FONCTIONS ORTHOGONALES EMPIRIQUES

B. Legras

On analyse un signal discrétisé Q_i^j où Q (déviation de moyenne temporelle nulle par rapport à $\overline{Q}$) est connu aux points X_i ($i \in [1, N]$) et aux temps t_j ($j \in [1, M]$). Typiquement, Q est une série temporelle de cartes du géopotentiel à une pression p donnée.

Conventions :

- La répétition d'un indice dans une expression indique, sauf avis contraire, une sommation par rapport à cet indice.
- Un indice non mentionné pour un tableau indique un vecteur ou une matrice. Par exemple $Q_i \in \mathbb{R}^M$, $Q^j \in \mathbb{R}^N$, $Q \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$.

On définit la matrice de covariance par

$$C_{il} = \frac{1}{M} Q_i^j Q_l^j = \frac{1}{M} {}^T Q_i \, Q_l = \overline{Q_i, Q_l} \tag{1}$$

La moyenne $\overline{f, g}$ peut être considérée comme un produit scalaire temporel.

C est une matrice $N \times N$, symétrique, réelle et définie positive. Cette dernière propriété apparaît par le fait que pour tout $X \in \mathbb{R}^N$

$${}^T X \, CX = X_i C_{il} X_l = \frac{1}{M} X_i Q_i^j Q_l^j X_l = {}^T X \; {}^T Q^j \, Q^j X > 0 \, .$$

Par conséquent, les valeurs propres de C sont réelles et positives, rangées par ordre décroissant $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_N$. On a ici supposé que les valeurs propres sont toutes différentes, ce qui est le cas générique.

Les vecteurs propres associés $E_m \in \mathbb{R}^N$ de composantes $E_{m,l}$ sont les *fonctions orthogonales empiriques* (EOF) pour Q. Chaque EOF est une carte dans l'espace physique pour la quantité q représentée par Q (par exemple le géopotentiel). L'EOF E_m satisfait

$$CE_m = \lambda_m E_m \quad \text{ou} \quad C_{il} E_{m,l} = \lambda_m E_{m,i} \, .$$

Les EOF sont orthogonales et peuvent être choisies normées pour la norme définie par

$$\langle X, Y \rangle = {}^T X \, y = X_i Y_i$$

pour $X, Y \in \mathbb{R}^N$. On a donc

$$\langle E_m, E_n \rangle = \delta_{n,m} \, .$$

On définit les *composantes principales* de Q comme la décomposition du signal décrit par Q sur les EOF E_m. On a ainsi

$$P_n^j = Q_i^j E_{n,i} = \left\langle Q^j, E_n \right\rangle \ , \tag{2}$$

tels que $Q_i^j = P_n^j E_{n,i}$ ou $Q^j = P_n^j E_n$. La composante principale $P_n \in \mathbb{R}^M$ est le coefficient de l'EOF E_n et dépend du temps (indice j) alors que E_n est indépendant du temps. De même, $P^j \in \mathbb{R}^N$ représente l'ensemble des coefficients à l'instant t_j [1]

La propriété tout à fait remarquable des composantes principales est qu'elles sont orthogonales entre elles pour la norme associée à la moyenne temporelle. En effet

$$\begin{aligned}\overline{P_n, P_m} = \frac{1}{M} Q_i^j E_{n,i} Q_l^j E_{m,l} &= E_{n,i} C_{il} E_{m,l} \\ &= E_{n,i} \lambda_m E_{m,i} = \lambda_m \left\langle E_n, E_m \right\rangle = \lambda_m \delta_{n,m} \ .\end{aligned}$$

On a ainsi obtenu une décomposition de Q sous la forme

$$Q = P_n E_n$$

avec la double propriété d'orthogonalité

$$\begin{aligned}\langle E_n, E_m \rangle &= \delta_{n,m} \\ \overline{P_n, P_m} &= \lambda_n \delta_{n,m}\end{aligned}$$

Le fait que λ_m soit la moyenne $\overline{P_m, P_m}$ (sans sommmation) a une signification particulière. Le calcul de la variance

$$Q_i^j Q_i^j = P_n^j E_{n,i} P_n^j E_{n,i} = P_n^j P_n^j = \sum_m \lambda_m$$

la fait apparaître comme la somme des λ_m. Il en résulte que l'on peut considérer $\lambda_m / \sum_n \lambda_n$ comme la part de la variance associée à l'EOF m.

Remarques :

- L'analyse en EOF a été introduite en météorologie par Lorenz en 1955. Cette méthode a été découverte de nombreuses fois et porte des noms différents selon les domaines. En physique, on s'y réfère sous de nom de décomposition de Karhunen-Loève.
- Il faut se méfier d'accorder une signification physique particulière à une EOF indépendemment des autres. En effet, la décomposition présentée ci-dessus n'est pas intrinsèque mais dépend des choix arbitraires des produits scalaires $\overline{f, g}$ et $\langle X, Y \rangle$. Si la moyenne temporelle semble s'imposer comme un choix naturel (sauf à supposer des propriétés inhomogènes dans le temps), on peut envisager plusieurs choix pour le

[1] En termes mathématiques, P^j appartient au dual de $\mathbb{R}^N$ mais comme cet espace est isomorphe à $\mathbb{R}^N$, nous pouvons les confondre ici.

produit scalaire spatial. Par exemple, si on suppose que le champ analysé est le géopotentiel ϕ et que l'on assimile celui-ci à une fonction de courant, le produit scalaire ici utilisé est une forme discrétisée de l'intégrale de surface $\int\int \phi^2 dxdy$. On peut construire d'autres produits scalaires fondés sur l'énergie $\int\int |\nabla\phi|^2 dxdy$ ou sur la variance de la vorticité (appelée enstrophie) $\int\int (\Delta\phi)^2 dxdy$. Ces choix fournissent une analyse en EOF différente dont l'intérêt dépend du poids accordé à l'énergie ou l'enstrophie dans l'interprétation physique. Une infinité d'autres possibilités est permise.
- Le principal intérêt des EOF apparaît lorsque les valeurs propres λ_m décroissent rapidement avec m, la variance étant concentrée dans un petit nombre de modes. Dans ce cas, le signal se retrouve réduit à un petit nombre de degrés de libertés, ce qui facilite grandement l'analyse ultérieure. Souvent, la réduction en EOF est une étape préliminaire à une analyse statistique plus élaborée.
- On peut chercher à combiner linéairement les EOF dominantes pour obtenir des modes pertinents qui satisfont un critère indépendant (par exemple que la variance spatiale de la combinaison soit la plus localisée possible). Cela revient à explorer l'espace vectoriel décrit par les EOF.
- L'analyse présentée ici est bien adaptée à l'étude des propriétés stationnaires de la variabilité. Plusieurs généralisations existent pour l'étude de modes propagatifs.