui s'établit le jour en été lorsque le sol chauffe en bordure d'une mer dont la température ne varie pas. On suppose un sol à une température T_2 et une mer à la température T_1. La différence de température est $T_2 - T_1 = 10$ K. On admet qu'il s'établit un courant fermé avec deux branches isothermes, respectivement ascendante au dessus du sol et descendante au dessus de la mer) et deux branches horizontales isobares à pressions $P_0 = 1000$ hPa et $P_1 = 900$ hPa. La longueur des branches horizontales est $L = 20$ km et la hauteur des branches ascendante et descendante est $h = 1000$ m. En utilisant le théorême de Kelvin sur la variation de la circulation le long d'un contour matériel donnez une estimation de l'accélération du courant décrit ci-dessus due aux effets thermiques. Qu'est ce qui limite finalement l'intensité de ce courant ?

8.1 Solution

On considère le contour matériel formé de la succession des quatre branches décrites dans l'énoncé orienté dans le sens du vent. On admet que le vent V est opposé sur les deux branches horizontales. Si on néglige la contribution des deux courtes branches verticales à la circulation, celle-ci est $C = 2LV$. La variation de la circulation est donnée par le théorème de Kelvin

$$\frac{dC}{dt} = \oint \frac{1}{\rho} dp \,.$$

Les deux branches horizontales étant isobares ne contribuent pas à la variation de la circulation. L'intégrale provient entièrement des deux branches verticales isothermes. On a donc

$$\frac{dC}{dt} = \int_{p_0}^{p_1} RT_1 \frac{dp}{p} + \int_{p_1}^{p_0} RT_2 \frac{dp}{p} = R(T_1 - T_2)\ln(p_0/p_1) \,,$$

ou

$$\frac{dV}{dt} = \frac{R(T_1 - T_2)\ln(p_0/p_1)}{2L} \,.$$

Application numérique

$$\frac{dV}{dt} = \frac{287 \times 10 \ln(10/9)}{4\ 10^4} = 7{,}56\ 10^{-3}\ \mathrm{ms}^{-2} \,.$$

Cette accélération conduit à un vent de 27 ms^{-1} en une heure à partir du repos, ce qui serait considérable. La friction au sol limite en fait le vent atteint à de plus faibles valeurs mais ce simple calcul indique la vigueur de la brise de mer dans des conditions standards.

9

On décompose le vent horizontal $\vec{U}$ en $\vec{U} = \vec{U}_g + \vec{U}_a$ où $\vec{U}_g = (u_g, v_g)$ est la composante géostrophique et $\vec{U}_a = (u_a, v_a)$ est la composante agéostrophique. La composante géostrophique est définie par

$$u_g = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad v_g = \frac{1}{f_0}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

où ϕ est le géopotentiel et $f_0 = 2\Omega \sin \varphi_0$, φ_0 étant la latitude moyenne.

Justifiez les équations quasi-géostrophiques

$$\begin{aligned} \frac{D_g}{Dt} u_g - f_0 v_a &= 0 \\ \frac{D_g}{Dt} v_g + f_0 u_a &= 0 \\ \frac{D_g}{Dt} T - S\omega &= 0 \end{aligned}$$

où $\frac{D_g}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U}_g.\vec{\nabla}$, $\omega = Dp/Dt$ et $S = -d\overline{T}/dp - R\overline{T}/C_p p$. $\overline{T}$ est une température moyennée horizontalement sur une surface isobare.

Montrez que l'équation du vent thermique s'écrit

$$p\frac{\partial u_g}{\partial p} = \frac{R}{f_0}\frac{\partial T}{\partial y} \qquad p\frac{\partial v_g}{\partial p} = -\frac{R}{f_0}\frac{\partial T}{\partial x}$$

En utilisant cette relation pour éliminer la dérivée temporelle entre l'équation pour u_g et celle pour T d'une part et entre l'équation pour v_g et celle pour T d'autre part, montrez que l'on obtient

$$\begin{aligned} \sigma\frac{\partial \omega}{\partial y} - f_0^2\frac{\partial v_a}{\partial p} &= -2Q_2 \\ \sigma\frac{\partial \omega}{\partial x} - f_0^2\frac{\partial u_a}{\partial p} &= -2Q_1 \end{aligned}$$

où

$$\vec{Q} = (Q_1, Q_2) = \left(-\frac{R}{p}\frac{\partial \vec{U}_g}{\partial x}.\vec{\nabla}T, -\frac{R}{p}\frac{\partial \vec{U}_g}{\partial y}.\vec{\nabla}T\right)$$

σ est une constante que vous déterminerez.

Montrez que l'on obtient

$$\sigma\nabla^2\omega + f_0^2\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = -2\vec{\nabla}.\vec{Q}$$

Montrez que les régions où $\vec{Q}$ est convergent (divergent) sont des ascendances (descendances). Montrez que l'air est descendant au nord d'une zone de convergence ($\partial u_g/\partial x > 0$, $\partial v_g/\partial y < 0$) et descendant au sud. Montrez que l'air est ascendant en amont d'une perturbation cyclonique et descendant en aval

9.1 Solution

La composante géostrophique du vent est par définition celle qui équilibre le gradient de pression par la force de Coriolis qui lui est associée. Les équations quasi-géostrophiques peuvent s'obtenir à partir des équations primitives du mouvement en ôtant les deux termes de l'équilibre géostrophique et en négligeant les composantes agéostrophiques dans l'advection horizontale. Plus formellement, on peut considérer le nombre de Rossby $R_o = U/L\Omega$ et poser que la composante agéostrophique est d'ordre 1 en R_o. Les équations quasi-géostrophiques s'obtiennent alors à l'ordre 1 en R_o. Ces équations indiquent que c'est la composante agéostrophique du mouvement qui intervient dans l'évolution de l'écoulement géostrophique.

L'équation du vent thermique s'obtient en combinant l'équilibre géostrophique et l'équilibre hydrostatique $d\phi/dp + 1/\rho = 0$ et en utilisant la loi du gaz parfait pour remplacer ρ.

La première relation s'obtient en appliquant l'opérateur $f_0\partial/\partial p$ à l'équation pour $\partial u_g/\partial t$ et l'opérateur $(R/p)\partial/\partial y$ à l'équation pour $\partial T/\partial t$. En faisant la différence entre les deux, toutes les quantités advectées disparaissent grâce à l'équilibre du vent thermique et il reste

$$\frac{RS}{p}\frac{\partial \omega}{\partial y} - f_0^2\frac{\partial v_a}{\partial p} = -2\frac{R}{p}\left(\frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right) = -2Q_2\,.$$

La seconde équation avec Q_1 s'obtient de même.

En dérivant l'équation en Q_2 par rapport à y et celle en Q_1 par rapport à x, en utilisant la relation de continuité $\partial\omega_a/\partial p + \partial u_a/\partial x + \partial v_a/\partial y = 0$ et en remplaçant les dérivées verticales de (u_g, v_g) grâce à l'équation du vent thermique, on arrive à

$$\sigma\nabla^2\omega + f_0^2\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2} = -2\vec{\nabla}.\vec{Q}\,.$$

On sait qu'aux minima d'une fonction correspondent les maxima de son laplacien et vice-et-versa. Par suite le minimum de $\vec{\nabla}.\vec{Q}$ (convergence) correspond à un minimum de ω, c'est à dire une ascendance (rappel : $\omega = Dp/Dt$).

Si on se place dans l'hypothèse $\partial T/\partial x = 0$ pour simplifier, on a

$$\vec{Q} = -\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y}\left(\frac{\partial v_g}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial u_g}{\partial x}\vec{j}\right)\,,$$

avec un gradient méridien $\partial T/\partial y$ négatif.

Dans le cas de la confluence, $\vec{Q}$ est dirigé vers le sud au niveau du jet confluent. Par continuité il est donc divergent au nord et convergent au sud.

Dans le cas d'une perturbation cyclonique, tournant dans le sens direct, on a $\partial v_g/\partial x > 0$ et $\partial u_g/\partial x = 0$ si on se situe sur l'axe de son passage. Le vecteur $\vec{Q}$ est donc dirigé vers l'est. Il doit converger à l'est et diverger à l'ouest.

10

Dans la couche limite de surface d'un courant océanique s'écoulant de manière uniforme dans la direction x avec la vitesse géostrophique U, on peut écrire

$$\begin{aligned} -fv(z) &= K\frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^2} \\ fu(z) &= K\frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

avec pour conditions aux limites

$$\begin{aligned} \nu\frac{\partial}{\partial z}(u,v) &= \frac{1}{\rho}(X,Y) \quad \text{pour} \quad z=0 \\ (u,v) &= (U,O) \quad \text{pour} \quad z=-\infty \end{aligned}$$

où (X,Y) est la tension de surface de l'océan. Justifiez les approximations employées ci-dessus. Résoudre la structure verticale de u et v. Calculez le transport intégré dû à la vitesse d'Ekman $(u-U,v)$. Que peut-on en déduire le long de la côte de Californie où il existe à la fois un courant océanique vers le sud-est (le long de la côte) et des vents de surface soufflant vers l'est. On supposera que le gradient horizontal de pression ne dépend pas de la coordonnée z.

10.1 Solution

Au voisinage de la surface, on ne peut plus négliger les termes de viscosité mais ceux-ci sont limités à la direction verticale où le cisaillement est fort. La vitesse U est la vitesse géostrophique en équilibre avec le gradient horizontal de pression qui ne dépend pas de z. On définit une vitesse complexe c par

$$c = u - U + \imath v\,.$$

Cette vitesse est gouvernée par l'équation

$$fc(z) = -\imath K\frac{\partial^2 c(z)}{\partial z^2}\,,$$

avec comme conditions aux limites $c \to 0$ quand $z \to -\infty$ et $\partial c/\partial z = (X+\imath Y)/\rho$ en $z=0$. En tenant compte de ces conditions, la solution pour c est de la forme

$$c(z) = c_0 \exp\left(\pi(1+\imath)\frac{z}{\delta_E}\right)\,,$$

où l'épaisseur d'Ekman est

$$\delta_E = \pi \left(\frac{2\kappa}{f}\right)^{1/2} .$$

Notez que le facteur π est une pure convention. Avec la condition à la surface, on a

$$c_0 = u_0 + \imath v_0 = \frac{\delta_E}{\pi\rho}\frac{X + \imath Y}{1 + \imath} ,$$

que nous ne mettrons pas sous une autre forme. Retranscrit sous la forme des vitesses u et v, on a

$$\begin{aligned} u - U &= \exp\left(\frac{\pi z}{\delta_E}\right)(u_0 \cos\frac{\pi z}{\delta_E} - v_0 \sin\frac{\pi z}{\delta_E}) , \\ v &= \exp\left(\frac{\pi z}{\delta_E}\right)(u_0 \sin\frac{\pi z}{\delta_E} + v_0 \cos\frac{\pi z}{\delta_E}) , \end{aligned}$$

qui montre que l'hodographe de la vitesse forme une spirale selon la verticale avec δ_E comme demi-période.

Si on intègre verticalement le flux masse de la vitesse d'Ekman on obtient

$$\int_{-\infty}^{0} c_0 \exp\left(\pi(1 + \imath)\frac{z}{\delta_E}\right) dz = \frac{\delta_E c_0}{1 + \imath} ,$$

ce qui montre que ce flux est tourné de $\pi/4$ vers la droite par rapport à la vitesse c_0 et de $\pi/2$ par rapport à la tension du vent. Par conséquent, dans le cas de la Californie, cela implique un transport vers le sud pour une tension du vent vers l'Est. Ce transport présente une composante normale à la côte (orientée NO-SE) qui doit être compensée par une remontée d'eau profonde le long du talus continental. Cette remontée d'eau profonde entraîne avec elle des matériaux nutritifs vers la surface de l'océan. C'est la raison pour laquelle la côte californienne est riche en poissons.

11

On considère un mouvement curviligne horizontal caractérisé par la courbure Γ des trajectoires et où v est la vitesse tangentielle (toujours positive). On définit les coordonnées curvilignes (s, n) où s est la coordonnée tangente et orientée dans le sens du mouvement et n est la coordonnée normale au mouvement. Les vecteurs unitaires tangent et normal sont $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ respectivement. Le rayon de courbure Γ est positif si la courbure est à gauche (cyclonique) et négatif si la courbure est à droite (anticyclonique).

L'équation du mouvement se décompose en

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial s}, \tag{1}$$

$$\frac{v^2}{\Gamma} + fv = -\frac{\partial \phi}{\partial n}, \tag{2}$$

où ϕ est le géopotentiel et $f = 2\Omega \sin \varphi$ est le paramètre de Coriolis à la latitude φ (on suppose que l'on est dans l'hémisphère nord, soit $f > 0$).

1) Justifiez ces équations. (indication : $d\vec{\imath}/ds = \vec{\jmath}/\Gamma$)

2) Résolvez (2) pour v. Si on suppose le gradient radial de géopotentiel négatif, montrez que sa valeur absolue est limitée au cœur d'un anticyclone alors qu'elle peut prendre de grandes valeurs au cœur d'un cyclone.

Le vent géostrophique v_g est défini par $fv_g = -\partial\phi/\partial n$. Montrez qu'il surestime le vent réel dans un cyclone et qu'il le sous-estime dans un anticyclone. Dans quelle proportion ? (Utilisez les ordres de grandeur que vous connaissez)

3) Dans une tornade, la force de Coriolis est négligeable. Pourquoi ? On suppose que l'hypothèse hydrostatique reste toujours valable. A quoi se ramène l'équation (2) ?

On suppose que la tornade est en rotation solide à la vitesse angulaire ω et que la température T est uniforme. Comment varient radialement le géopotentiel et la pression ?

Si la température est $T = 288$ K, si le vent est $v = 100$ m s^{-1} à 100 m du centre de la tornade où la pression est 1000 hPa, quelle est la pression au centre de la tornade ?

Quelle est la force exercée par m^2 de toiture lorsque la tornade passe au dessus d'une maison ? Expliquez pourquoi il vaut mieux laisser les fenêtres ouvertes.

11.1 Solution

1) En notant $\vec{\mathbf{v}} = v\vec{\imath}$,l'équation du mouvement est

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\imath} + v\frac{d\vec{\imath}}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial s}\vec{\imath} - \frac{\partial \phi}{\partial n}\vec{\jmath} - fv\vec{\jmath}.$$

Par la définition géométrique de la courbure, on a $d\vec{\imath}/ds = \vec{\jmath}/\Gamma$ et donc $d\vec{\imath}/dt = v\vec{\jmath}/\Gamma$. En remplaçant dans l'équation du mouvement et en projetant sur $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, on obtient (1) et (2).

2) La résolution de (2) pour v donne

$$v = -\frac{f\Gamma}{2} + \epsilon\frac{\Gamma}{2}\sqrt{f^2 - \frac{4}{\Gamma}\frac{\partial \phi}{\partial n}},$$

avec comme conditions (pour que la racine existe et $v > 0$)

$$\begin{cases} \text{si} \quad \Gamma > 0 : \epsilon = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} < 0, \\ \text{si} \quad \Gamma < 0 \begin{cases} \epsilon = -1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} > 0, \\ \epsilon = \pm 1 \quad \text{et} \quad 0 > \frac{\partial \phi}{\partial n} > \frac{f^2 \Gamma}{4}. \end{cases} \end{cases}$$

Dans le cas où $\partial\phi/\partial n < 0$, ce qui est vérifié lorsque c'est le terme de Coriolis qui domine dans le terme de gauche de (2), la condition précédente est automatiquement vérifiée pour $\Gamma > 0$, c'est à dire dans un cyclone, quelque soit la valeur absolue de $\partial\phi/\partial n$. Par contre, si $\Gamma < 0$, c'est à dire dans un anticyclone, la condition précédente place une borne à la valeur absolue du gradient. Près du centre d'un anticyclone, quand $\Gamma \to 0$, la distribution de géopotentiel devient plate et le mouvement faible. Cette contrainte ne s'applique pas aux cyclones où les vents à l'intérieur peuvent être beaucoup plus forts.

En introduisant le vent géostrophique dans (2), on obtient

$$\frac{v_g}{v} = 1 + \frac{v}{fR} \, .$$

Il s'ensuit que le vent réel est supérieur au vent géostrophique dans un anticyclone et inférieur dans un cyclone.

3) A l'échelle de la tornade, l'accélération de Coriolis est négligeable devant l'accélération d'entraînement. L'équilibre se ramène à l'équation cyclostrophique

$$\frac{v^2}{\Gamma} = -\frac{\partial \phi}{\partial n} \, .$$

Si la tornade est en rotation solide, on a $v = \omega r$ et

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\partial \phi}{\partial n} = \omega^2 r \, ,$$

qui s'intègre en

$$\phi(r) = \phi_0 + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \, .$$

L'équation cyclostrophique pour la pression s'écrit

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \omega^2 r \, ,$$

ou encore

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial r} = \omega^2 r R T \, .$$

Pour une tornade isotherme, elle s'intègre en

$$p(r) = p_0 \exp\left(\frac{\omega^2 r^2}{2RT}\right) \, .$$

Application numérique : La vitesse de rotation angulaire est $\omega = 1\ \mathrm{s}^{-1}$. La pression au centre de la tornade est

$$p_0 = 1000 \exp\left(-\frac{100^2}{2 \times 287 \times 288}\right) = 941\ \mathrm{hPa}\,.$$

Si la tornade arrive assez vite sur une maison calfeutrée où la pression intérieure n'a pas le temps de s'équilibrer, la force par m^2 de toiture due à la surpression interne de 59 hPa est de 5900 N, soit l'équivalent d'un “poids négatif” de 600 kg. Dans la plupart des cas, la toiture explose. Il vaut donc mieux laisser les fenêtres ouvertes pour limiter les dégâts. Pour les tornades les plus fortes, l'action mécanique du vent suffit cependant à entraîner des destructions importantes.